

УДК 539.3

## МЕТОД СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ПЛОСКИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

*В. С. КРАВЕЦЬ*

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розвинуто метод розв'язування двовимірних динамічних задач теорії пружності для нескінченних тіл з гладкими криволінійними тріщинами, який поєднує модифікований метод скінченних різниць за часом і метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь за просторовими змінними. Побудовано інтегральні зображення хвильових потенціалів і на їх основі зведено першу крайову задачу до послідовного розв'язування систем інтегро-диференційних рівнянь методом механічних квадратур. Проаналізовано залежності розрахованих динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень від часу у вершинах прямолінійної тріщини за різних ударних та імпульсних навантажень на її берегах.

**Ключові слова:** динамічна плоска задача, сингулярні інтегро-диференційні рівняння, скінченні різниці, тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Нестационарний характер навантажень несучих елементів конструкцій, їх робота в умовах швидкозмінних напружень створюють передумови для появи та поширення у них дефектів типу тріщин. Предмет сучасної динамічної механіки руйнування значно розширився [1] відносно механіки руйнування, яка базується на моделі поширення магістральної тріщини, понятті коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у її вершині, критеріях нестійкого поширення макротріщин [2–8]. Така ідеалізована модель не охоплює багатьох проблем динамічного руйнування, однак практично єдина, що дає можливість описати поширення руйнування елементів конструкцій на макрорівні. Огляди досягнень з різних напрямків динамічної механіки руйнування можна знайти у працях [9–12].

Зосередимось на класі задач про визначення залежностей динамічних КІН від часу для стаціонарних тріщин під дією ударних та імпульсних навантажень. Цим задач властивий значний прояв інерційного ефекту, коли зміна значень КІН у часі суттєво різниться від характеру зміни динамічного навантаження. Обчислені КІН у подальшому використовують для визначення граничної рівноваги тіл зі стаціонарними тріщинами, характеру поширення нестационарних тріщин та швидкості підростання тріщини за циклічного навантаження. Розв'язки таких задач складні, оскільки поведінка динамічних КІН має свої особливості, які залежать від фізичних і геометричних параметрів задачі, конфігурації тіла та наявних у ньому дефектів, способу динамічного навантаження [2, 4, 7, 8, 10, 13, 14].

Достатньо повний систематичний виклад основних аналітичних методів динамічної теорії пружності та механіки руйнування подано у монографіях [2, 4, 7, 8, 15]. Аналітичні методи, в основному, розвинуто для канонічних облас-

тей з використанням інтегральних перетворень Лапласа або Фур'є за часом. Крайові задачі у просторі цих перетворень зведено до розв'язування відповідних крайових інтегральних рівнянь [16–26]. Застосування до отриманих розв'язків інтегральних рівнянь обернених перетворень Лапласа чи Фур'є супроводжувались певними труднощами, що призводили до відповідних похибок у кінцевих розрахунках.

Метод скінченних різниць у динамічних задачах теорії пружності та механіки руйнування використовували, в основному, одночасно і за часом, і за просторовими змінними [2, 27–30]. Запропоновано [31] новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування, який не вживає інтегральні перетворення Лапласа або Фур'є, а ґрунтується на модифікованому методі скінченних різниць тільки за часом. Цей метод придатний для розв'язування антиплоских [32–34] та осесиметричних [35–37] динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування за змінного у часі навантаження.

Нижче на основі поєднання модифікованого методу скінченних різниць за часом [31] та сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними [38–41] розглянуто плоску динамічну задачу механіки руйнування для нескінченних пружних тіл з криволінійними тріщинами, на берегах яких діють довільно залежні від часу навантаження. Числові розрахунки динамічних КІН виконано за ударних та імпульсних навантажень на берегах прямолінійної тріщини.

**Деякі співвідношення динамічної теорії пружності.** Для плоскої задачі лінійної теорії пружності компоненти переміщень довільної точки ізотропного тіла виражають через два хвильові потенціали  $\Phi_1(x, y, t), \Phi_2(x, y, t)$ , що є дійсні функції двох просторових координат  $(x, y)$  і часу  $t$  [2, 7, 8, 13]:

$$u(x, y, t) = \partial\Phi_1/\partial x + \partial\Phi_2/\partial y; \quad v(x, y, t) = \partial\Phi_1/\partial y - \partial\Phi_2/\partial x. \quad (1)$$

За узагальненим законом Гука для ізотропного пружного тіла в умовах плоскої деформації ненульові компоненти напружень мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, t) &= \lambda \nabla^2 \Phi_1 + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right); \\ \sigma_y(x, y, t) &= \lambda \nabla^2 \Phi_1 + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right); \\ \tau_{xy}(x, y, t) &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_z(x, y, t) = \lambda \nabla^2 \Phi_1(x, y, t), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\lambda, \mu$  – сталі Ламе;  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – двовимірний оператор Лапласа.

Використовуючи рівняння руху тіла у переміщеннях та подання (1), динамічну задачу теорії пружності зведемо до розв'язування двох хвильових рівнянь [2, 13]:

$$\nabla^2 \Phi_m(x, y, t) - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \Phi_m(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (3)$$

де  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – швидкості поширення поздовжніх та поперечних пружних хвиль у пружному ізотропному тілі з густиною  $\rho$ .

Увівши у розгляд комплексні змінні  $z = x + iy$ ;  $\bar{z} = x - iy$ ;  $x = (z + \bar{z})/2$ ;  $y = (z - \bar{z})/2i$ , із виразів для компонент переміщень (1) та напружень (2) отримуємо [40]:

$$u(z, \bar{z}, t) + iv(z, \bar{z}, t) = u(x, y, t) + iv(x, y, t) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \{ \Phi_1(x, y, t) - i\Phi_2(x, y, t) \}; \quad (4)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\lambda + \mu) \nabla^2 \Phi_1(x, y, t);$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -8\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ \Phi_1(x, y, t) + i\Phi_2(x, y, t) \}. \quad (5)$$

**Формулювання задачі.** У межах лінійної теорії пружності розглянемо напружено-деформований стан пружного ізотропного тіла (віднесеного до декартової системи координат  $Oxyz$ ) з тунельними вздовж осі  $Oz$  гладкими тріщинами, береги яких знаходяться під дією динамічних навантажень (рис. 1). Вважатимемо, що тіло (область  $S$ ) зі системою  $K$  криволінійних тріщин, контури яких  $L_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) є гладкі криві, знаходиться в умовах плоскої деформації.

На берегах тріщин задані залежні від часу нормальні та дотичні самозрівноважені напруження

$$\{N_k(\zeta, t) + iT_k(\zeta, t)\}^+ = \{N_k(\zeta, t) + iT_k(\zeta, t)\}^- = f_k(\zeta, t); \quad \zeta \in L_k; \quad k = \overline{1, K}, \quad (6)$$

які за допомогою співвідношень [38, 40, 42]

$$2\{N(\zeta, t) + iT(\zeta, t)\} = \sigma_x(\zeta, t) + \sigma_y(\zeta, t) - \exp(-2i\psi) \{ \sigma_y(\zeta, t) - \sigma_x(\zeta, t) - 2i\tau(\zeta, t) \} \quad (7)$$

виражають через напруження (5) і відповідно – через граничні значення ( $z \rightarrow \zeta = \xi + i\eta \in L$ ) хвильових потенціалів  $\Phi_1(\zeta, t), \Phi_2(\zeta, t)$ , які задовольняють диференційні рівняння (3). Тут праві частини крайових умов  $f_k(\zeta, t)$  – задані комплексні функції; верхні індекси “+” і “-” вказують на граничні значення відповідних величин на лівому та правому берегах тріщини;  $\psi$  – кут зовнішньої нормалі до лівого берега тріщини у точці  $\zeta \in L$  (рис. 1).

Нульові початкові умови накладено на переміщення (4) та напруження (5), а також на їхні похідні за часом. Для хвильових потенціалів початкові умови мають вигляд

$$\Phi_m(x, y, t)|_{t=0} = 0; \quad \partial \Phi_m(x, y, t) / \partial t|_{t=0} = 0; \quad m = 1, 2. \quad (8)$$

**Метод розв’язування.** Для розв’язування плоскої динамічної задачі теорії пружності (3), (6), (8) використано модифікований метод скінченних різниць за часом [31]. Довільний момент часу  $t = t_j$  подано у вигляді суми скінченних різниць:

$$t_j = \sum_{v=1}^j \Delta t_v, \quad \Delta t_v = t_v - t_{v-1}, \quad t_0 = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

причому, усі часові різниці  $\Delta t_v$  неоднакові ( $\Delta t_v \neq \Delta t_i; v, i = \overline{1, j}; v \neq i$ ). Загальні розв’язки хвильових рівнянь (3) у кожний момент часу  $t = t_j$  шукаємо у

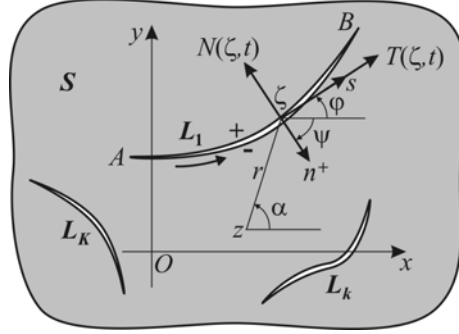


Рис. 1. Нескінченне пружне тіло зі системою криволінійних тріщин.

Fig. 1. An infinite body with a system of curvilinear cracks.

вигляді сум

$$\Phi_m^j \equiv \Phi_m(x, y, t_j) = \sum_{v=1}^j \omega_{jv} \widehat{\Phi}_m^v(x, y); \quad m = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

де  $\omega_{jv}$  – відомі коефіцієнти, що знаходять за рекурентними формулами [31]

$$\begin{aligned} \omega_{jj} &= 1, \quad \omega_{j,j-1} = \frac{\Delta t_{j-1}}{\Delta t_{j-1} - \Delta t_j}, \quad (j = 2, 3, \dots); \\ \omega_{j,j-v} &= \frac{\Delta t_{j-v}^2}{\Delta t_{j-v}^2 - \Delta t_j^2} \left[ \left( 1 + \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \right) \omega_{j-1,j-v} - \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \omega_{j-2,j-v} \right], \quad (11) \\ &(j = 3, 4, \dots; v = 2, 3, \dots, j-1); \end{aligned}$$

$\widehat{\Phi}_m^v(x, y)$ ;  $v = \overline{1, j}$ ;  $m = 1, 2$  – набір нових невідомих функцій. Використовуючи подання загальних розв'язків у вигляді (10), хвильові рівняння (3) перетворимо в однорідні системи диференціальних рівнянь (відносно функцій  $\widehat{\Phi}_m^v(z)$ ), розв'язки яких задовольняють ненульові крайові умови. За нульових початкових умов (8) задачу зводимо до розв'язування двох послідовних систем однорідних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_m^j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_m^j(x, y)}{\partial y^2} - \chi_{mj}^2 \widehat{\Phi}_m^j(x, y) = 0; \quad m = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

де  $\widehat{\Phi}_m^j(x, y) \equiv \widehat{\Phi}_m(x, y, t_j)$ ,  $z = x + iy \in S$ , а величини  $\chi_{mj} = 1/(c_m \Delta t_j)$  – функції фізичних параметрів задачі та заданих скінченних різниць за часом (9).

Через лінійність зображень загальних розв'язків (10) хвильових рівнянь (3) крайові умови (6), записані згідно з виразами (5), (7) через нові невідомі функції  $\widehat{\Phi}_m^j(\zeta)$ ,  $\zeta \in L$ , набувають вигляду

$$\widehat{N}_k^j(\zeta) + i \widehat{T}_k^j(\zeta) = \widehat{f}_k^j(\zeta) \equiv f_k^j(\zeta) - \sum_{v=1}^{j-1} \omega_{jv} \widehat{f}_k^v(\zeta); \quad j = 2, 3, \dots; \quad \zeta \in L_k; \quad k = \overline{1, K}, \quad (13)$$

де  $f_k^j(\zeta) = f_k(\zeta, t_j)$ ;  $\widehat{f}_k^1(\zeta) = f_k^1(\zeta)$ ;  $\widehat{f}_k^j(\zeta)$  – значення в момент часу  $t = t_j$  крайових напружень (6), які відповідають переміщенням  $\widehat{u}_k^j(\zeta)$ ,  $\widehat{v}_k^j(\zeta)$  та значенням хвильових потенціалів  $\widehat{\Phi}_1^j(\zeta)$ ,  $\widehat{\Phi}_2^j(\zeta)$  на контурі розглядуваного розрізу ( $\zeta \in L_k$ ).

**Інтегральні зображення хвильових потенціалів.** Щоб отримати розв'язок динамічної крайової задачі (6)–(8), важливо вдало вибрати інтегральні зображення для потенціалів  $\widehat{\Phi}_m^j(x, y)$ . Використовуючи фундаментальний розв'язок рівнянь Гельмгольца (12) [6, 39–41]

$$G_m^j(r) = K_0(\chi_{mj} r) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i \chi_{mj} r); \quad m = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

де  $r = |\zeta - z|$ ;  $K_0(r)$ ,  $H_0^{(1)}(ir)$  – функції Макдональда та Ганкеля відповідно, для розв'язування плоских задач дифракції пружних хвиль на гладких криволінійних тріщинах будували інтегральні зображення потенціалів безпосередньо для переміщень та їхніх похідних [43, 44]. Так автоматично забезпечували умови існування стрибка вектора переміщень і неперервності вектора напружень за

переходу через контур відповідного розрізу. Однак побудовані зображення громіздкі і потребують реалізації складних обчислювальних алгоритмів [44].

Коли будувати інтегральні зображення для хвильових потенціалів рівнянь Гельмгольца на основі фундаментального розв'язку (14), то наштовхуємось на інші труднощі, пов'язані з високими порядками диференціальних операторів для цих потенціалів у крайових умовах задач, що зумовлює необхідність розв'язувати гіперсингулярні інтегральні рівняння. Щоб оминати ці труднощі, використали відомий підхід [40], де уведенням додаткових невідомих функцій в інтегральні зображення потенціалів позбулися гіперсингулярних доданків у шуканих розв'язках. Отримані так інтегральні зображення хвильових потенціалів можна застосувати для розв'язування плоских динамічних задач для різних концентраторів напружень – тріщин, отворів, включень [40].

Для спрощення запису поки що опускаємо часові індекси  $j$  у всіх відповідних виразах і величинах, вважаючи, що всі вони відносяться до певного моменту часу  $t = t_j$  (9), зокрема, вважатимемо  $\widehat{\Phi}_m^j(x, y) \equiv \Psi_m(z)$ ,  $z = x + iy \in S$ . Інтегральні зображення хвильових потенціалів рівнянь Гельмгольца (12) запишемо у загальному вигляді

$$\Psi_m(z) = \int_L \left\{ p_m(\zeta) K_0(\chi_m r) ds + q_m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\chi_m r) d\zeta + r_m(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} K_0(\chi_m r) d\bar{\zeta} \right\}; \quad m = 1, 2, \quad (15)$$

через шість невідомих функцій  $p_m(\zeta) \equiv \widehat{p}_m(\zeta, t_j)$ ,  $q_m(\zeta) \equiv \widehat{q}_m(\zeta, t_j)$ ,  $r_m(\zeta) \equiv \widehat{r}_m(\zeta, t_j)$ .

Тут  $K_0(\chi_m r)$  – фундаментальний розв'язок (14);  $s$  – дугова абсциса точки  $\zeta \in L$ ;  $\chi_m \equiv \chi_{mj}$ . Для вибраної системи знаків основних параметрів тріщини з гладким криволінійним контуром (рис. 1) маємо:  $d\zeta/ds = ds/d\bar{\zeta} = \exp(i\varphi) = i \exp(i\psi)$ ;  $d\bar{\zeta}/ds = \exp(-2i\varphi) = -\exp(-2i\psi)$ , де  $\varphi = \varphi(\zeta)$ ;  $\psi = \psi(\zeta) = \varphi(\zeta) - \pi/2$  – кути дотичної та нормалі до контуру тріщини у точці  $\zeta \in L$  відносно осі  $Ox$ ;  $\zeta - z = r \exp(i\alpha)$ ;  $r = r(\zeta, z)$ ;  $\alpha = \alpha(\zeta, z)$ .

**Поле переміщень.** На основі інтегральних зображень (15) визначимо вектор переміщень  $u(z) + iv(z)$  (4) довільної точки тіла  $z \in S$  із системою криволінійних тріщин. Використовуючи вирази для відповідних похідних функцій Макдональда [45], отримаємо:

$$\begin{aligned} u(z) + iv(z) = & \int_L \exp(i\alpha) \{ p_1(\zeta) \chi_1 K_1(\chi_1 r) - ip_2(\zeta) \chi_2 K_1(\chi_2 r) \} ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_L \left\{ q_1(\zeta) \chi_1^2 K_0(\chi_1 r) - iq_2(\zeta) \chi_2^2 K_0(\chi_2 r) \right\} d\zeta + \\ & + \exp(2i\alpha) \left\{ r_1(\zeta) \chi_1^2 K_2(\chi_1 r) - ir_2(\zeta) \chi_2^2 K_2(\chi_2 r) \right\} d\bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи асимптотичну поведінку функцій Макдональда для малих аргументів

$$\begin{aligned} K_0(\chi r) & \rightarrow c_x - \ln(r); & K_1(\chi r) & \rightarrow 1/(\chi r); \\ \chi r \rightarrow 0 & & \chi r \rightarrow 0 & \\ K_2(\chi r) & \rightarrow 2/(\chi^2 r^2) - 1/2; & K_3(\chi r) & \rightarrow 8/(\chi^3 r^3) - 1/(\chi r), \\ \chi r \rightarrow 0 & & \chi r \rightarrow 0 & \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\chi \in \{\chi_1, \chi_2\}$ ;  $c_x = \ln(2/\chi) - c_e$ ;  $c_e \approx 0,5772$  – стала Ейлера, виділимо у виразі (16) доданки, які містять сингулярні інтеграли типу Коші:  $u_s(\zeta_0) + iv_s(\zeta_0) =$

$= \int_L \frac{i\{p_1(\zeta) - ip_2(\zeta)\} \exp(i\psi)}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} d\bar{\zeta}$ . Застосувавши формули Сохотського–Племеля

[38, 42] для граничних значень інтегралів типу Коші на розімкнених контурах, отримаємо співвідношення для стрибків переміщень на контурах тріщин

$$\begin{aligned} [u(\zeta_0) + iv(\zeta_0)]|_L &\equiv \{u(\zeta_0) + iv(\zeta_0)\}^+ - \{u(\zeta_0) + iv(\zeta_0)\}^- = \\ &= 2\pi \exp(i\psi_0) \{p_1(\zeta_0) - ip_2(\zeta_0)\}; \quad \zeta_0 \in L, \end{aligned} \quad (18)$$

які визначають фізичний зміст невідомих густин

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &= -\left\{ [u(\zeta)]|_L \cos \psi + [v(\zeta)]|_L \sin \psi \right\} / 2\pi; \\ p_2(\zeta) &= \left\{ [u(\zeta)]|_L \sin \psi - [v(\zeta)]|_L \cos \psi \right\} / 2\pi \end{aligned} \quad (19)$$

як дійсних функцій комплексного аргументу в інтегральному зображенні хвильових потенціалів (15). Для прямолінійної горизонтальної тріщини вздовж відрізка довжини  $2a$  ( $L = [-a; a]$ ;  $\zeta_0 = x$ ;  $\psi_0 = -\pi/2$ ) отримаємо функції стрибків вертикальних та горизонтальних переміщень  $[v(x)]|_L = -2\pi p_1(x)$ ,  $[u(x)]|_L = -2\pi p_2(x)$  за переходу через контур тріщини у довільній точці  $x \in [-a; a]$ .

**Поле напружень.** Використавши вирази для хвильових потенціалів (15) та відповідних їхніх похідних, визначимо напруження (5) у довільній точці тіла  $z \in S$ :

$$\begin{aligned} &\sigma_x(z) + \sigma_y(z) = \\ &= (\lambda + \mu) \left\{ 2\chi_1^2 \int_L p_1(\zeta) K_0(\chi_1 r) ds - \chi_1^3 \int_L K_1(\chi_1 r) \langle q_1(\zeta) \exp(-i\alpha) d\zeta + r_1(\zeta) \exp(i\alpha) d\bar{\zeta} \rangle \right\}, \quad (20) \\ &\sigma_y(z) - \sigma_x(z) + 2i\tau_{xy}(z) = \\ &= \mu \int_L \exp(-2i\alpha) \left\{ -p_1(\zeta) 2\chi_1^2 K_2(\chi_1 r) - ip_2(\zeta) 2\chi_2^2 K_2(\chi_2 r) \right\} ds + \\ &\quad + \mu \int_L \left\{ \exp(-3i\alpha) \left\{ q_1(\zeta) \chi_1^3 K_3(\chi_1 r) + iq_2(\zeta) \chi_2^3 K_3(\chi_2 r) \right\} d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \exp(-i\alpha) \left\{ r_1(\zeta) \chi_1^3 K_1(\chi_1 r) + ir_2(\zeta) \chi_2^3 K_1(\chi_2 r) \right\} d\bar{\zeta} \right\}; \quad \zeta - z = r \exp(i\alpha). \end{aligned} \quad (21)$$

Граничні значення напружень на контурах тріщин (при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ ) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\mu} \{N(\zeta_0) - iT(\zeta_0)\} = \left\{ \sigma_x(\zeta_0) + \sigma_y(\zeta_0) - e^{2i\psi_0} (\sigma_y(\zeta_0) - \sigma_x(\zeta_0) + 2i\tau_{xy}(\zeta_0)) \right\} / \mu = \\ &= 2\sigma\chi_1^2 \int_L p_1(\zeta) K_0(\chi_1 r_0) ds + 2 \int_L \left\{ p_1(\zeta) \chi_1^2 K_2(\chi_1 r_0) + ip_2(\zeta) \chi_2^2 K_2(\chi_2 r_0) \right\} e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} ds - \\ &- \int_L \left\{ q_1(\zeta) \chi_1^3 \left\{ \sigma K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} K_3(\chi_1 r_0) \right\} + iq_2(\zeta) \chi_2^3 e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} K_3(\chi_2 r_0) \right\} e^{-i\alpha_0} d\zeta - \\ &- \int_L \left\{ r_1(\zeta) \chi_1^3 \left\{ \sigma K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} K_1(\chi_1 r_0) \right\} + ir_2(\zeta) \chi_2^3 e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} K_1(\chi_2 r_0) \right\} e^{i\alpha_0} d\bar{\zeta} \equiv \\ &\equiv J_{11}(\zeta_0) + J_{12}(\zeta_0) - J_{13}(\zeta_0) - J_{14}(\zeta_0); \quad \zeta_0 \in L, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\mu} \{N(\zeta_0) + iT(\zeta_0)\} = \left\{ \sigma_x(\zeta_0) + \sigma_y(\zeta_0) - e^{-2i\psi_0} (\sigma_y(\zeta_0) - \sigma_x(\zeta_0) - 2i\tau_{xy}(\zeta_0)) \right\} / \mu = \\
& = 2\sigma\chi_1^2 \int_L p_1(\zeta) K_0(\chi_1 r_0) d\zeta + 2 \int_L \left\{ \overline{p_1(\zeta)} \chi_1^2 K_2(\chi_1 r_0) - i \overline{p_2(\zeta)} \chi_2^2 K_2(\chi_2 r_0) \right\} e^{-2i(\psi_0 - \alpha_0)} d\zeta - \\
& - \int_L \left\{ q_1(\zeta) \sigma \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\{ \overline{q_1(\zeta)} \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) - \overline{iq_2(\zeta)} \chi_2^3 K_1(\chi_2 r_0) \right\} \right\} e^{-i\alpha_0} d\zeta - \\
& - \int_L \left\{ \overline{q_1(\zeta)} \chi_1^3 K_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\{ q_1(\zeta) \chi_1^3 K_3(\chi_1 r_0) - iq_2(\zeta) \chi_2^3 K_3(\chi_2 r_0) \right\} \right\} e^{i\alpha_0} d\bar{\zeta} \equiv \\
& \equiv J_{21}(\zeta_0) + J_{22}(\zeta_0) - J_{23}(\zeta_0) - J_{24}(\zeta_0); \quad \zeta_0 \in L,
\end{aligned} \tag{23}$$

де  $\zeta - \zeta_0 = r_0 \exp(i\alpha_0)$ ;  $\exp(i\psi_0) = -id\zeta_0 / ds_0$ ;  $\sigma = (\lambda + \mu) / \mu = 1 / (1 - 2\nu)$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Хвильові потенціали (15), переміщення (16) та напруження (22), (23) перевизначені уведеними функціями  $p_m(\zeta), q_m(\zeta), r_m(\zeta), m=1,2$ , а тому деякі з них можна вибрати довільно. У загальному формулюванні крайова задача зводиться до пошуку двох незалежних комплексних функцій. У нашому випадку самозрівноважених навантажень (6) необхідно обмежитись пошуком однієї комплексної (або двох дійсних) функції.

Для зменшення кількості невідомих функцій у зображеннях (15) використаємо умови неперервності напружень (відсутність стрибків напружень (6) за переходу через контури тріщин. Стрибки напружень на розіркнених контурах можна отримати лише за наявності в їх виразах сингулярних інтегралів типу Коші [38, 42]. Виділимо у співвідношеннях для напружень (22), (23) сингулярні доданки та прирівняємо їхні стрибки на контурах тріщин до нуля. Ядра перших інтегралів у виразах (22), (23) мають лише логарифмічну особливість, тому їхні стрибки нульові  $[J_{11}(\zeta_0)]|_L = [J_{21}(\zeta_0)]|_L = 0$ . Врахувавши фізичний зміст функцій  $p_1(\zeta), p_2(\zeta)$  (19), а також той факт, що для пружної задачі стрибки переміщень на кінцях розрізів нульові [38, 41] ( $[u(A) \pm iv(A)]|_L = [u(B) \pm iv(B)]|_L = 0$ ), сингулярну частину другого інтеграла виразу (22) запишемо у вигляді  $J_{12}^s(\zeta_0) = e^{2i\psi_0} \frac{2}{\pi i} \int_L \frac{d}{d\bar{\zeta}} [u(\zeta) - iv(\zeta)] \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - \zeta_0}$ , а його стрибок  $[J_{12}^s(\zeta_0)]|_L = -4i \exp(i\psi_0) \frac{d}{ds_0} [u(s_0) - iv(s_0)]|_L = -4 \frac{d}{d\bar{\zeta}_0} [u(\zeta_0) - iv(\zeta_0)]|_L$ . Беручи до уваги асимптотику функцій Макдональда (17) для малих аргументів, сингулярну частину третього інтеграла виразу (22) подамо так:

$$\begin{aligned}
J_{13}^s(\zeta_0) = & \int_L \left\{ q_1(\zeta) \frac{\sigma \chi_1^2}{\zeta - \zeta_0} + \right. \\
& \left. + e^{2i\psi_0} \left\{ q_1(\zeta) \left( \frac{8}{(\zeta - \zeta_0)^3} - \frac{\chi_1^2 e^{-2i\alpha_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) + iq_2(\zeta) \left( \frac{8}{(\zeta - \zeta_0)^3} - \frac{\chi_2^2 e^{-2i\alpha_0}}{\zeta - \zeta_0} \right) \right\} \right\} d\zeta.
\end{aligned}$$

Щоб позбутися гіперсингулярних інтегралів у цьому виразі, приймаємо залежність  $q_1(\zeta) = -iq_2(\zeta)$ . Тоді, враховуючи вирази

$$(\sigma + 1)\chi_1^2 = \chi_2^2; \quad \sigma = (\lambda + \mu) / \mu = \text{const}, \tag{24}$$

отримаємо  $[J_{13}^s(\zeta_0)]|_L = 0$ . Аналогічно, щоб позбутися гіперсингулярних до-

данків останнього інтеграла виразу (22), приймаємо залежність  $r_1(\zeta) = ir_2(\zeta)$  і знаходимо стрибок  $[J_{14}^s(\zeta_0)]_L = -4\pi i \chi_2^2 r_1(\zeta_0)$ . Просумувавши знайдені стрибки сингулярних інтегралів, з умови рівності нулю стрибків напружень (22) отримаємо вираз

$$\pi \chi_2^2 r_1(\zeta) = \exp(i\psi) \frac{d}{ds} [u(s) - iv(s)]_L = -i \frac{d}{d\bar{\zeta}} [u(\zeta) - iv(\zeta)]_L, \quad \zeta \in L, \quad (25)$$

який визначає фізичний зміст невідомої функції  $r_1(\zeta)$  як похідної стрибка вектора переміщень  $u(\zeta) - iv(\zeta)$  за переходу через контур тріщини.

Аналогічно, розглянувши напруження (23) та врахувавши прийняті залежності між функціями  $q_1(\zeta), q_2(\zeta)$  і  $r_1(\zeta), r_2(\zeta)$ , знайдемо стрибки сингулярних інтегралів:

$$\begin{aligned} [J_{22}^s(\zeta_0)]_L &= 4i \exp(-i\psi_0) \frac{d}{ds_0} [u(s_0) + iv(s_0)]_L = -4 \frac{d}{d\zeta_0} [u(\zeta_0) + iv(\zeta_0)]_L, \\ [J_{23}^s(\zeta_0)]_L &= 2\pi i \left\{ \sigma \chi_1^2 q_1(\zeta_0) + (\chi_2^2 - \chi_1^2) \overline{q_1(\zeta_0)} \right\}; \\ [J_{24}^s(\zeta_0)]_L &= 2\pi i \left\{ -\sigma \chi_1^2 r_1(\zeta_0) + (\chi_2^2 + \chi_1^2) \overline{r_1(\zeta_0)} \right\}. \end{aligned}$$

З умови рівності нулю стрибків напружень (23) на контурі тріщини отримаємо вираз  $i \frac{d}{d\zeta_0} [u(\zeta_0) + iv(\zeta_0)]_L = \frac{\pi}{2} \left\{ \sigma \chi_1^2 q_1(\zeta_0) + (\chi_2^2 - \chi_1^2) \overline{q_1(\zeta_0)} - \sigma \chi_1^2 r_1(\zeta_0) + (\chi_2^2 + \chi_1^2) \overline{r_1(\zeta_0)} \right\}$ .

Коли ще ввести залежність між невідомими функціями  $q_1(\zeta) = \overline{r_1(\zeta)}$  і врахувати вирази для фізичних констант (24), дістанемо співвідношення

$$\pi \chi_2^2 q_1(\zeta) = \exp(-i\psi) \frac{d}{ds} [u(s) + iv(s)]_L = i \frac{d}{d\zeta} [u(\zeta) + iv(\zeta)]_L, \quad \zeta \in L, \quad (26)$$

яке визначає фізичний зміст шуканої функції  $q_1(\zeta)$ .

**Інтегро-диференційне рівняння.** Інтегральні зображення хвильових потенціалів (15) (а отже, всі значення компонент переміщень та напружень у тілі з тріщинами), які виражали через шість невідомих функцій  $p_m(\zeta), q_m(\zeta), r_m(\zeta)$ ,  $m = 1, 2$ , враховуючи залежності

$$q_1(\zeta) = -iq_2(\zeta); \quad r_1(\zeta) = ir_2(\zeta); \quad q_1(\zeta) = \overline{r_1(\zeta)}, \quad \zeta \in L, \quad (27)$$

тепер можна подати через функції  $p_1(\zeta), p_2(\zeta)$  (19) і  $q_1(\zeta)$  (26), або через одну комплексну функцію стрибка переміщень на контурі тріщини  $g_1(\zeta) \equiv [u(\zeta) + iv(\zeta)]_L = 2\pi \exp(i\psi) \{p_1(\zeta) - ip_2(\zeta)\}$  та її похідну  $g_1'(\zeta) \equiv d[u(\zeta) + iv(\zeta)]_L / d\zeta = -i\pi \chi_2^2 q_1(\zeta)$ .

Враховуючи співвідношення (19), (26) та залежності між функціями (27), за допомогою виразу для напружень (23) задовольнимо крайові умови задачі (13) і отримаємо послідовний набір (у кожному момент часу  $t = t_j$  (9)) систем сингулярних інтегро-диференційних рівнянь відносно стрибків переміщень:

$$\begin{aligned} \frac{\chi_1^2}{2\pi i} \int_L \left\{ \left( \sigma K_0(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) - \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right) [u(\zeta) - iv(\zeta)]_L d\zeta - \right. \\ \left. - \left( \sigma K_0(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right) [u(\zeta) + iv(\zeta)]_L d\bar{\zeta} \right\} + \end{aligned} \quad (28)$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\chi_1}{\pi i} \int_L \left\{ bK_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\langle \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_1(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2}{\chi_1} K_1(\chi_2 r_0) - \frac{2/\chi_1}{|\zeta - \zeta_0|} \right\rangle \right\} e^{-i\alpha_0} d[u(\zeta) + iv(\zeta)]_L + \\
& + \frac{\chi_1}{\pi i} \int_L \left\{ bK_1(\chi_1 r_0) + e^{2i(\alpha_0 - \psi_0)} \left\langle -\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_3^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2}{\chi_1} K_3^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} e^{i\alpha_0} d[u(\zeta) - iv(\zeta)]_L = \\
& = 2f(\zeta_0)/\mu; \zeta_0 \in L.
\end{aligned}$$

Тут на основі апроксимаційних виразів (17) уведено допоміжні функції

$$K_2^0(\chi r) = K_2(\chi r) - 2/(\chi^2 r^2), \quad K_3^0(\chi r) = K_3(\chi r) - 8/(\chi^3 r^3); \quad (29)$$

функцію  $f(\zeta_0) = \hat{f}_k^j(\zeta_0)$  визначено у крайових умовах (13) для кожного контуру тріщини  $L_k$  і у кожний момент часу  $t = t_j, j = 1, 2, \dots$ ;  $b = \sigma\chi_1^2 / \chi_2^2 = (\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) = 1/(2 - 2\nu)$ .

Подамо шукані функції (19), (26) через стрибки переміщень на контурі гладкої криволінійної тріщини у вигляді [38]

$$g(\zeta) = \frac{2\mu}{i(1 + \kappa)} [u(\zeta) + iv(\zeta)]_L; \quad g'(\zeta) = \frac{2\mu}{i(1 + \kappa)} \frac{d}{d\zeta} [u(\zeta) + iv(\zeta)]_L; \quad \zeta \in L, \quad (30)$$

де для плоскої деформації тіла  $\kappa = 3 - 4\nu = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$ . Тоді рівняння (28) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
& \int_L \left\{ L_{11}(\zeta, \zeta_0) g(\zeta) d\zeta + L_{12}(\zeta, \zeta_0) \overline{g(\zeta)} d\bar{\zeta} \right\} + \\
& + \int_L \left\{ L_{21}(\zeta, \zeta_0) g'(\zeta) d\zeta + L_{22}(\zeta, \zeta_0) \overline{g'(\zeta)} d\bar{\zeta} \right\} = \pi f(\zeta_0); \quad \zeta_0 \in L, \quad (31) \\
L_{11}(\zeta, \zeta_0) &= \frac{\chi_1^2}{4b} \left\{ -\sigma K_0(\chi_1 r_0) + \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}; \\
L_{12}(\zeta, \zeta_0) &= \frac{\chi_1^2}{4b} \left\{ -\sigma K_0(\chi_1 r_0) + \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) - \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}; \\
L_{21}(\zeta, \zeta_0) &= \frac{\chi_1}{2b} \left\{ bK_1(\chi_1 r_0) + \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \left\langle \frac{2/\chi_1}{|\zeta - \zeta_0|} - \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_1(\chi_1 r_0) - \frac{\chi_2}{\chi_1} K_1(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\zeta - \zeta_0|}{\zeta - \zeta_0}; \\
L_{22}(\zeta, \zeta_0) &= \frac{\chi_1}{2b} \left\{ bK_1(\chi_1 r_0) + \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \left\langle -\frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} K_3^0(\chi_1 r_0) + \frac{\chi_2}{\chi_1} K_3^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\zeta - \zeta_0|}{\zeta - \zeta_0}.
\end{aligned} \quad (32)$$

Тут  $K_0(\chi r_0), K_1(\chi r_0)$  – функції Макдональда дійсних аргументів ( $\chi \in \{\chi_1, \chi_2\}$ ,  $r_0 = |\zeta - \zeta_0|$ ), а функції  $K_2^0, K_3^0$  визначені співвідношеннями (29). Зауважимо, що ядра  $L_{11}, L_{12}$  мають логарифмічну особливість (якщо  $\zeta \rightarrow \zeta_0$ ), ядро  $L_{21}$  – сингулярність типу Коші, а ядро  $L_{22}$  регулярне. Розв'язки рівнянь (31) повинні також задовольняти додаткові умови [38, 41]

$$\int_{L_k} g'(\zeta) d\zeta = 0; \quad g'(\zeta) = g'_k(\zeta), \quad \zeta \in L_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (33)$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу кожного контуру тріщини  $L_k$ .

Таким чином, динамічну крайову задачу (3), (6), (8) зведено до розв'язування послідовного набору для кожного моменту часу  $t = t_j$  (9) систем сингу-

лярних інтегро-диференційних рівнянь (31). Отримавши розв'язки цих рівнянь  $g'(\zeta) \equiv \bar{g}'^j_k(\zeta) = \bar{g}'^j_k(\zeta, t_j)$ ,  $\zeta \in L_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , згідно з інтегральними зображеннями хвильових потенціалів (15), залежностями між функціями (27), виразами для переміщень (16) і напружень (20), (21), та використавши подання модифікованого методу скінченних різниць за часом (10), можна визначити напружено-деформований стан тіла з тріщинами у довільний момент часу  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , тобто розв'язати поставлену задачу.

**Статичний випадок.** Із сингулярних інтегро-диференційних рівнянь (28) або (31) для динамічної задачі (3), (6), (8) легко отримати сингулярне інтегральне рівняння відповідної статичної задачі, коли на берегах гладкої криволінійної тріщини  $L$  задані самозрівноважені статичні напруження  $N(\zeta_0)^\pm + iT(\zeta_0)^\pm = f_0(\zeta_0)$ ;  $\zeta_0 \in L$ . Тоді диференційні рівняння Гельмгольца (12) для хвильових потенціалів набудуть вигляду рівнянь Лапласа, а у рівняннях (28), (31) необхідно зробити граничні переходи, коли  $\chi_1, \chi_2 \rightarrow 0$ . Використовуючи асимптотичні поведінки функцій Макдональда для малих аргументів (17), граничні значення ядер (32) запишемо так:

$$\begin{aligned} \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow 0} \{L_{11}(\zeta, \zeta_0)\} &= \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow 0} \{L_{12}(\zeta, \zeta_0)\} = 0; \\ \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow 0} \{L_{21}(\zeta, \zeta_0)\} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right\rangle \equiv L_{21}^0(\zeta, \zeta_0); \\ \lim_{\chi_1, \chi_2 \rightarrow 0} \{L_{22}(\zeta, \zeta_0)\} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} - \frac{d\bar{\zeta}_0}{d\zeta_0} \frac{(\zeta - \zeta_0)}{(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)^2} \right\rangle \equiv L_{22}^0(\zeta, \zeta_0); \quad \zeta, \zeta_0 \in L. \end{aligned} \quad (34)$$

Тоді із сингулярного інтегро-диференційного рівняння (31) отримаємо добре відоме [38] сингулярне інтегральне рівняння відповідної статичної задачі

$$\int_L \{L_{21}^0(\zeta, \zeta_0)g'(\zeta)d\zeta + L_{22}^0(\zeta, \zeta_0)\overline{g'(\zeta)}d\bar{\zeta}\} = \pi f_0(\zeta_0); \quad \zeta_0 \in L, \quad (35)$$

ядра якого  $L_{21}^0(\zeta, \zeta_0)$ ,  $L_{22}^0(\zeta, \zeta_0)$  визначені виразами (34).

**Числове розв'язування інтегро-диференційних рівнянь.** Для числової дискретизації інтегральних рівнянь з наявними у їх ядрах логарифмічними особливостями та сингулярностями типу Коші застосовано метод механічних квадратур [39]. Розрахунки виконано для однієї прямолінійної тріщини довжини  $2a$  ( $L = [-a; a]$ ), для якої

$$\zeta = \bar{\zeta} = a\xi, \xi \in [-1; 1]; \quad \psi = \psi^+ = -\pi/2; \quad \exp(i\psi) = -i; \quad \exp(2i\psi) = -1; \quad d\bar{\zeta}/d\zeta = 1; \quad (36)$$

$$\exp(i\alpha_0) = \frac{\zeta - \zeta_0}{|\zeta - \zeta_0|} = \begin{cases} 1, & \xi_0 < \xi \\ -1, & \xi_0 > \xi \end{cases}; \quad \exp(2i\alpha_0) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} = 1; \quad r_0 = a|\xi - \xi_0|.$$

У безрозмірних змінних інтегро-диференційне рівняння (31) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \{L_{11}(\xi, \xi_0)g_0(\xi) + L_{12}(\xi, \xi_0)\bar{g}_0(\xi)\} d\xi + \\ &+ \int_{-1}^1 \{L_{21}(\xi, \xi_0)g'_0(\xi) + L_{22}(\xi, \xi_0)\bar{g}'_0(\xi)\} d\xi = \pi f_0(\xi_0), \quad \xi_0 \in [-1; 1]. \end{aligned} \quad (37)$$

Тут ядра  $L_{1m}(\xi, \xi_0) = a^2 L_{1m}(\zeta, \zeta_0)$ ,  $L_{2m}(\xi, \xi_0) = a L_{2m}(\zeta, \zeta_0)$ ,  $m = 1, 2$  визначені вира-

зами (32) і є дійсні функції;  $f_0(\xi_0) \equiv \widehat{f}(\xi_0, \tau_k) = f(\zeta_0)/p$ , де  $\tau_k = c_2 t_k/a$ ,  $k = \overline{1, j}$  – безрозмірні часові вузли;  $g_0(\xi) \equiv \widehat{g}_0(\xi, \tau_k) = g(\zeta)/(ap) \equiv \widehat{g}(\zeta, t_k)/(ap)$ , де  $p$  – силовий параметр розмірності напружень;  $g'_0(\xi) \equiv \widehat{g}'_0(\xi, \tau_k) = g'(\zeta)/p \equiv \widehat{g}'(\zeta, t_k)/p$ .

Для числового розв'язування задачі зведемо сингулярні інтегро-диференціальні рівняння (37) до канонічного вигляду:

$$\int_{-1}^1 \ln|\xi - \xi_0| \{k_1 g_0(\xi) + k_2 \overline{g}_0(\xi)\} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{g'_0(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \int_{-1}^1 \{L_{31}(\xi, \xi_0) g_0(\xi) + L_{32}(\xi, \xi_0) \overline{g}_0(\xi)\} d\xi = \pi f(\xi_0); \quad \xi_0 \in [-1; 1]. \quad (38)$$

Тут  $L_{31}(\xi, \xi_0) = L_{11}^R(\xi, \xi_0) - dL_{21}^R(\xi, \xi_0)/d\xi - k_3 \ln(|\xi - \xi_0|/a)$  і  $L_{32}(\xi, \xi_0) = L_{12}^R(\xi, \xi_0) - dL_{22}(\xi, \xi_0)/d\xi + k_4 \ln(|\xi - \xi_0|/a)$  – регулярні функції (верхній індекс “R” вказує, що з відповідних ядер (32) та їх похідних узято лише регулярні складники);  $k_2 = b/d_k$ ;  $k_4 = (1-b)/d_k$ ;  $k_1 = (1+1/b + (1-2b)/\sigma)/d_k$ ;  $k_3 = (1/b + (1-2b)/\sigma)/d_k$ ;  $d_k = 4\Delta\tau_k^2, k = \overline{1, j}$ .

Невідому функцію  $g_0(\xi)$  шукаємо у класі  $g_0(\xi) = u_0(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$ , де функція  $u_0(\xi)$  на контурі тріщини задовольняє умову Гельдера [38]. Застосувавши відповідні квадратурні формули [39] для інтегралів типу Коші, інтегралів з логарифмічними та регулярними ядрами, рівняння (38) зведемо до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно значень функції  $g_0(\xi)$  у вузлових точках на контурі тріщини (коренях поліномів Чебишова другого роду). Використавши інтерполяційний поліном для похідної шуканої функції, знайшли граничні значення функції  $u_1(\xi) = g'_0(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$  на кінцях проміжку інтегрування ( $\xi = \pm 1$ ). Через ці величини  $u_1(\pm 1) \equiv \widehat{u}_1(\pm 1, \tau_k)$ , що відповідають кожному дискретному моменту часу  $\tau = \tau_k (k = \overline{1, j})$ , визначено проміжні значення КІН, які для прямолінійної тріщини такі [38]:  $\widehat{K}_I^\pm(t_k) - i\widehat{K}_{II}^\pm(t_k) = \mp \widehat{u}_1(\pm 1, \tau_k) p\sqrt{\pi a}$ . Реальні динамічні КІН знаходимо за прийнятими поданнями (типу (10)) модифікованого методу скінченних різниць за часом і у відносних величинах їх обчислимо за формулами

$$F_I^\pm(\tau_j) - iF_{II}^\pm(\tau_j) \equiv \{K_I^\pm(t_j) - iK_{II}^\pm(t_j)\} / p\sqrt{\pi a} = \mp \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \widehat{u}_1(\pm 1, \tau_k) \quad (39)$$

для лівої  $F_I(A) - iF_{II}(A) = F_I^-(\tau_j) - iF_{II}^-(\tau_j)$  та правої  $F_I(B) - iF_{II}(B) = F_I^+(\tau_j) - iF_{II}^+(\tau_j)$  вершин тріщини у кожний безрозмірний вузловий момент часу  $\tau = \tau_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ .

**Аналіз числових результатів.** Динамічні КІН обчислено для плоскої деформації ( $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $\sigma = 1/(1 - 2\nu)$ ;  $b = 1/(2 - 2\nu)$ ;  $c_2^2/c_1^2 = \chi_1^2/\chi_2^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$ ) нескінченного пружного тіла з прямолінійною тріщиною завдовжки  $2a$ . Досліджено поведінку відносних КІН (39) у вершинах тріщини залежно від безрозмірного часу  $\tau = c_2 t/a$  за дії на берегах тріщини рівномірно розподілених динамічних напружень  $N(\tau) + iT(\tau) = (-p + iq)f(\tau)$ .

Зміна коефіцієнта Пуассона матеріалу тіла  $\nu$  суттєво впливає на поведін-

ку в часі КІН зсуву  $F_{II}$ , коли КІН нормального відриву  $F_I$  малочутливий до цієї зміни (рис. 2). Тут на берегах тріщини діють однакові за значенням ( $q = p$ ) ударні нормальні та дотичні напруження  $N + iT = p(-1 + i)H(\tau)$ , де  $H(\tau)$  – функція Гевісайда. Максимальні значення КІН  $F_{II}^{\max}$  нижчі за  $F_I^{\max}$ , однак для малих часів  $\tau \in [0; 2]$  КІН  $F_{II}$  зростають значно швидше (особливо для високих значень коефіцієнта Пуассона) за  $F_I$ , тому у початкові моменти часу за ударного навантаження на берегах тріщини домінують КІН  $F_{II}$ . Для  $\nu = 0,29$  обчислені значення відносних КІН  $F_I(\tau), F_{II}(\tau)$  за ударних навантажень  $N = -pH(\tau), T = pH(\tau)$  на берегах прямолінійної тріщини добре узгоджуються з відомими [2, 13].

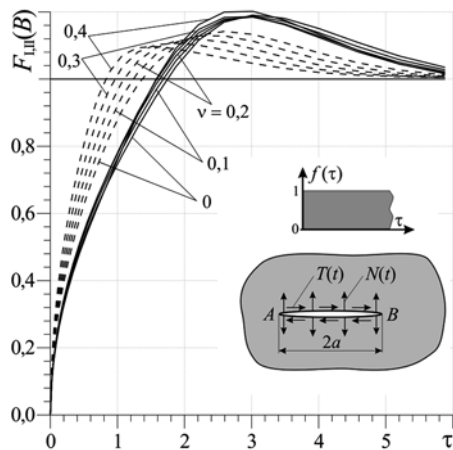


Рис. 2. Вплив коефіцієнта Пуассона на зміну КІН у часі за ударних навантажень на берегах тріщини:

суцільні криві –  $F_I(B) = K_I(B) / p\sqrt{\pi a}$  ;

штрихові –  $F_{II}(B) = K_{II}(B) / p\sqrt{\pi a}$  .

Fig. 2. Influence of a Poisson's ratio on changing the stress intensity factors (SIF) with time under impact loading at the crack faces: solid curves –

$F_I(B) = K_I(B) / p\sqrt{\pi a}$  ;

dashed –  $F_{II}(B) = K_{II}(B) / p\sqrt{\pi a}$  .

Вплив швидкості наростання нормального та дотичного навантажень на берегах тріщини є кількісно різним для КІН  $F_I$  і  $F_{II}$  (рис. 3). За швидкого зростання нормальних напружень (рис. 3а,  $\beta = 80^\circ (\tau_0 \approx 0,176); 45^\circ (\tau_0 = 1,0)$ ) для КІН  $F_I$  властивий значний інерційний ефект (форми кривих КІН  $F_I$  і навантаження суттєво різняться).

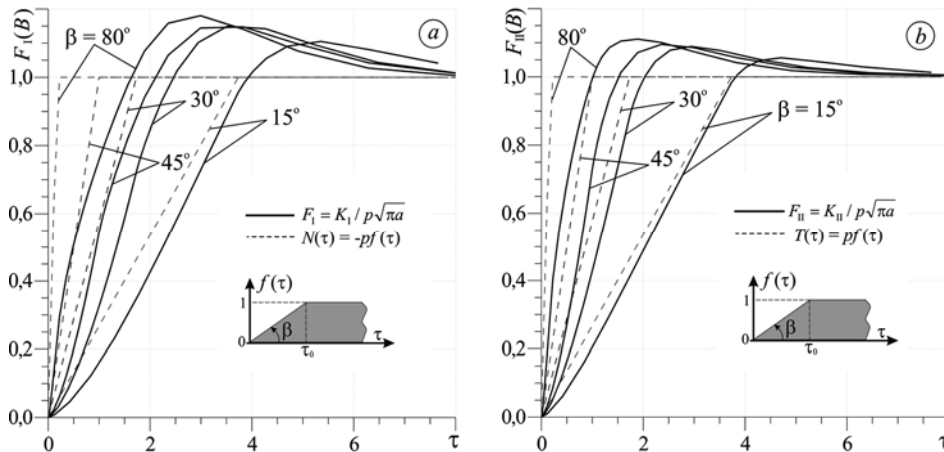


Рис. 3. Вплив швидкості зростання нормального (а) та дотичного (б) навантажень на зміну КІН  $F_I(B)$  (а),  $F_{II}(B)$  (б) у часі ( $\nu = 0,29$ ).

Fig. 3. Influence of the normal (a) and tangential (b) loading rate growth on SIF change  $F_I(B)$  (a),  $F_{II}(B)$  (b) with time ( $\nu = 0.29$ ).

Інерційний характер поведінки КІН  $F_{II}$  менш виражений (рис. 3b). Для відносно повільного зростання навантажень ( $\beta < 15^\circ (\tau_0 > 3,7)$ ) інерційність КІН значно знижується і форми кривих  $F_I$ ,  $F_{II}$  наближаються до форм кривих навантаження. Тут приходимо до статичної задачі, розглядаючи змінне в часі навантаження як незалежний параметр.

Вплив на динамічні КІН імпульсних нормальних і дотичних навантажень на берегах тріщини суттєво залежить від форми та довжини (часової тривалості  $\tau_0$ ) заданих імпульсів (рис. 4 і 5). Для окремих імпульсів (рис. 4) характерне різке пониження КІН (після дії імпульсу напружень) аж до від'ємних значень, зокрема, настають моменти часу ( $\tau_0 > 4$ ), після яких береги тріщини можуть контактувати ( $F_I < 0$ ).

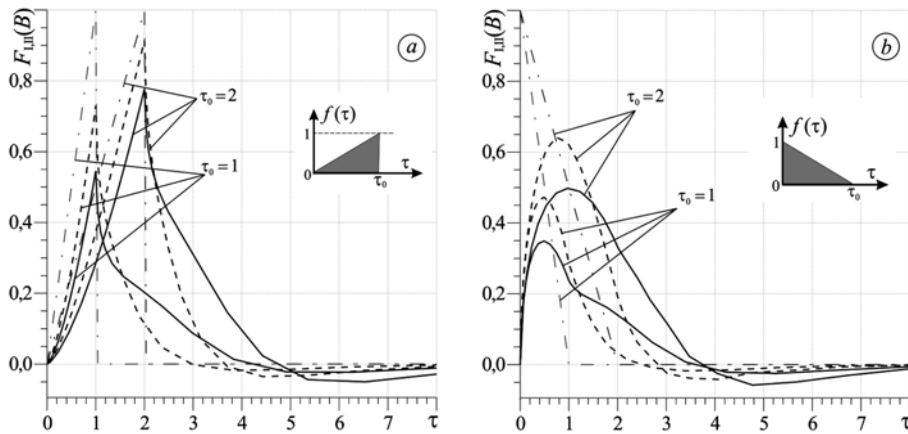


Рис. 4. Зміна КІН в часі для різних трикутних форм імпульсних нормальних та дотичних навантажень на берегах тріщини ( $\nu = 0,29$ ): суцільні криві –  $F_I(B)$ ; штрихові –  $F_{II}(B)$ ; штрихпунктирні – навантаження  $N(\tau)$ ,  $T(\tau)$ .

Fig. 4. Change of the SIF with time for the different triangle shapes of pulse normal and tangential loads on the crack faces ( $\nu = 0.29$ ): solid curves –  $F_I(B)$ ; dashed –  $F_{II}(B)$ ; dash-dotted lines – loads  $N(\tau)$ ,  $T(\tau)$ .

Для періодичних імпульсних навантажень берегів тріщини на поведінку КІН суттєво впливає тривалість періоду навантаження  $\tau_0$  (рис. 5).

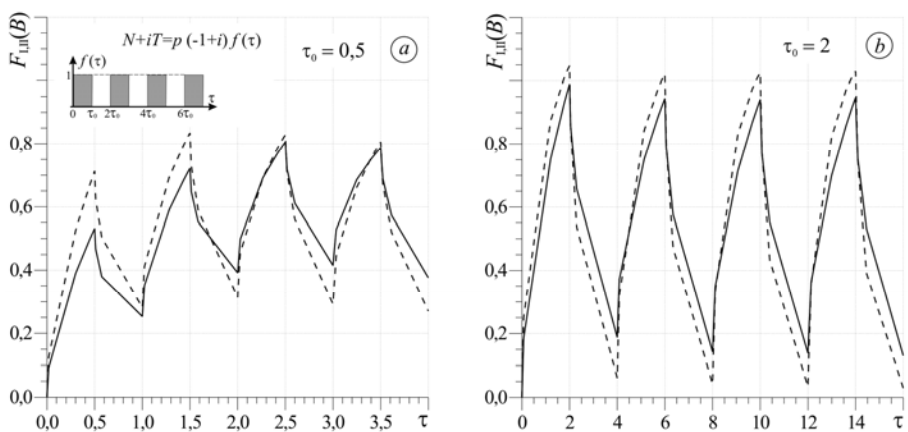


Рис. 5. Вплив багатоімпульсного навантаження на динамічні КІН для різних часових періодів  $\tau_0 = 0,5$  (a),  $\tau_0 = 2$  (b) ( $\nu = 0,29$ ): суцільні криві –  $F_I(B)$ ; штрихові –  $F_{II}(B)$ .

Fig. 5. Influence of the multi pulse loading on the dynamic SIF for different time periods  $\tau_0 = 0.5$  (a),  $\tau_0 = 2$  (b) ( $\nu = 0.29$ ): solid curves –  $F_I(B)$ ; dashed –  $F_{II}(B)$ .

Для близьких у часі прямокутних імпульсів ( $\tau_0 = 0,5$ ) спостерігаємо значний інерційний вплив дії попереднього імпульсу на дію наступного (рис. 5a), однак після 3–4 імпульсів характер зміни КІН стає циклічним. Для віддалених у часі імпульсів ( $\tau_0 = 2$ ) через їх незначний взаємовплив перехідний часовий діапазон (від імпульсного навантаження до циклічного) значно зменшується (рис. 5b) і виходимо на циклічний характер зміни КІН вже після перших імпульсів.

### ВИСНОВКИ

Використовуючи метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь за просторовими змінними та модифікований метод скінченних різниць за часом, можна ефективно розв'язувати динамічні задачі теорії пружності для тіл з тріщинами, на берегах яких діють різні (ударні, імпульсні та ін.) динамічні навантаження. На основі фундаментального розв'язку рівнянь Гельмгольца для плоских задач динамічної теорії тріщин побудовано такі інтегральні зображення хвильових потенціалів, що для заданих самозрівноважених навантажень на контурах тріщин інтегральні зображення напружень не містять гіперсингулярних інтегралів. Динамічні задачі для нескінченних тіл з криволінійними гладкими тріщинами зведено до послідовного розв'язування систем сингулярних інтегро-диференційних рівнянь відносно стрибків переміщень на берегах тріщин у кожний вузловий момент часу. Ефективність методу підтверджено числовими розрахунками КІН за різних динамічних навантажень на берегах тріщин. У часткових випадках ударних навантажень отримані результати порівняно з відомими, знайденими іншими методами.

*РЕЗЮМЕ.* Развѣт метод рѣшения двумерных динамических задач теории упругости для бесконечных тел с гладкими криволинейными трещинами, который сочетает модифицированный метод конечных разностей по времени и метод сингулярных интегро-дифференциальных уравнений по пространственным переменным. Построены интегральные изображения волновых потенциалов и на их основе первая краевая задача сведена к последовательному решению систем интегро-дифференциальных уравнений методом механических квадратур. Проанализированы зависимости рассчитанных динамических коэффициентов интенсивности напряжений от времени в вершинах прямолинейной трещины при разных ударных и импульсных нагрузках на ее берегах.

*SUMMARY.* A method for the solution of two-dimensional dynamic problems of the theory of elasticity for infinite bodies with smooth curvilinear cracks is developed. The approach is based on the combination of the modified finite-differential method with time and a singular integral-differential equations method for spatial variables. Integral representation of the wave potentials is constructed and the first boundary value problem is reduced to the sequential solution of the system of singular integral-differential equations. The numerical solutions of these equations are carried out by the quadrature technique. The time dependences of the calculated dynamic stress intensity factors at the tips of a rectilinear crack are analysed for some impact and pulse loads at the crack faces.

1. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.
2. *Sih G. C.* Mechanics of Fracture. 4: Elastodynamic Crack Problems. – Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977. – 352 p.
3. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
4. *Партон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. – 263 с.
5. *Dominguez J. and Alarcon E.* Elastodynamics, Progr. Boundary Elem. Meth. – London: Plymouth, 1981. – 1. – P. 213–257.

6. Кит Г. С., Побережный О. В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1992. – 216 с.
7. Freund L. B. Dynamic Fracture Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 564 p.
8. Ravi-Chandar K. Dynamic Fracture. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – 254 p.
9. Ирвин Дж. Особенности динамического разрушения // Механика. – М.: ВИНТИ, 1981. – № 25. – С. 9–22.
10. Борисковский В. Г., Партон В. З. Динамическая механика разрушения. Итоги науки и техники – М.: ВИНТИ, 1983. – 16. – 84 с.
11. Vrebbia C. A. Time dependent problems // Boundary Element Techn. in Computer-Aided. Engineering, Dordrecht e.a.: Martinus Nijhoff Publ. – 1984. – P. 261–292.
12. Ильина Г. В. Математическое моделирование процессов деформирования твердых тел при динамических воздействиях (обзор) – М.: ВИНТИ, 1987. – № 8617–B87. – 27 с.
13. Sih. G. C., Embley G. T., and Ravera R. S. Impact response of a finite crack in plane extension // Int. J. Solids and Struct. – 1972. – 8, № 7. – P. 977–993.
14. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под. ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 1016 с.
15. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
16. Angel Y. C. On the reduction of elastodynamic crack problems to singular integral equations // Int. J. Eng. Sci. – 1988. – 26, № 7. – P. 757–764.
17. Barra L. P. S. and Telles J. C. F. A hyper-singular numerical Green's function generation for BEM applied to dynamic SIF problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1999. – 23. – P. 77–87.
18. Chen W. and Tang R. Cauchy singular integral equation method for transient antiplane dynamic problems // Eng. Fract. Mech. – 1996. – 54, № 2. – P. 177–187.
19. Popov V. G. Interaction of a plane harmonic rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium // J. Appl. Math. Mech. – 1997. – 61, № 2. – P. 245–252.
20. Зозуля В. В. Интегралы типа Адамара в динамических задачах теории трещин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 2. – P. 19–22.
21. Мыхаськив В. В., Хай М. В. Решение динамических задач теории упругости для тел с трещинами посредством преобразования Фурье // Там же. – 1987. – № 11. – С. 27–30.
22. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems / J. Sladek, V. Sladek, V. V. Mykhas'kiv, and V. Z. Stankevych // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – 27. – P. 203–213.
23. Cole D. M., Kosloff D. D., and Minster J. B. A numerical boundary integral equation method for elastodynamics. I // Bull. Seismol. Soc. Am. – 1978. – 68, № 5. – P. 1331–1357.
24. Sladek J. and Sladek V. A boundary integral equation method for dynamic crack problems // Eng. Fract. Mech. – 1987. – 27, № 3. – P. 269–277.
25. Zhang Ch. and Savaidis A. Time-domain BEM for dynamic crack analysis // Math. Comput. Simul. – 1999. – 50. – P. 351–362.
26. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб: Наука, 1999. – 382 с.
27. Chen Y. M. Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a Lagrangian finite-difference method (the hemp code) // Eng. Fract. Mech. – 1975. – 7, № 4. – P. 653–660.
28. Chen Y. M. and Wilkins M. L. Stress analysis of crack problems with a three-dimensional, time dependent computer program // Int. J. Fract. – 1976. – 12, № 4. – P. 607–617.
29. Evseev E. G. and Morozov E. V. Explicit finite difference method in the dynamic analysis of composite structures // Compos. Struct. – 1997. – 39, № 3–4. – P. 215–221.
30. Peuser T. and Gross D. Stress intensity factors of plane dynamic problems // Fracture and Fatigue: Elasto-Plasticity. Thin Sheet and Micromech. Problems, Proc. 3<sup>rd</sup> Colloq. Fract. (ECF 3), Oxford e.a., 1980. – P. 461–473.
31. Саєрук М. П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – № 4. – С. 7–11.

- (Savruk M. P., New Method for the Solution of Dynamic Problems of the Theory of Elasticity and Fracture Mechanics // Materials Science. – 2003. – 39, № 4. – P. 465–471.)
32. Саврук М., Матвісієв О. Динамічна задача для тіла з тріщиною за антиплоскої деформації // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН України, 2004. – С. 255–260.
  33. Попов В. Г., Мойсєєнок О. П. Розв'язання динамічної антиплоскої задачі для тіла з включенням методом скінченних різниць за часом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 4. – С. 19–25.  
(Popov V. H. and Moiseenok O. P. Solution of a Dynamic Antiplane Problem for a Body with Inclusion by the Method of Finite Time Differences // Materials Science. – 2005. – 41, № 4. – P. 452–461.)
  34. Саврук М. П., Осів Я. П. Про покроковий алгоритм числового розв'язування динамічних задач механіки руйнування з допомогою методу скінченних різниць за часом // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. – Львів: ІППММ НАН України, 2008. – Т. 2. – С. 106–108.
  35. Саврук М., Онишко Л., Сенюк М. Про використання методу скінченних різниць за часом до розв'язування динамічної осесиметричної задачі для кругового кільця // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів: ІППММ НАН України, 2006. – Т. 2. – С. 144–146.
  36. Саврук М. П., Онишко Л. Й., Сенюк М. М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 1. – С. 7–14.  
(Savruk M. P., Onyshko L. I., and Senyuk M. M. A Plane Dynamic Axisymmetric Problem for a Hollow Cylinder // Materials Science. – 2008. – 44, № 1. – P. 1–9.)
  37. Онишко Л., Сенюк М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого двошарового циліндра // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. – Львів: ІППММ НАН України, 2008. – Т. 2. – С. 159–161.
  38. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
  39. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двухмерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
  40. Фильитинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Механика твердого тела – 1991. – № 4. – С. 119–127.
  41. Кравець В. С. Про поєднання методів сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь та скінченних різниць за часом у плоских динамічних задачах теорії тріщин // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка – Львів: ФМІ НАН України, 2009. – С. 289–294.
  42. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
  43. Фильитинский Л. А. Двумерные статические и динамические задачи теории упругости для тел с трещинами // Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. – М.: ВИНТИ, 1986. – С. 107–117.
  44. Фильитинский Л. А., Волкова Л. В. Динамическая задача теории упругости для области с криволинейными разрезами (плоская деформация) // Докл. АН СССР. – 1983. – 271, № 4. – С. 831–834.
  45. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Одержано 02.07.2009