

УДК 539.3

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ КУЛІ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ

Р. С. МУСІЙ

Національний університет "Львівська політехніка"

Сформульовано динамічну центрально-симетричну задачу термомеханіки для суцільної електропровідної кулі за однорідної нестационарної електромагнетної дії і запропоновано методику її розв'язування з використанням кубічної апроксимації азимутальної компоненти вектора напруженості магнетного поля та радіальної компоненти тензора напружень за радіальною координатою. Одержано розв'язок задачі і числово досліджено термонапружений стан кулі за дії електромагнетного імпульсу.

Ключові слова: зв'язана динамічна центрально-симетрична задача термомеханіки, електропровідна куля, нестационарна електромагнетна дія, електромагнетний імпульс.

Конструктивним елементом багатьох технічних пристроїв, які зазнають впливу різних фізичних дій, зокрема імпульсного електромагнетного поля (ЕМП), є металева куля. Імпульсне ЕМП зумовлює виникнення в кулі джерел джоулевого тепла Q і пондеромоторних сил \vec{F} , що створюють в ній нестационарні температурні поля і напруження, які за відповідних параметрів ЕМП можуть досягати суттєвих значень, аж до втрати несучої здатності кулі. Відома розрахункова схема визначення за цих умов термонапруженого стану електропровідних тіл [1, 2], на основі якої досліджено термомеханічну поведінку електропровідних пластин [3], циліндрів [4, 5] та порожнистої кулі [6]. Але не вивчено термонапружений стан суцільної кулі.

Нижче побудовано динамічну центрально-симетричну задачу термомеханіки для суцільної електропровідної кулі за однорідної нестационарної електромагнетної дії та досліджено її термомеханічну поведінку під впливом електромагнетного імпульсу (ЕМІ).

Постава та розрахункова схема задачі. Розглянемо електропровідну пружну кулю радіуса $r = R$, віднесена до сферичної системи координат (r, θ, φ) , початок якої збігається з центром кулі. Матеріал кулі однорідний, ізотропний і неферромагнетний, а його фізичні характеристики сталі. Куля знаходиться під дією нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти H_φ вектора напруженості магнетного поля $\vec{H} = \{0; H_\varphi(r, t); 0\}$ на її поверхні $r = R$. Нестационарне ЕМП зумовлює в кулі нестационарні джоулеві тепловиділення Q і пондеромоторні сили \vec{F} , які спричиняють нестационарні температуру T і компоненти тензора напружень $\sigma_{jj} (j = r, \varphi, \theta)$, що описують термонапружений стан кулі. Таким чином, розрахункова схема задачі складається з двох етапів. На першому з рівнянь Максвелла визначаємо вектор напруженості магнетного поля \vec{H} та відповідні йому питомі густини джоулевих тепловиділень Q і пондеромоторних сил \vec{F} . На другому етапі з рівнянь динамічної

задачі термопружності за отриманим розподілом джерел джоулевого тепла Q знаходимо температуру T та за відомими температурою і розподілом об'ємних пондеромоторних сил – термонапружений стан кулі.

Якщо ключові функції задачі залежать лише від радіальної координати r і часу t , за вихідну вибираємо систему рівнянь центрально-симетричної задачі термомеханіки для електропровідних куль [7, 8]. Тоді функцію H_φ визначає рівняння

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

за нульової початкової $H_\varphi(r, 0) = 0$ та крайової

$$H_\varphi(R, t) = H_{0\varphi}(t) \quad (2)$$

умов, де $H_{0\varphi}(t)$ – відома функція. Тут σ – коефіцієнт електропровідності; μ – магнетна проникливість матеріалу кулі. В центрі кулі $r = 0$ функції H_φ і $E_\theta =$

$= \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right)$, де E_θ – меридіанна компонента вектора напруженості елект-

ричного поля, задовольняють умови центральної симетрії електромагнетного поля ($H_\varphi(0, t) = 0, E_\theta(0, t) = 0$). Звідси отримуємо умови на функцію H_φ в центрі кулі:

$$H_\varphi(0, t) = 0, \quad \frac{\partial H_\varphi(0, t)}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Питомі густини джоулевих тепловиділень $Q(r, t)$ і пондеромоторної сили \vec{F} через функцію $H_\varphi(r, t)$ виразимо формулами [7]

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ F_r(r, t) = -\mu \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right) H_\varphi; 0; 0 \right\}. \quad (4)$$

Відповідно до чинників Q і \vec{F} температуру T і компоненти σ_{jj} ($j = r, \varphi, \theta$) тензора динамічних напружень подаємо у вигляді суми двох складників $T = T^Q + T^F$, $\sigma_{jj} = \sigma_{jj}^Q + \sigma_{jj}^F$, де T^Q , σ_{jj}^Q і T^F , σ_{jj}^F – складники, зумовлені відповідно джоулевим теплом і пондеромоторними силами.

Складники температури T^Q з урахуванням відомих експериментальних результатів про адіабатичність нагрівання електропровідного тіла імпульсним ЕМП [9–11] та напружень σ_{jj}^Q ($j = r, \varphi, \theta$) визначимо з рівнянь [8]

$$T^Q = \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t Q(r, t_0) dt_0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{rr}^Q = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{2}{r} \frac{\partial T^Q}{\partial r} + \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^Q}{\partial t^2} + \frac{4c_2^2}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^Q = \frac{4c_2^2}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^Q)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}^Q = \sigma_{\varphi\varphi}^Q \quad (5)$$

за початкових при $t = 0$

$$\sigma_{jj}^Q(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}^Q(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T^Q}{\partial t} \quad (j = r, \varphi) \quad (6)$$

(індекси, що повторюються, не є індексами підсумовування) і крайових

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^Q(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{rr}^Q(R, t) = 0 \quad (7)$$

умов. Тут c_1, c_2 – швидкості пружних хвиль розширення і формозміни; α, ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу кулі.

Компоненти σ_{jj}^F ($j = r, \varphi, \theta$) тензора динамічних напружень і температури T^F у припущенні адіабатичності деформування електропровідного тіла імпульсним ЕМП [9–11] визначають співвідношення [7, 8]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2 (1 + \varepsilon_*)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \sigma_{rr}^F = - \frac{2}{1 - \nu} \frac{F_r}{r} - \frac{\partial F_r}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^F}{\partial t^2} + \frac{4c_2^2}{1 - \nu} \cdot \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^F = \frac{2c_2^2}{1 - \nu} \cdot \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^F)}{\partial r} + \frac{F_r}{r} \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^F = \sigma_{\varphi\varphi}^F, \quad T^F = T_0 - \varepsilon_* \frac{1 - 2\nu}{\alpha E} \cdot \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{\sigma_{rr}^F + 2\sigma_{\varphi\varphi}^F}{1 + 3\varepsilon_*(1 - \nu)/(1 + \nu)} \quad (8)$$

за початкових

$$\sigma_{rr}^F(r, 0) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^F(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}^F(r, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^F(r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

і крайових

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^F(0, t)}{\partial r} = 0, \quad \sigma_{rr}^F(R, t) = 0 \quad (10)$$

умов.

Методика розв'язування крайових задач. Для побудови розв'язків крайових задач, які описують електромагнетне та температурне поля, а також компоненти напружень, ключові функції $\Phi(r, t) = \{H_\varphi, \sigma_{rr}^O, \sigma_{rr}^F\}$ шукаємо у вигляді кубічних поліномів [1, 2]

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=1}^4 a_{i-1}(t) r^{i-1}, \quad (11)$$

що є апроксимаційними поліномами найменшого степеня, які дають можливість точно задовольнити задані граничні значення функцій $\Phi(r, t)$.

Коефіцієнти апроксимаційних поліномів (11) визначаємо через задані граничні значення функцій $\Phi(r, t)$ на поверхні кулі $r = R$ та інтегральні характеристики $\Phi_s(t)$

$$\Phi_s(t) = \frac{s+1}{R^{s+1}} \int_0^R \Phi(r, t) r^{s+1} dr, \quad s = 1, 2 \quad (12)$$

цих функцій. В результаті отримуємо такі подання:

– азимутальної компоненти $H_\varphi(r_*, t)$ вектора \vec{H}

$$H_\varphi(r_*, t) = H_{\varphi 1}(t)(630r_*^2 - 1470r_*^3 + 840r_*^4) + H_{\varphi 2}(t)(-840r_*^2 + 2016r_*^3 - 1176r_*^4) + H_{\varphi 0}(t)(15r_*^2 - 42r_*^3 + 28r_*^4); \quad (13)$$

– радіальної компоненти $\sigma_{rr}^O(r_*, t)$ тензора напружень, викликаних джоулевым теплом

$$\sigma_{rr}^O(r_*, t) = \sigma_{rr1}^O(t)(20 - 100r_*^2 + 80r_*^3) + \sigma_{rr2}^O(t)(-30 + 180r_*^2 - 150r_*^3); \quad (14)$$

– радіальної компоненти $\sigma_{rr}^F(r_*, t)$ тензора напружень, зумовлених пондеромоторною силою

$$\sigma_{rr}^F(r_*, t) = \sigma_{rr1}^F(t)(20 - 100r_*^2 + 80r_*^3) + \sigma_{rr2}^F(t)(-30 + 180r_*^2 - 150r_*^3). \quad (15)$$

Тут $r_* = r/R$ – безрозмірна радіальна координата.

Для отримання рівнянь на інтегральні за радіальною координатою характеристики $\Phi_s(t)$ шуканих функцій $\Phi(r, t)$ рівняння (1), (5), (8) інтегруємо за радіальною координатою згідно з формулою (12), використовуючи під час перетворень подання (13)–(15). Тоді дістанемо такі системи співвідношень:

– для інтегральних характеристик $H_{\varphi s}(t)$ функції $H_{\varphi}(r_*, t)$

$$\frac{dH_{\varphi 1}}{dt} - \frac{210}{m_0} H_{\varphi 1} + \frac{392}{m_0} H_{\varphi 2} = \frac{-11}{m_0} H_{\varphi 0}, \quad \frac{dH_{\varphi 2}}{dt} + \frac{5924}{15m_0} H_{\varphi 1} - \frac{217}{m_0} H_{\varphi 2} = \frac{451}{30m_0} H_{\varphi 0}; \quad (16)$$

– для інтегральних характеристик $\sigma_{rrs}^O(t)$ функції $\sigma_{rr}^O(r_*, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{rr1}^O}{dt^2} + 20 \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr1}^O &= -\frac{c_1^2}{R^2} W_1^{T^O}(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{rr2}^O}{dt^2} - \frac{160}{3} \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr1}^O + 105 \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr2}^O &= -\frac{c_1^2}{R^2} W_2^{T^O}(t); \end{aligned} \quad (17)$$

– для інтегральних характеристик $\sigma_{rrs}^F(t)$ функції $\sigma_{rr}^F(r_*, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{rr1}^F}{dt^2} + 20 \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr1}^F &= -\frac{c_1^2}{R^2} W_1^F(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{rr2}^F}{dt^2} - \frac{160}{3} \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr1}^F + 105 \frac{c_1^2}{R^2} \sigma_{rr2}^F &= -\frac{c_1^2}{R^2} W_2^F(t); \end{aligned} \quad (18)$$

– для інтегральних характеристик $\sigma_{rrs}^{T^*}(t)$ радіальних напружень $\sigma_{rr}^{T^*}(r_*, t)$.

Задачі, що описують системи рівнянь (16)–(18), розв’язуємо за допомогою перетворення Лапласа, використовуючи задані початкові умови на функції $H_{\varphi}(r_*, t)$, $\sigma_{rr}^O(r_*, t)$, $\sigma_{rr}^F(r_*, t)$, які усереднюємо за радіальною координатою r_* згідно з формулою (12). Отримуємо такі вирази для інтегральних характеристик:

– азимутальної компоненти $H_{\varphi}(r_*, t)$ напруженості магнетного поля

$$\begin{aligned} H_{\varphi 1}(t) &= -\sum_{k=1}^2 \int_0^t H_{\varphi 0}(t-\tau) \frac{11/m_0[p_k + 5926/(15m_0)] + 88396/(15m_0^2)}{2p_k + 2774/(15m_0)} e^{p_k \tau} d\tau, \\ H_{\varphi 2}(t) &= \sum_{k=1}^2 \int_0^t H_{\varphi 0}(t-\tau) \frac{451/(30m_0)[p_k - 210/m_0] - 2387/m_0^2}{2p_k + 2774/(15m_0)} e^{p_k \tau} d\tau; \end{aligned} \quad (19)$$

– радіальних напружень $\sigma_{rr}^O(r_*, t)$, зумовлених джоулевым теплом

$$\begin{aligned} \sigma_{rr1}^O(t) &= -\frac{c_1^3}{R^3} \frac{1}{\sqrt{20}} \int_0^t W_1^{T^O}(t-\tau) \sin(\omega_1^* \tau) d\tau, \\ \sigma_{rr2}^O(t) &= -\frac{160}{3} \frac{c_1^4}{R^4} \sum_{k=1}^2 \int_0^t W_1^{T^O}(t-\tau) \frac{\sin(\omega_k^* \tau)}{2\omega_k^{*3} - 125\omega_k^* c_1^2 / R^2} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{105}} \frac{c_1^3}{R^3} \int_0^t W_2^{T^O}(t-\tau) \sin(\omega_2^* \tau) d\tau; \end{aligned} \quad (20)$$

– радіальних напружень $\sigma_{rr}^F(r_*, t)$, спричинених пондеромоторною силою

$$\sigma_{rr1}^F(t) = \frac{1}{\sqrt{20}} \frac{c_1^3}{R^3} \int_0^t [-W_1^F(t-\tau)] \sin(\omega_1^* \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr2}^F(t) = & -\frac{160}{3} \frac{c_1^4}{R^4} \sum_{k=1}^2 \int_0^t [W_1^F(t-\tau)] \frac{\sin(\omega_k^* \tau)}{2\omega_k^* - 125\omega_k^* c_1^2/R^2} d\tau + \\ & + \frac{1}{\sqrt{105}} \frac{c_1^3}{R^3} \int_0^t [W_2^F(t-\tau)] \sin(\omega_2^* \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут p_k – корені рівняння $p^2 + 2774/(15m_0)p + 2128 = 0$; $\omega_1^* = (\sqrt{20}c_1)/R$, $\omega_2^* = \sqrt{105}c_1/R$ – власні частоти товщинних коливань суцільної кулі.

Підставляючи у вирази (13)–(15) для ключових функцій подання (19)–(21) інтегральних характеристик цих функцій і використовуючи формули для азимутальних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^Q(r, t)$, зумовлених джоулевым теплом

$$\sigma_{\varphi\varphi}^Q(r, t) = r \sqrt{\frac{\rho(1-\nu)}{2E}} \int_0^t R^Q(r, t-\tau) \sin\left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2E}{\rho(1-\nu)}} \frac{\tau}{r}\right) d\tau, \quad (22)$$

і для азимутальних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^F(r, t)$, викликаних пондеромоторною силою

$$\sigma_{\varphi\varphi}^F(r, t) = r \sqrt{\frac{\rho(1-\nu)}{2E}} \int_0^t R^F(r, t-\tau) \sin\left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{2E}{\rho(1-\nu)}} \frac{\tau}{r}\right) d\tau, \quad (23)$$

де $R^Q(r, t) = \frac{E}{\rho(1-\nu)} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^Q}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^Q \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2}$,

$$R^F(r, t) = \frac{E}{\rho(1-\nu)} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^F}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr}^F + \frac{F_r}{r} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2},$$

отримуємо загальні розв'язки задачі для суцільної кулі.

Термонапружений стан електропровідної кулі за дії електромагнетного імпульсу. Нехай куля знаходиться під дією одиночного ЕМІ, який математично моделюємо функцією

$$H_0(t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \quad (24)$$

Тут k – нормувальний множник; H_0 – максимальне значення напруженості магнетного поля в імпульсі; β_1 і β_2 – параметри, що характеризують часи фронтів наростання і спадання імпульсу тривалістю t_i . В цьому випадку в умові (2) функція $H_{0\varphi}(t)$ дорівнює виразу (24). Тепер на основі загального розв'язку запишемо розв'язок задачі термомеханіки для електропровідної кулі за дії ЕМІ. Азимутальна компонента $H_{\varphi}(r^*, t)$ вектора \vec{H} у суцільній кулі набуде вигляду

$$H_{\varphi}(r^*, t) = kH_0 \sum_{k=1}^2 [e^{-\beta_1 t} (N_{1k} r^{*2} + N_{2k} r^{*3} + N_{3k} r^{*4}) - e^{-\beta_2 t} (N_{4k} r^{*2} + N_{5k} r^{*3} + N_{6k} r^{*4})]. \quad (25)$$

Тут

$$N_{1k} = (630\Phi_{1k} - 840\Phi_{2k})/(\beta_1 + p_k) + 15; N_{2k} = (2016\Phi_{2k} - 1470\Phi_{1k})/(\beta_1 + p_k) - 42;$$

$$N_{3k} = (840\Phi_{1k} - 1176\Phi_{2k})/(\beta_1 + p_k) + 28; N_{4k} = (630\Phi_{1k} - 840\Phi_{2k})/(\beta_2 + p_k) + 15;$$

$$N_{5k} = (2016\Phi_{2k} - 1470\Phi_{1k})/(\beta_2 + p_k) - 42; N_{6k} = (840\Phi_{1k} - 1176\Phi_{2k})/(\beta_2 + p_k) + 28;$$

$$\Phi_{1k} = \frac{11[p_k + 5924/(156m_0)]/m_0 + 88396/[(15m_0)^2]}{2p_k + 2774/(15m_0)};$$

$$\Phi_{2k} = \frac{451/(30m_0)[p_k - 210/m_0] - 2387/m_0^2}{2p_k + 2774/(15m_0)}.$$

Вирази для питомих густин джоулевих тепловиділень $Q(r^*, t)$ і радіальної компоненти $F_r(r^*, t)$ пондеромоторної сили будуть:

$$\frac{Q(r^*, t)}{H_0^2} = \frac{k^2}{\sigma_0 R^2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 [e^{-2\beta_1 t} R_{1kn}(r^*) - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} R_{2kn}(r^*) + e^{-\beta_2 t} R_{3kn}(r^*)], \quad (26)$$

$$\frac{F_r(r^*, t)}{H_0^2} = k^2 \frac{\mu}{R^2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 [e^{-2\beta_1 t} R_{4kn}(r^*) - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} R_{5kn}(r^*) + e^{-\beta_2 t} R_{6kn}(r^*)]. \quad (27)$$

Тут

$$\begin{aligned} R_{1kn}(r^*) &= Z_{1k}(r^*)Z_{1n}(r^*); \quad R_{2kn}(r^*) = Z_{1k}(r^*)Z_{2n}(r^*) + Z_{2k}(r^*)Z_{1n}(r^*); \\ R_{3kn}(r^*) &= Z_{2k}(r^*)Z_{2n}(r^*); \quad R_{4kn}(r^*) = Z_{1k}(r^*)Z_{3n}(r^*); \\ R_{5kn}(r^*) &= Z_{2k}(r^*)Z_{3n}(r^*) + Z_{1k}(r^*)Z_{4n}(r^*); \quad R_{6kn}(r^*) = Z_{2k}(r^*)Z_{4n}(r^*); \\ Z_{1k}(r^*) &= 3N_{1k}r^* + 4N_{2k}r^{*2} + 5N_{3k}r^{*3}; \quad Z_{2k}(r^*) = 3N_{4k}r^* + 4N_{5k}r^{*2} + 5N_{6k}r^{*3}; \\ Z_{3k}(r^*) &= N_{1k}r^{*2} + N_{2k}r^{*3} + N_{3k}r^{*4}; \quad Z_{4k}(r^*) = N_{4k}r^{*2} + N_{5k}r^{*3} + N_{6k}r^{*4}. \end{aligned}$$

Вирази $Z_{1n}(r^*) \div Z_{4n}(r^*)$ отримуємо з виразів $Z_{1k}(r^*) \div Z_{4k}(r^*)$ заміною k на n .

Складник температури $T^Q(r^*, t)$ запишемо так:

$$\frac{T^Q(r^*, t)}{H_0^2} = k^2 \frac{\kappa}{\sigma_0 \mu R^2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[\frac{1 - e^{-2\beta_1 t}}{2\beta_1} R_{1kn}(r^*) - \frac{1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}{\beta_1 + \beta_2} R_{2kn}(r^*) + \frac{1 - e^{-2\beta_2 t}}{2\beta_2} R_{3kn}(r^*) \right]. \quad (28)$$

Радіальні напруження $\sigma_{rr}^Q(r^*, t)$ у суцільній кулі визначають формули (14) і (20) за таких виразів функцій $W_s^{T^Q}(t)$ у (20):

$$\begin{aligned} \frac{W_s^{T^Q}(t)}{H_0^2} &= k^2 \frac{\kappa}{\sigma_0 \mu R^2} \cdot \frac{\alpha E}{1 - \nu} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left\{ (1 + \nu) \left[-2\beta_1 e^{-2\beta_1 t} M_{1kns} + 2(\beta_1 + \beta_2) e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} M_{2kns} - \right. \right. \\ &\left. \left. - 2\beta_2 e^{-2\beta_2 t} M_{3kns} \right] - \left[\frac{1 - e^{-2\beta_1 t}}{2\beta_1} M_{4kns} - \frac{1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t}}{\beta_1 + \beta_2} M_{5kns} + \frac{1 - e^{-2\beta_2 t}}{2\beta_2} M_{6kns} \right] \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

де $M_{pkns} = \int_0^1 R_{pkn}(r^*) r^{*s+1} dr^*$; $M_{(p+3)kns} = 2 \int_0^1 \frac{\partial R_{pkn}(r^*)}{\partial r^*} r^{*s} dr^*$, $p = \overline{1, 3}$; $s = \overline{1, 2}$.

Азимутальні динамічні напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^Q(r^*, t)$, за знайдених радіальних напружень $\sigma_{rr}^Q(r^*, t)$ і температури $T^Q(r^*, t)$, визначає формула (22).

Вирази для радіальних динамічних напружень $\sigma_{rr}^F(r^*, t)$ отримуємо на основі співвідношень (15) і (21) за таких подань функцій $W_s^F(t)$ у (21):

$$\begin{aligned} \frac{W_s^F(t)}{H_0^2} &= -k^2 \frac{\mu}{R} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[e^{-2\beta_1 t} \left(\frac{2}{1 - \nu} M_{7kns} + M_{10kns} \right) - \right. \\ &\left. - e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} \left(\frac{2}{1 - \nu} M_{8kns} + M_{11kns} \right) + e^{-2\beta_2 t} \left(\frac{2}{1 - \nu} M_{9kns} + M_{12kns} \right) \right], \end{aligned}$$

де $M_{(p+6)kns} = \int_0^1 R_{(p+3)kn}(r^*) r^{*s} dr^*$; $M_{(p+9)kns} = \int_0^1 \frac{\partial R_{(p+3)kn}(r^*)}{\partial r^*} r^{*s+1} dr^*$, $p = \overline{1, 3}$; $s = \overline{1, 2}$.

Азимутальні динамічні напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^F(r^*, t)$ за відомих радіальних напружень $\sigma_{rr}^F(r^*, t)$ визначає формула (23).

Числово аналізували неферромагнетну (мідну) кулю радіуса $R = 0,01$ м. Тривалість ЕМІ приймали рівною $t_i = 100$ μs [13], що відповідає значенням $\beta_1 = 69000$; $\beta_2 = 2\beta_1$; $\kappa = 4$.

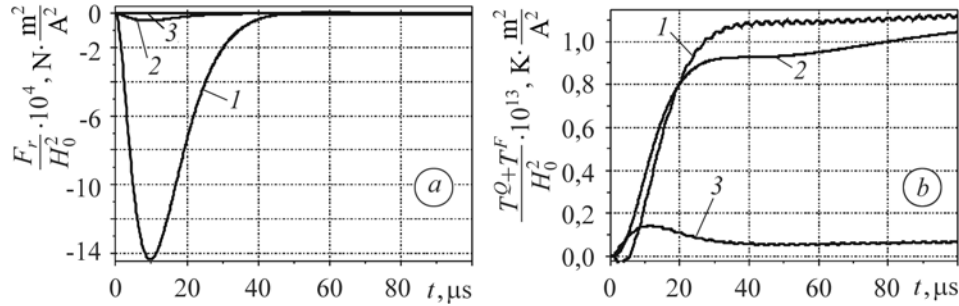


Рис. 1. Зміна в часі радіальної компоненти F_r , пондеромоторної сили (а) та сумарної температури $T = T^Q + T^F$ (b) за дії електромагнетного імпульсу тривалістю $t_i = 100$ μs .

Криві 1–3 відповідають значенням $r = R$; $0,75 R$; $0,5 R$.

Fig. 1. Change in time of the radial component, F_r , of ponderomotive force (a) and of summed up temperature, $T = T^Q + T^F$, (b) under influence of electromagnetic pulse of duration $t_i = 100$ μs . Curves 1–3 corresponds to values $r = R$; $0.75 R$; $0.5 R$.

Показано (рис. 1 і 2) зміну в часі компоненти F_r , пондеромоторної сили \vec{F} , сумарної температури $T = T^Q + T^F$, компонент напружень σ_{rr} і $\sigma_{\phi\phi}$ у мідній кулі. Пондеромоторна сила F_r має стискальний характер і досягає максимального значення на поверхні кулі за час $t = 0,1t_i$, а температура T – за час $t \geq 0,4t_i$. Максимальні значення складників T^F є нехтовні порівняно з такими для T^Q . Відповідно радіальні напруження σ_{rr}^F і σ_{rr}^Q є стискальні і однакового порядку величини. Азимутальні напруження $\sigma_{\phi\phi}^F$ є розтягальні, а напруження $\sigma_{\phi\phi}^Q$ стискальні. Відповідно сумарні напруження $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}^Q + \sigma_{\phi\phi}^F$ у початкові моменти часу $t < 0,2t_i$ розтягальні, а при $t > 0,2t_i$ стискальні.

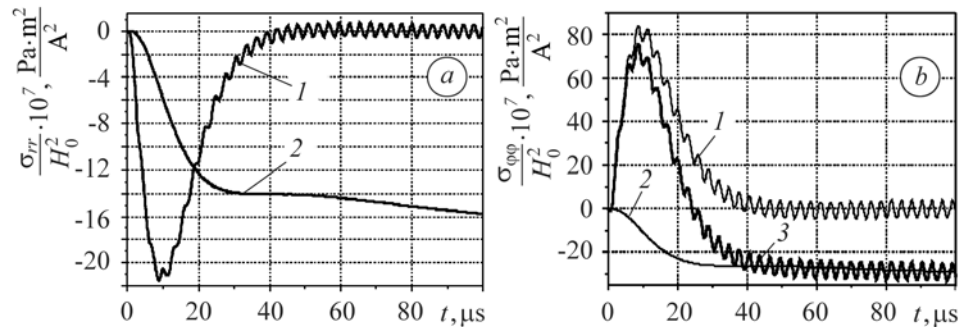


Рис. 2. Зміна в часі радіальних σ_{rr} (а) і азимутальних $\sigma_{\phi\phi}$ (b) напружень за дії електромагнетного імпульсу тривалістю $t_i = 100$ μs : 1 – напруження σ_{rr}^F ; 2 – напруження σ_{rr}^Q ; 3 – сумарні напруження $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}^F + \sigma_{\phi\phi}^Q$, обчислені при $r = R/2$, де вони максимальні.

Fig. 2. Change in time of radial, σ_{rr} , (a) and azimuth, $\sigma_{\phi\phi}$, (b) stresses under influence of electromagnetic pulse of duration $t_i = 100$ μs : 1 – stresses σ_{rr}^F ; 2 – stresses σ_{rr}^Q ;

3 – total stresses $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}^F + \sigma_{\phi\phi}^Q$, calculated at $r = R/2$, where they are maximum.

Максимальні розтягальні азимутальні напруження приблизно в 4 рази перевищують максимальні стискальні радіальні. За значеннями сумарних ази-

мутальних напружень можна оцінити інтенсивність напружень [12] в мідній кулі, яка досягає за вказаних параметрів ЕМІ межі пружної деформації, якщо $H_0 \geq 2 \cdot 10^6$ А/м, тобто коли мідна куля втрачає несучу здатність.

ВИСНОВКИ

Кубічною апроксимацією розподілів ключових функцій – азимутальної компоненти вектора напруженості магнетного поля та радіальної компоненти тензора динамічних напружень – вдалося початково-крайову центрально-симетричну задачу термомеханіки для електропровідної кулі звести до відповідних задач Коші на інтегральні характеристики цих функцій. З допомогою інтегрального перетворення Лапласа отримано розв'язок для довільної однорідної нестационарної електромагнетної дії. Записано розв'язок задачі за дії ЕМІ і проаналізовано термомеханічну поведінку мідної кулі та її несучу здатність за такого впливу.

РЕЗЮМЕ. Сформулировано динамическую центрально-симметрическую задачу термомеханики для сплошного электропроводного шара при однородном нестационарном электромагнитном воздействии и предложено методику ее решения с использованием кубической аппроксимации азимутальной компоненты вектора напряженности магнитного поля и радиальной компоненты тензора напряжений за радиальной координатой. Получено решение задачи и численно исследовано термонапряженное состояние шара при воздействии электромагнитного импульса.

SUMMARY. The dynamic central-symmetric problem of thermomechanics is formulated for a solid electroconductive sphere under the homogeneous non-stationary electromagnetic influence and its solution method has been proposed using cubic approximation of azimuth component of magnetic field stress and a radial component of a stress tensor by a radial coordinate. The solution is obtained and the thermal stress state of a sphere under the influence of electromagnetic pulse is numerically investigated.

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Задачі термомеханіки електропровідних оболонок за умов дії неусталених електромагнітних полів імпульсного типу // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 70–75.
2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 75–84.
3. Мусій Р. С. Термопружний стан електропровідної пластини під електромагнітними імпульсами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 6. – С. 7–14.
(Musii R. S. Thermal Stressed State of a Conducting Plate under the Action of Electromagnetic Pulses // Materials Science. – 2001. – 37, № 6. – P. 845–856.)
4. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Мельник Н. Б. Термомеханічна поведінка порожнистого електропровідного циліндра при імпульсній електромагнітній дії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 1. – С. 146–154.
5. Мусій Р. С. Термопружний стан електропровідного циліндра під дією поверхневих електромагнетних імпульсів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 2. – С. 45–52.
(Musii R. S. Thermoelastic State of a Conducting Cylinder under the Action of Surface Electromagnetic Pulses // Materials Science. – 2004. – 40, № 2. – P. 204–213.)
6. Гачкевич А. Р., Мусій Р. С., Стасюк Г. Б. Термомеханическое состояние полей электропроводной сферы при импульсном электромеханическом воздействии // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 9–17.
7. Мусій Р. С. Динамічна центрально-симетрична задача електромагнітопружності для електропровідної сфери // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Вип. 36. – С. 91–100.
8. Мусій Р. С. Формулювання крайових задач термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 5. – С. 126–127.
9. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. – М.: Мир, 1972. – 392 с.
10. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / Под ред. Ф. Херлаха. – М.: Мир, 1988. – 456 с.
11. Моон F. O. Problem in magneto-solid mechanics // Mechanics Today. – 1978. – 4. – P. 307–289.
12. Ионов В. Н., Озбиалов П. М. Напряжение в телах при импульсивном нагружении. – М.: Высш. шк., 1975. – 463 с.
13. Бельый И. В., Фертик С. М., Хищенко Л. Т. Справочник по магнито-импульсной обработке металлов. – Харьков: Высш. шк., 1977. – 168 с.

Одержано 12.10.2008