

УДК 539.3

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО З'ЄДНАННЯ З ТЕХНОЛОГІЧНИМ ОГРАНЕННЯМ КОНТУРІВ ДЕТАЛЕЙ

М. В. ЧЕРНЕЦЬ<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка;<sup>2</sup> Люблінський політехнічний інститут, Польща

Узагальнено розв'язок контактної задачі для циліндричного з'єднання, деталі якого мають різнотипне мале огранення контурів (овальність, тригранність, чотиригранність). Залежно від виду з'єднання за реалізації у ньому двообластевому контакту з використанням формули Кардано отримано для кожного випадку відповідне рівняння для визначення початкового кута співдотику. За результатами чисельного розв'язку задачі досліджено особливості впливу огранення співдотичних тіл на вид та параметри контакту.

**Ключові слова:** циліндричне з'єднання, огранення контурів, одно- та двообластевий співдотик, початковий кут співдотику, параметри контакту.

Методи розв'язку контактних задач для циліндричних з'єднань з тілами колового перерізу відомі (див. огляд у [3]). Однак у машинобудуванні неможливо забезпечити ідеально коловий переріз тіл обертання під час їх виготовлення. Неминуче утворюється технологічна некруглість – еліптичність, овальність, три- та чотиригранність тощо, яка суттєво впливає на параметри контакту. Вперше контактну задачу для тіл з малою еліптичністю розглянуто у працях [1, 3], а далі розвинено для тіл зі складним ограненням. Отримано низку розв'язків таких контактних задач [2–8] і досліджено вплив малого огранення на параметри контакту.

Нижче узагальнено метод на різні схеми з'єднань, де реалізується двообластевий контакт елементів.

**Формулювання контактної задачі.** В отворі пружної ізотропної пластини 1 розташовано пружний ізотропний диск 2. Отвір та диск мають малу некруглість  $\delta_k$  контурів, яка є значно менша від їх радіусів  $R_k$ , і розташовані так, що можливий двообластевий співдотик (рис. 1 і 2). У з'єднанні є радіальний зазор  $\varepsilon = R_1 - R_2 > 0$ . Огранення вважаємо регулярним, а його величини  $\delta_1 = R_1 - R'_1$  та  $\delta_2 = R'_2 - R_2$  (рис. 1).

За огранення спряжені контури стикаються під невідомим кутом  $2\lambda$ . Внаслідок прикладання до диска радіальної сили  $N$  утворюватимуться області контакту  $W_1 = W_2 = 2R_2\gamma$ , на яких діятимуть контактні напруження (тиски), значення і розподіл яких невідомі.

**Метод визначення кута  $2\lambda$  початкового співдотику.** Він полягає у застосуванні умови рівності кутових коефіцієнтів дотичної у спільній точці дотику обох контурів для формування рівняння для певного кутового параметра цієї точки.

*Схема 1 (рис. 1).* Параметричні рівняння для отвору з овальністю в системі координат  $x_1O_1y_1$

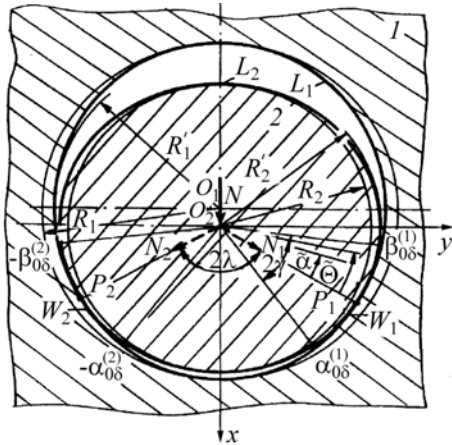


Рис. 1. З'єднання тіл з овалністю контурів.

Fig. 1. Conjunction of solids with contours ovality.

$$\begin{aligned} x_1 &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t, \\ y_1 &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\bar{a}_1 = 0,5(a_1 + b_1)$ ;  $\bar{b}_1 = 0,5(a_1 - b_1)$ ;  $a_1 = R_1$ ,  $b_1 = R_1' = R_1 - \delta_1$ ;  $2t$  – кут співдотику контурів у цій системі координат, а для диска

$$\begin{aligned} x_2 &= (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + \Delta, \\ y_2 &= (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\bar{a}_2 = 0,5(a_2 + b_2)$ ,  $\bar{b}_2 = 0,5(a_2 - b_2)$ ;  $a_2 = R_2' = R_2 + \delta_2$ ,  $b_2 = R_2$ ;  $\Delta = O_1O_2$  (рис. 1).

У точці (точках) співдотику  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ , тобто з урахуванням рівнянь (1), (2)  $(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + \Delta$ ,

$$(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda. \quad (3)$$

Кутові коефіцієнти дотичної в цій точці:

– до овалу (отвору)

$$K_1 = \frac{y_1'(t)}{x_1'(t)} = \frac{-2\bar{b}_1 \sin 2t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t}{-2\bar{b}_1 \sin 2t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t};$$

– до овалу (диска)

$$K_2 = \frac{y_2'(\lambda)}{x_2'(\lambda)} = \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}.$$

Оскільки параметр  $K_1$  у точці співдотику повинен дорівнювати  $K_2$ , то умову співдотику запишемо так:

$$\frac{-2\bar{b}_1 \sin 2t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t}{-2\bar{b}_1 \sin 2t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t} = \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}. \quad (4)$$

Рівняння (3) та (4) утворюють систему для знаходження величин  $t$  і  $\lambda$ :

$$\begin{cases} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t, \\ \frac{-2\bar{b}_1 \sin 2t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t}{-2\bar{b}_1 \sin 2t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t} = \\ = \frac{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda}{2\bar{b}_2 \sin 2\lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda}. \end{cases} \quad (5)$$

З першого рівняння (5)  $\bar{a}_2 \sin \lambda - \bar{b}_2 (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \sin \lambda = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t$ .

Звідси отримали кубічне рівняння для  $\lambda$ :

$$\sin^3 \lambda + \frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{2\bar{b}_2} \sin \lambda - \frac{1}{2\bar{b}_2} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t = 0. \quad (6)$$

Його розв'язок одержимо за формулою Кардано

$$\sin \lambda = S(t) = X(t) - \frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{6\bar{b}_2 X(t)}, \quad (7)$$

де 
$$X(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{4b_2}(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t + \frac{1}{4b_2} \sqrt{(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t)^2 \sin^2 t + \frac{2}{b_2} \left( \frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{3} \right)^3}}$$
.

З першого рівняння системи (5) визначимо  $\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda$  та підставимо його у друге її рівняння, а в отриманий вираз  $-\sin \lambda$  з (7). Тоді

$$\frac{-2\bar{b}_1 \sin 2t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t}{-2\bar{b}_1 \sin 2t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t} = \frac{4\bar{b}_2 S^3 \sqrt{1-S^2} + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sqrt{1-S^2}}{4\bar{b}_2 S^2 [(1-S^2)] - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t}.$$

Після перетворень отримаємо рівняння для встановлення параметра  $t$ , що визначає точку співдотику контурів у системі координат  $x_1 O_1 y_1$ :

$$f(t) = \sqrt{1-S^2} [4\bar{b}_2 S^3 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t] [2\bar{b}_1 \sin 2t \cos t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t] - (8) \\ - S [4\bar{b}_2 S (1-S^2) - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t] [2\bar{b}_1 \sin 2t \sin t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t] = 0.$$

Для визначення  $S = S(t)$  це рівняння розв'язуємо наближено. Кут початкового співдотику  $\lambda = \arcsin S(t)$ . Координати точки співдотику у системі  $x_1 O_1 y_1$  такі:  $x_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t$ ,  $y_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t$ . Переміщення  $\Delta$  точки  $O_2$  до співдотику диска з отвором визначаємо за формулою

$$\Delta = [(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda].$$

Схема 2 (рис. 2а). Параметричні рівняння контурів

$$x_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 3t) \cos t, \quad y_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 3t) \sin t,$$

$$x_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + \Delta, \quad y_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda.$$

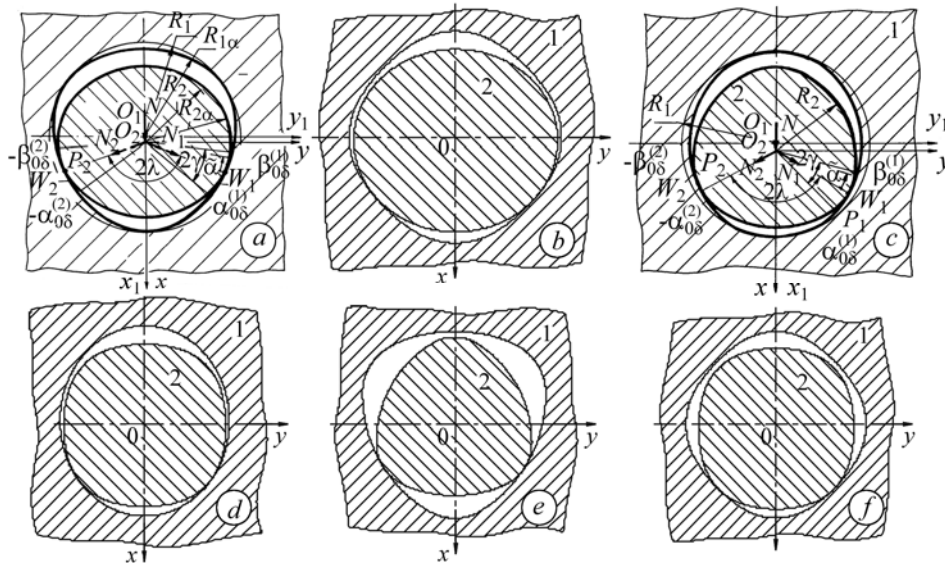


Рис. 2. З'єднання диск з овальністю–отвір з три- (а) та чотиригранністю (b); диск з тригранністю–отвір з овальністю (c); диск з чотиригранністю–отвір з овальністю (d); диск з тригранністю–отвір з тригранністю (e); диск з чотиригранністю–отвір з чотиригранністю (f).

Fig. 2. Conjunction of a disc with ovality– urvilinear trihedral (a) and tetrahedral hole (b); curvilinear trihedral disc–a hole with ovality (c); tetrahedral disc–a hole with ovality (d); curvilinear trihedral disc–a trihedral hole (e); curvilinear tetrahedral disc–a trihedral hole (f).

Схема 3 (рис. 2b). Параметричні рівняння контурів

$$x_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 4t) \cos t, \quad y_1 = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos 4t) \sin t,$$

$$x_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \cos \lambda + \Delta, \quad y_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 2\lambda) \sin \lambda.$$

Процедура отримання функції  $f(t)$  така ж, як і вище. Її узагальнений вигляд залежно від виду огранення буде:

$$f(t) = \sqrt{1 - S^2} [4\bar{b}_2 S^3 + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t] [\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t] - \\ - S[4\bar{b}_2 S(1 - S^2) - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t] [\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t] = 0,$$

де  $\omega = 2, 3, 4, \dots$  – коефіцієнт огранення контуру (овальність, тригранність і т. д.),

$$X(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{4\bar{b}_2} (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t + \frac{1}{4\bar{b}_2} \sqrt{(\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t)^2 \sin^2 t + \frac{2}{\bar{b}_2} \left(\frac{\bar{a}_2 - \bar{b}_2}{3}\right)^3}}.$$

Схема 4 (рис. 2с). Параметричні рівняння контурів

$$x_1 = (\bar{a}_1 - \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t, \quad y_1 = (\bar{a}_1 - \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t,$$

$$x_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 3\lambda) \cos \lambda + \Delta, \quad y_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 3\lambda) \sin \lambda.$$

Кубічне рівняння для визначення кута  $t$  має вигляд

$$\sin^3 t + \frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{2\bar{b}_1} \sin t + \frac{1}{2\bar{b}_1} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 3\lambda) \sin \lambda = 0.$$

Схема 5 (рис. 2d). Параметричні рівняння контурів

$$x_1 = (\bar{a}_1 - \bar{b}_1 \cos 2t) \cos t, \quad y_1 = (\bar{a}_1 - \bar{b}_1 \cos 2t) \sin t,$$

$$x_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 4\lambda) \cos \lambda + \Delta, \quad y_2 = (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 4\lambda) \sin \lambda.$$

Кубічне рівняння для визначення кута  $t$  таке:

$$\sin^3 t + \frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{2\bar{b}_1} \sin t + \frac{1}{2\bar{b}_1} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos 4\lambda) \sin \lambda = 0.$$

Оскільки дискримінант

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{16\bar{b}_1^2} \left[ (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda)^2 \sin^2 \lambda - \frac{2}{\bar{b}_1} \left(\frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{2}\right)^3 \right]$$

цих кубічних рівнянь менший нуля, то формулу Кардано у вигляді (7) для визначення кута  $t$  застосовувати не можна. Рівняння має три дійсні і різні розв'язки:

$$\sin t_1 = S_1(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{6\bar{b}_1}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3\bar{b}_1} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda}{\sqrt{2(\bar{a}_1 + \bar{b}_1)^3}} \right) \right], \\ \sin t_2 = S_2(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{6\bar{b}_1}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3\bar{b}_1} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda}{\sqrt{2(\bar{a}_1 + \bar{b}_1)^3}} \right) + \frac{2}{3} \pi \right], \quad (9) \\ \sin t_3 = S_3(\lambda) = 2\sqrt{\frac{\bar{a}_1 + \bar{b}_1}{6\bar{b}_1}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3\bar{b}_1} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda}{\sqrt{2(\bar{a}_1 + \bar{b}_1)^3}} \right) - \frac{2}{3} \pi \right].$$

Послідовність отримання функції  $f(\lambda)$  є така, як подано вище. Її узагальнений вигляд для цих схем з'єднань буде:

$$f(\lambda) = -\sqrt{1 - S^2} [4\bar{b}_1 S^3 - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda] [\omega \bar{b}_2 \sin \omega \lambda \cos \lambda -$$

$$-(\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda] - S[4\bar{b}_1 S(1 - S^2) - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda] \times \quad (10)$$

$$\times [\omega \bar{b}_2 \sin \omega \lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \cos \lambda] = 0.$$

Розв'язавши наближено рівняння (9), знаходимо кут  $\lambda$  з урахуванням найбільш відповідного з трьох коренів.

У розглянутих схемах з'єднань диск 2 або ж отвір 1 мають овальність і початковий кут співдотуку  $\lambda$  встановлюємо, використовуючи формули Кардано. Однак можливе з'єднання тіл зі складним обмеженням контурів (рис. 2e, f). Тоді формулу Кардано не можна вжити ні у вигляді (7), ні у вигляді (9). Для схем 6 (рис. 2e) та 7 (рис. 2f) кутові параметри  $t$  і  $\lambda$  визначаємо, застосовуючи систему рівнянь типу (5), яку розв'язуємо наближено:

$$\begin{cases} (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega t) \sin \lambda = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega \lambda) \sin \lambda, \\ \frac{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \sin t + (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \cos t}{-\omega \bar{b}_1 \sin \omega t \cos t - (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 \cos \omega t) \sin t} = \\ = \frac{\omega \bar{b}_2 \sin \omega \lambda \sin \lambda + (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \cos \lambda}{\omega \bar{b}_2 \sin \omega \lambda \cos \lambda - (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \cos \omega \lambda) \sin \lambda}. \end{cases} \quad (11)$$

**Встановлення контактних тисків.** Загальний вигляд рівняння для визначення тиску за двообластевого контакту такої [4]:

$$k_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\theta}}{2} p'(\tilde{\alpha}, \delta) d\tilde{\theta} - k_3 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(\tilde{\alpha}, \delta) d\tilde{\alpha} - k_4 \cos \tilde{\alpha} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(\tilde{\alpha}, \delta) \cos \tilde{\alpha} d\tilde{\alpha} = \quad (12)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{R^2} \left[ 1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1^{(\omega)}(\alpha) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2^{(\omega)}(\alpha) \right],$$

$$\tilde{\alpha} = \lambda + \alpha, \quad \tilde{\theta} = \lambda + \theta, \quad 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\theta}, \quad 0 \leq \tilde{\theta} \leq \gamma, \quad \gamma_1 \leq \tilde{\alpha} \leq \gamma_2, \quad \gamma_{1,2} = \lambda \pm 0,5(\beta_{0\delta}^{(1)} - \alpha_{0\delta}^{(1)});$$

$$k_1 = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1 + \kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1 + \kappa_2}{G_2 R_2} \right), \quad k_3 = \frac{1 + \kappa_1}{8\pi G_1 R_1}, \quad k_4 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\kappa_1}{G_1 R_1} + \frac{1}{G_2 R_2} \right), \quad \kappa = 3 - 4\mu; \quad R = R_2;$$

$G, \mu$  – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалів.

Характеристики обмеження контурів  $D_1^{(\omega)}(\alpha), D_2^{(\omega)}(\alpha)$  для розглядуваних з'єднань будуть [4]:  $D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$  (рис. 1);  $D_1^{(3)} = 1 + 8 \cos 3\alpha$ ,  $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$  (рис. 2a);  $D_1^{(4)} = 1 + 15 \cos 4\alpha$ ,  $D_2^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$  (рис. 2b);  $D_1^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ ,  $D_2^{(3)} = 1 + 8 \cos 3\alpha$  (рис. 2c);  $D_1^{(2)} = 1 + 3 \cos 2\alpha$ ,  $D_2^{(4)} = 1 + 15 \cos 4\alpha$  (рис. 2d);  $D_1^{(3)} = D_2^{(3)} = 1 + 8 \cos 3\alpha$  (рис. 2e);  $D_1^{(4)} = D_2^{(4)} = 1 + 15 \cos 4\alpha$  (рис. 2f).

Для наближеного розв'язку рівняння (12) контактної задачі застосовуємо метод колокації [1, 3]. Найпростіше взяти одну точку колокації  $\tilde{\alpha} = 0,5\gamma$  і функцію контактного тиску вибрати у вигляді

$$p(\tilde{\alpha}, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\tilde{\alpha} - \lambda}{2}},$$

де  $E_\delta = e_4 \cos^2(\gamma/4)/R_2$ ;  $\varepsilon_\delta = \varepsilon \Sigma_\delta$ ;  $\Sigma_\delta = 1 - \frac{\delta_1}{2\varepsilon} D_1(\alpha) - \frac{\delta_2}{2\varepsilon} D_2(\alpha)$ ;  $\alpha = \lambda$ ;  $e_4 = 4E_1 E_2 / Z$ ;  $Z = (1 + \kappa_1)(1 + \mu_1)E_2 + (1 + \kappa_2)(1 + \mu_2)E_1$ ,  $E_1, E_2 = 2G/(1 + \mu)$  – модулі пружності матеріалів.

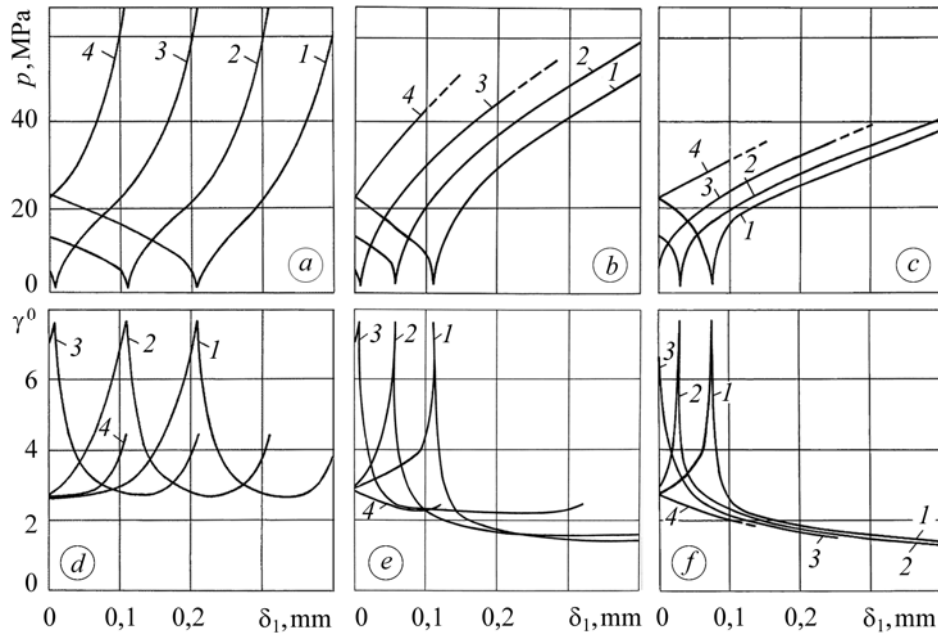


Рис. 3. Вплив огранення елементів з'єднань на максимальні контактні тиски (а – схема 1; б – схеми 2 і 4; с – схеми 3 і 5) та півкути контакту (d – схема 1; e – схеми 2 і 4; f – схеми 3 і 5); крива 1 –  $\delta_2 = 0$ ; 2 – 0,1 мм; 3 – 0,2; 4 – 0,3 мм.

Fig. 3. Influence of conjunctions elements faceting on maximum contact pressures (a – scheme 1; b – schemes 2 and 4; c – schemes 3 and 5) and on the size of half-angles contact (d – scheme 1; e – schemes 2 and 4; f – schemes 3 and 5); curve 1 –  $\delta_2 = 0$ ; 2 – 0.1 mm; 3 – 0.2; 4 – 0.3 mm.

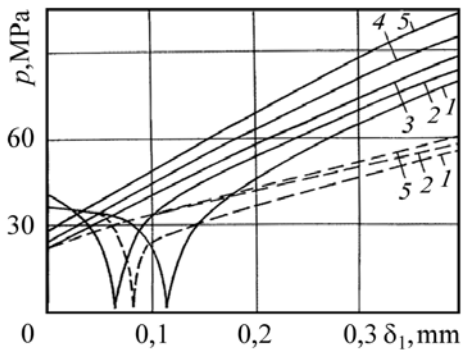


Рис. 4. Вплив огранення елементів з'єднань на максимальні контактні тиски: суцільні лінії – схема 6; штрихові – схема 7; крива 5 –  $\delta_2 = 0,4$  мм. (Позначення див. рис. 3).

Fig. 4. Influence of conjunctions elements faceting on maximum contact pressures: solid lines – scheme 6; dashed – scheme 7; curve 5 –  $\delta_2 = 0.4$  mm. (Designations in Fig. 3).

Результати розв'язку задачі визначення максимальних контактних тисків та півкутів контакту для схем 1–5 подані для  $R = 50$  мм на рис. 3 і 4.

Отже, двообластевий контакт реалізується лише для певних значень  $\delta_1$  і  $\delta_2$  (криві 3 на рис. 3a, b; криві 2, 3 на рис. 3c). В інших випадках буде одно-

Максимальний контактний тиск виникає у двох точках  $P_1$  і  $P_2$  (рис. 1), розташованих під кутом  $2\lambda$ ,

$$p(\lambda, \delta) \approx E_\delta \varepsilon_\delta \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Невідомий півкут контакту  $\gamma$  обчислюємо з урахуванням функції  $p(\lambda, \gamma)$  з умови рівноваги сил, прикладених до диска:

$$N_1 = N_2 = 4\pi R_2 E_\delta \varepsilon_\delta \sin^2 \frac{\gamma}{4}, \quad (13)$$

де  $N_1 = N_2 = N/2\cos\lambda$ ; для однообластєвого контакту, коли  $2\lambda = 0$ , у (13) приймають силу  $N$ .

#### Чисельний розв'язок задачі.

Прийнято такі вихідні дані:  $N = 10^5$  N;  $R = 50; 100$  mm;  $\varepsilon = 0,41$  mm;  $\delta_1 = (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$  mm,  $\delta_2 = (0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$  mm;  $\delta_1 + \delta_2 \leq \varepsilon$ ;  $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5$  MPa;  $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$ ;  $R_1 = R_2 + \varepsilon$ .

двообластевий контакт: спадні вітки – однообластевий, зростальні – двообластевий. Мінімальне значення тиску розраховують за формулою [3]  $p_{\min} = 0,6 N/R$ .

Для схем 6, 7 максимальні контактні тиски наведено на рис. 4.

### ВИСНОВКИ

Результати розв'язку контактної задачі для прийнятих схем з'єднань свідчать про ефективність запропонованого методу обчислення початкового кута співдотику огранених контурів з використанням формули Кардано. Огранення контурів співдотичних тіл суттєво впливає на рівень максимальних тисків та їх розподіл. Залежно від величин огранення  $\delta_1$  та  $\delta_2$  контурів виникатиме однообластевий (спадні вітки кривих) чи двообластевий симетричний (зростальні) контакт. Для обох груп з'єднань тіл з різнотипним ограненням (рис. 2a–c та b–d) величини  $p(\lambda, \delta)$  та  $\gamma$  є близькі, а незначна відмінність лише в зонах однообластєвого співдотику (спадні вітки). Існує мінімальне значення контактних тисків, яке не залежить від збурень  $\delta_1$  і  $\delta_2$ . Із зростанням складності огранення одного з елементів у комбінованих з'єднаннях контактні тиски у зонах двообластєвого співдотику знижуються. Области існування однообластєвого співдотику звужуються із зростанням порядку огранення. Для схем з'єднань зі складним однотипним ограненням (рис. 2e, f) закономірності зміни максимальних контактних тисків подібні як і для з'єднань з різнотипним складним ограненням. Однак тоді суттєво звужуються діапазони зміни  $p$  зі зміною  $\delta_1$  за  $\delta_2 = \text{const}$ .

*РЕЗЮМЕ.* Обобщено решение контактной задачи для цилиндрического соединения, детали которого имеют разнотипную малую огранку контуров (овальность, трехгранность, четырехгранность). В зависимости от вида соединения при реализации в нем двухобластєвого контакта с использованием формулы Кардано получены для каждого случая уравнения для определения начального угла соприкосновения. По результатам численного решения задачи исследованы особенности влияния огранки соприкасающихся тел на вид и параметры контакта.

*SUMMARY.* Solution of the contact problem for a cylindrical joint, which elements have components with various small faceting of contours (ovality, trihedral, tetrahedral) is generalized. Depending on the joint type when two-area contact is realized, using Cardano formula, equations have been obtained for each case of the initial contact angle determination. According to the results of numerical problem solution the peculiarities of the influence of contact solids faceting on the type and contact parameters are investigated.

1. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Чернець М. В. Контактные давления в цилиндрических телах, контуры которых близки к окружности // Докл. АН УССР. – 1981. – № 5, сер. А. – С. 56–59.
2. Чернець М. В. О решении контактной задачи для цилиндрических тел огранной конфигурации при их внутреннем соприкосновении // Проблемы прочности. – 1987. – № 6. – С. 103–106.
3. Андрейкив А. Е., Чернець М. В. Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
4. Чернець М., Пашичко М., Невчас А. Методи прогнозування та підвищення зносостійкості триботехнічних систем ковзання. – Дрогобич: КОЛО, 2001. – 1. – 492 с.
5. Чернець М. Узагальнений метод дослідження контактної взаємодії циліндричних спряжень, контури елементів яких мають малу некруглість // Проблеми трибології. – 2000. – № 2. – С. 97–113.
6. Чернець М., Лебедева Н. Оцінка впливу малої овальності вала на характеристики контактної взаємодії у підшипнику ковзання // Там же. – 2005. – № 1. – С. 167–170.
7. Чернець М. В., Лебедева Н. М. Оцінка трибоконтактної взаємодії у підшипнику ковзання з малим ограненням елементів // Машинознавство. – 2005. – № 7. – С. 38–41.
8. Оцінка параметрів контакту у циліндричних з'єднаннях з малим ограненням контурів їх елементів / М. Чернець, Р. Луцишин, Н. Лебедева, В. Жидик // Проблеми трибології. – 2007. – № 4. – С. 86–89.

Одержано 26.08.2009