УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Точечные косизигии системы полиномов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Летичевским)

A point cosyzygy has a 0-dimensional support analogously to a point distribution.

В настоящей работе будем использовать определения и обозначения [1–5].

Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$. Обозначим $\mathbf{R}[x]_* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}[x], \mathbf{R})$ — множество линейных над $\mathbf{R}$ отображений $\mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}$, такие отображения называются функционалами. В работах [1, 2] было введено понятие корневого функционала, обобщающее понятие корня на случай кратных корней. Корневым функционалом называется функционал, аннулирующий идеал полиномов $f(x)$. Простому корню $x \equiv \lambda \in \mathbf{R}^n$ соответствует функционал $\mathbf{1}_x(\lambda)\colon H(x) \mapsto H(\lambda)$, он аннулирует идеал полиномов $(x - \lambda) = (x_1 - \lambda_1, \ldots, x_n - \lambda_n)$. Кратному корню $x \equiv \lambda$ соответствуют функционалы, аннулирующие некоторую степень идеала полиномов $(x - \lambda)$, такие функционалы назовем локальными в точке $x \equiv \lambda$. Сумма локальных функционалов является точечным распределением. Точечное распределение аннулирует идеал $(F(x))_x$, где $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_t(x))$ — некоторые полиномы из $\mathbf{R}[x]$ такие, что $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Функционалы, удовлетворяющие последнему условию, назовем точечными. Если $\mathbf{R}$ является алгебраически замкнутым полем, то любой точечный функционал является суммой локальных функционалов. Функционалы являются бесконечно компонентными объектами, но из работ [6–8] видно, что точечный функционал полностью задается конечной его частью, т. е. действием на полиномы ограниченной степени.

В работе [3] были обобщены результаты работ [1, 2] на весь комплекс Кошуля, при этом элементы дуального комплекса Кошуля есть линейные функционалы на комплексе Кошуля, т. е. линейные над $\mathbf{R}$ отображения его в $\mathbf{R}$. Поэтому аналогично введено понятие точечного элемента дуального комплекса Кошуля.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $\mathcal{M}$ — модуль над $\mathbf{R}[x]$ конечно порожденный как модуль над $\mathbf{R}$. Пусть $h(x)$ — полином из $\mathbf{R}[x]$, h — переменная. Тогда:*

1) существует унитарный полином $T(h) \in \mathbf{R}[h]$ такой, что $\mathcal{M} \cdot T(h(x)) = \{0\}$;

2) существует система полиномов $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ из $\mathbf{R}[x]$ такая, что имеет место $\mathcal{M} \cdot (F(x))_x = \{0\}$ и $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$.

Доказательство 1. Пусть $M = (M_1, \ldots, M_D)$ — вектор образующих $\mathcal{M}$ как модуля над $\mathbf{R}$. Тогда $M_p \cdot h(x) = \sum\limits_q M_q \cdot A_p^q$ для $p = 1, D$, где $A_p^q \in \mathbf{R}$ для $p = 1, D$ и $q = 1, D$. Следовательно, имеет место $\sum\limits_q M_q \cdot (A_p^q - E_p^q \cdot h(x)) = 0$; где E — единичная матрица размера $D \times D$, т. е. такая, что $E_p^q = 1$, если $p = q$; $E_p^q = 0$, если $p \neq q$. Тогда $M \cdot \det(A - E \cdot h(x)) = M \cdot E \cdot \det(A - E \cdot h(x)) = M \cdot (A - E \cdot h(x)) \cdot (A - E \cdot h(x))^{\perp} = 0$, так как $M \cdot (A - E \cdot h(x)) = 0$; здесь для матрицы $C = \|C_p^q\|_{p=1,D}^{q=1,D}$, $C^{\perp}$ обозначает присоединенную матрицу $\|(C^{\perp})_q^p\|_{q=1,D}^{p=1,D}$, где $(C^{\perp})^p_q = (-1)^{p+q} \cdot \det \|C^{q'}_{p'}\|^{q'=1,D\&q'\neq q}_{p'=1,D\&p'\neq p}$. Пусть $T(h) = \det(A - E \cdot h)$, это унитарный, т. е. с коэффициентом 1 при старшей степени переменной, полином степени D из $\mathbf{R}[h]$, тогда $M_p \cdot T(h(x)) = 0$, следовательно, $\mathcal{M} \cdot T(h(x)) = \{0\}$, поскольку $\{M_p | p = 1, D\}$ порождают $\mathcal{M}$ как модуль над $\mathbf{R}$. (См. также [9, с. 32]).

Доказательство 2. В силу *1* леммы для полинома $h_j(x) = x_j$ существует унитарный полином $T_j(h_j)$ степени D такой, что $\mathcal{M} \cdot T_j(h_j(x)) = \{0\}$. Положим $F_j(x) = T_j(h_j(x)) = T_j(x_j)$, тогда $\mathcal{M} \cdot F_j(x) = \{0\}$, следовательно, $\mathcal{M} \cdot (F(x))_x = \{0\}$. При этом $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$, так как конечное множество $\{x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \mid \forall i = 1, n \colon 0 \leqslant \alpha_i \leqslant D - 1\}$ порождает $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ как модуль над $\mathbf{R}$.

Определение 1. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $\mathcal{M}$ — модуль над $\mathbf{R}[x]$.

$\mathcal{M}'$ называется точечным подмодулем модуля $\mathcal{M}$, если $\mathcal{M}'$ является подмодулем модуля $\mathcal{M}$ и является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$.

Элемент M из $\mathcal{M}$ назовем точечным, если $M \in \mathcal{M}'$, где $\mathcal{M}'$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{M}$. Обозначим $\mathcal{M}^{\bullet}$ множество всех точечных элементов из $\mathcal{M}$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $\mathcal{M}$ *— модуль над* $\mathbf{R}[x]$.

1) Пусть $\mathcal{M}'$ *и* $\mathcal{M}''$ *— точечные подмодули модуля* $\mathcal{M}$*, тогда* $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$ *является точечным подмодулем модуля* $\mathcal{M}$.

2) Пусть M' *и* M'' *— точечные элементы модуля* $\mathcal{M}$*, тогда* $M' + M''$ *и* $M' - M''$ *являются точечными элементами модуля* $\mathcal{M}$.

3) Пусть M *— точечный элемент модуля* $\mathcal{M}$*,* $F(x) \in \mathbf{R}[x]$*, тогда* $M \cdot F(x)$ *является точечным элементом модуля* $\mathcal{M}$.

4) $\mathcal{M}^{\bullet}$ *является подмодулем модуля* $\mathcal{M}$.

Доказательство 1. Так как $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ — точечные подмодули модуля $\mathcal{M}$, то являются подмодулями модуля $\mathcal{M}$ и являются конечно порождеными как модули над $\mathbf{R}$. Из первого утверждения следует, что $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$ является подмодулем модуля $\mathcal{M}$; из второго утверждения следует, что $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Следовательно, $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{M}$.

Доказательство 2. Так как M' и M'' — точечные элементы модуля $\mathcal{M}$, то $M' \in \mathcal{M}'$ и $M'' \in \mathcal{M}''$, где $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$ — точечные подмодули модуля $\mathcal{M}$. Тогда в силу *1* леммы $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{M}$. Так как $M' + M''$ и $M' - M''$ принадлежат $\mathcal{M}' + \mathcal{M}''$, то являются точечными элементами модуля $\mathcal{M}$.

Доказательство 3. Так как M — точечный элемент модуля $\mathcal{M}$, то $M \in \mathcal{M}'$, где $\mathcal{M}'$ — точечный подмодуль модуля $\mathcal{M}$, тогда $M \cdot F(x) \in \mathcal{M}'$, так как $\mathcal{M}'$ является подмодулем модуля $\mathcal{M}$, который является модулем над $\mathbf{R}[x]$. Следовательно, $M \cdot F(x)$ является точечным элементом модуля $\mathcal{M}$.

Доказательство 4. Утверждение следует из *2* и *3* леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $\mathcal{M}$ *— модуль над* $\mathbf{R}[x]$.

Элемент $M \in \mathcal{M}$ *является точечным тогда и только тогда, когда существуют полиномы* $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_t(x))$ *из* $\mathbf{R}[x]$ *такие, что* $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ *является конечно порожденным как модуль над* $\mathbf{R}$ *и имеет место* $M \cdot (F(x))_x = \{0\}$.

Доказательство 1. Пусть $M \cdot (F(x))_x = \{0\}$, и $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Пусть $\{\omega_1(x), \ldots, \omega_D(x)\}$ — образующие $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ как модуля над $\mathbf{R}$. Тогда $M \in M \cdot \mathbf{R}[x]$, $M \cdot \mathbf{R}[x]$ является подмодулем модуля $\mathcal{M}$, кроме того, $\{M \cdot \omega_1(x), \ldots, M \cdot \omega_D(x)\}$ являются образующими $M \cdot \mathbf{R}[x]$ как модуля над $\mathbf{R}$, т. е. $M \cdot \mathbf{R}[x]$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Следовательно, M является точечным.

Пусть M является точечным, тогда $M \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ является подмодулем модуля $\mathcal{M}$ над $\mathbf{R}[x]$ и конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Тогда в силу *2* леммы 1 существует система полиномов $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_t(x))$ из $\mathbf{R}[x]$ такая, что $\mathcal{N} \cdot (F(x))_x = \{0\}$, и $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Поскольку $M \in \mathcal{N}$, то $M \cdot (F(x))_x = \{0\}$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные. Пусть* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ *— модули над* $\mathbf{R}[x]$, $\tau\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *линейное над* $\mathbf{R}[x]$ *отображение.*

1) Если $\mathcal{M}'$ *является точечным подмодулем модуля* $\mathcal{M}$*, то* $\tau.\mathcal{M}'$ *является точечным подмодулем модуля* $\mathcal{N}$*.*

2) Если M' *является точечным элементом модуля* $\mathcal{M}$*, то* $\tau.M'$ *является точечным элементом модуля* $\mathcal{N}$*.*

Доказательство 1. Так как $\mathcal{M}'$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{M}$, то является подмодулем модуля $\mathcal{M}$ и является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Из первого утверждения следует, что $\tau.\mathcal{M}'$ является подмодулем модуля $\mathcal{N}$, так как отображение τ является линейным над $\mathbf{R}[x]$. Из второго утверждения следует, что $\tau.\mathcal{M}'$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$, так как отображение τ является линейным над $\mathbf{R}$; линейность отображения τ над $\mathbf{R}$ следует из его линейности над $\mathbf{R}[x]$. Следовательно, $\tau.\mathcal{M}'$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{N}$.

Доказательство 2. Так как M' является точечным элементом модуля $\mathcal{M}$, то $M' \in \mathcal{M}'$, где $\mathcal{M}'$ — точечный подмодуль модуля $\mathcal{M}$. Тогда $\tau.M' \in \tau.\mathcal{M}'$ и в силу *1* леммы $\tau.\mathcal{M}'$ является точечным подмодулем модуля $\mathcal{N}$. Следовательно, $\tau.\mathcal{M}'$ является точечным элементом модуля $\mathcal{N}$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $(\mathcal{C}, \partial)$ *— комплекс над* $\mathbf{R}[x]$.

Тогда $(\mathcal{C}^\bullet, \partial)$ *является подкомплексом комплекса* $(\mathcal{C}, \partial)$ *над* $\mathbf{R}[x]$.

Доказательство. Пусть $c \in \mathcal{C}^\bullet$, т. е. c является точечным, тогда в силу *2* леммы 4 $\partial[c]$ является точечным, т. е. $\partial[c] \in \mathcal{C}^\bullet$, так как ∂ является линейным над $\mathbf{R}[x]$ отображением $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. В силу *4* леммы 2 $\mathcal{C}^\bullet$ является подмодулем модуля $\mathcal{C}$ над $\mathbf{R}[x]$. Следовательно, $(\mathcal{C}^\bullet, \partial)$ является подкомплексом комплекса $(\mathcal{C}, \partial)$ над $\mathbf{R}[x]$.

Определение 2. При условиях леммы 5, если c_1, $c_2 \in \mathcal{C}$ и $c_1 - c_2 = \partial[c]$, где $c \in \mathcal{C}^\bullet$, то будем писать $c_1 \overset{\partial^\bullet}{\simeq} c_2$. Понятно, что в этом случае если $c_2 \in \mathcal{C}^\bullet$, то и $c_1 \in \mathcal{C}^\bullet$.

Определение 3. Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные.

Пусть $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\partial\colon \widehat{f}_x \mapsto f(x)$. Обозначим $\mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)$ множество точечных элементов $\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}_*^x)$ как модуля над $\mathbf{R}[x]$. Заметим, что $\mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)$ является подкомплексом комплекса $\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}_*^x)$ над $\mathbf{R}[x]$. Обозначим

$$\mathbf{Z}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x) = \mathbf{Z}(\mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)),$$
$$\mathbf{B}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x) = \mathbf{B}(\mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)),$$
$$\mathbf{H}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x) = \mathbf{H}(\mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)).$$

Элементы $\mathbf{Z}^\bullet(x_*, \widehat{f}_*^x)$ назовем точечными косизигиями.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{R}$ *коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*,* $\partial\colon \widehat{f}_x \mapsto f(x)$*.*

Если $c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}^x_*)$, $a(x, \widehat{f}_x) \in \mathbf{C}(x, \widehat{f}_x)$, *то* $a(x, \widehat{f}_x) \cdot c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}^x_*)$.

Доказательство. Так как отображение

$$\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*) \ni c(x_*, \widehat{f}^x_*) \mapsto a(x, \widehat{f}_x) \cdot c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$$

является линейным над $\mathbf{R}[x]$, и $c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}^x_*)$, т. е. является точечным, то в силу *2* леммы 4 $a(x, \widehat{f}_x) \cdot c(x_*, \widehat{f}^x_*)$ является точечным, т. е. $\in \mathbf{C}^\bullet(x_*, \widehat{f}^x_*)$.

В дополнение к теореме 1 из [5] сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *коммутативное кольцо с единицей;* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — *переменные;* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_t(x))$ — *полиномы из* $\mathbf{R}[x]$; $\partial\colon \widehat{f}_x, \widehat{f}'_x \mapsto f(x)$, $\widehat{F}_x, \widehat{F}'_x \mapsto F(x)$. *Тогда:*

1) если $c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$ *является точечным, то его образ при отображении*

$$\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*) \ni c(x_*, \widehat{f}^x_*) \mapsto \mathop{\perp}_{x} \mathop{\top}_{\widehat{f}'_x} x^0 \cdot \det \|\widehat{F}^x_*\| \cdot \exp(\widehat{f}'_x \widehat{f}^x_*) \cdot c(x_*, \widehat{f}'^x_*) =$$

$$= \det \|\widehat{F}^x_*\| \cdot c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*)$$

является точечным;

2) если $c(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*)$ *является точечным, то его образ при отображении*

$$\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*) \ni c(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*) \mapsto \mathop{\perp}_{x} \mathop{\top}_{\widehat{f}'_x} \mathop{\top}_{\widehat{F}'_x} x^0 \cdot (\widehat{F}'_x)^0 \cdot \exp(\widehat{f}'_x \widehat{f}^x_*) \cdot c(x_*, \widehat{f}'^x_*, \widehat{F}'^x_*) =$$

$$= \mathop{\top}_{\widehat{F}_x} (\widehat{F}_x)^0 \cdot c(x_*, \widehat{f}^x_*, \widehat{F}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$$

является точечным.

Доказательство 1, 2. Поскольку оба отображения являются линейными над $\mathbf{R}[x]$, то утверждения имеют место в силу леммы 4.

В дополнение к теоремам 2, 3 из [4], теореме 3 из [5] сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *коммутативное кольцо с единицей* 1; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — *переменные;* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ *и* $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_t(x))$ — *полиномы из* $\mathbf{R}[x]$; $F_j(x) = \sum\limits_i f_i(x) G^i_j(x)$ *для* $j = 1,\, t$, *где* $G^i_j(x) \in \mathbf{R}[x]$ *для* $i = 1,\, s$ *и* $j = 1,\, t$; $\partial\colon \widehat{f}_x \mapsto f(x)$, $\widehat{F}_x \mapsto F(x)$. *Тогда:*

1) если $c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$ *является точечным, то его образ при отображении*

$$\mathbf{C}(x_*, \widehat{F}^x_*) \ni c(x_*, \widehat{F}^x_*) \mapsto c'(x_*, \widehat{f}^x_*) = \mathop{\top}_{\widehat{F}_x} \mathop{\perp}_{x} \det \begin{Vmatrix} G(x) & -\widehat{f}^x_* \\ \widehat{F}_x & 0 \end{Vmatrix} \cdot c(x_*, \widehat{F}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$$

является точечным;

2) если $c(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*)$ *является точечным, то его образ при отображении*

$$\mathbf{C}(x_*, \widehat{f}^x_*) \ni c(x_*, \widehat{f}^x_*) \mapsto \mathop{\top}_{\widehat{f}_x} \mathop{\perp}_{x} c(x_*, \widehat{f}^x_*) \cdot \det \|\widehat{f}_x G(x) \widehat{F}^x_*\| \in \mathbf{C}(x_*, \widehat{F}^x_*)$$

является точечным.

Доказательство 1, 2. Поскольку оба отображения являются линейными над $\mathbf{R}[x]$, то утверждения имеют место в силу *2* леммы 4.

Уточним теорему 4 из [3] (теорему 5 из [4], теорему 4 из [5]).

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{R}$ *коммутативное кольцо с единицей;* $y \simeq x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— наборы переменных;* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*;* $\partial\colon \widehat{f}_x \mapsto f(x)$, $\widehat{f}_y \mapsto f(y)$.

Если $\mathbf{R}[x]/(f(x))_x$ *является конечно порожденным как модуль над* $\mathbf{R}$*, то существует точечный* $e(x_*, \widehat{f}^x_*) \in \mathbf{Z}(x_*, \widehat{f}^x_*)$ *такой, что*

$$\mathop{\top}\limits_{y}\mathop{\top}\limits_{\widehat{f}_y}\det\begin{Vmatrix}\nabla f(x,y)\\ \widehat{f}_x-\widehat{f}_y\end{Vmatrix}\cdot e(y_*,\widehat{f}^y_*)\overset{\partial}{\simeq}x^0\cdot(\widehat{f}_x)^0=1.$$

Доказательство. Из теоремы 4 из [4] и из доказательства теоремы 4 из [5] следует, что существует система полиномов $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ из $\mathbf{R}[x]$ такая, что $F_j(x) = \sum\limits_i f_i(x) \cdot G^i_j(x)$ для $j = 1, n$, где $G^i_j(x) \in \mathbf{R}[x]$ для $i = 1, s$ и $j = 1, n$, и для которой при $\partial\colon \widehat{F}_x \mapsto F(x)$, $\widehat{F}_y \mapsto F(y)$ существует $E(x_*, \widehat{F}^x_*) \in \mathbf{Z}^0(x_*, \widehat{F}^x_*)$ такой, что

$$\mathop{\top}\limits_{y}\mathop{\top}\limits_{\widehat{F}_y}\det\begin{Vmatrix}\nabla f(x,y)\\ \widehat{F}_x-\widehat{F}_y\end{Vmatrix}\cdot E(y_*,\widehat{F}^y_*)=x^0\cdot(\widehat{F}_x)^0=1.$$

Тогда $E(x_*, \widehat{F}^x_*) = l(x_*) \cdot \mathbf{1}_{\widehat{F}_x}(\widehat{0})$ и $\partial[E(x_*, \widehat{F}^x_*)] = \sum\limits_j \mathop{\perp}\limits_x F_j(x)\widehat{F}^{j,x}_* \cdot (l(x_*) \cdot \mathbf{1}_{\widehat{F}_x}(\widehat{0})) = \widehat{0}_*$, где $l(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$. Последнее равенство означает, что $l(x_*) \cdot F_j(x) = 0_*$ для любого $j = 1, n$, т. е. $l(x_*)$ аннулирует $(F(x))_x$. Тогда следуя теореме 3 из [4] (там имеется ошибка при описании $e(x_*, \widehat{f}^x_*)$) или продолжению доказательства теоремы 4 из [5] получаем, что для

$$e(x_*,\widehat{f}^x_*)=\mathop{\top}\limits_{\widehat{F}_x}\mathop{\perp}\limits_{x}\det\begin{Vmatrix}G(x) & \widehat{f}^x_*\\ -\widehat{F}_x & 0\end{Vmatrix}\cdot E(x_*,\widehat{F}^x_*)$$

имеет место $\partial[e(x_*, \widehat{f}^x_*)] = 0$ и

$$\mathop{\top}\limits_{y}\mathop{\top}\limits_{\widehat{f}_y}\det\begin{Vmatrix}\nabla f(x,y)\\ \widehat{f}_x-\widehat{f}_y\end{Vmatrix}\cdot e(y_*,\widehat{f}^y_*)\overset{\partial}{\simeq}x^0\cdot(\widehat{f}_x)^0=1.$$

В доказательстве теоремы 4 из [4] и в доказательстве теоремы 4 из [5] $F_j(x) = T_j(x_j) \cdot x^0$, где $T_j(x_j)$ — унитарный полином. Как было показано в доказательстве *2* леммы 1, $\mathbf{R}[x]/(F(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$. Поскольку $l(x_*) \cdot (F(x))_x = \{0_*\}$, то $E(x_*, \widehat{F}^x_*) \cdot (F(x))_x = l(x_*) \cdot \mathbf{1}_{\widehat{F}_x}(\widehat{0}) \cdot (F(x))_x = \{\widehat{0}_*\}$, тогда в силу леммы 3 $E(x_*, \widehat{F}^x_*)$ является точечным. Поскольку $E(x_*, \widehat{F}^x_*)$ является точечным, то в силу *1* теоремы 2 $e(x_*, \widehat{f}^x_*)$ является точечным.

1. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые соотношения полиномов системы полиномов // Там само. – 1995. – № 6. – С. 7–10.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Гомологии комплекса Кошуля системы полиномиальных уравнений // Там само. – 1997. – № 9. – С. 43–49.
4. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля систем полиномов, связанных линейной зависимостью // Некоторые вопросы современной математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 326–349.

5. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля вложенных систем полиномов и двойственность // Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 26–34.
6. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там само. – 2002. – No 7. – С. 35–42.
7. *Сейфуллин Т. Р.* Продолжение корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и редукция полиномов по модулю ее идеала // Там само. – 2003. – № 7. – С. 19–27.
8. *Сейфуллин Т. Р.* Расширение ограниченных корневых функционалов переопределенной системы полиномиальных уравнений // Там само. – 2005. – № 8. – С. 25–30.
9. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру. – Москва: Мир, 1972. – 160 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.10.2006

УДК 531.36

В. И. Слынько

Об устойчивости приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The stability of solutions of differential equations in the $\mathbb{E}^2$ space is investigated. The Lyapunov function is constructed by using the classical isoperimetric Brunn-Minkowski inequality.

В работе [1, 2] изложен подход к построению приближенных решений нечетких дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{E}^2$. В рамках этого подхода естественной является постановка задачи об устойчивости приближенных решений данного класса уравнений.

Рассмотрим нечеткое дифференциальное уравнение в пространстве $\mathbb{E}^2$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mathcal{F}(t, h(t)), \qquad h(t_0) = h_0, \tag{1}$$

где $h(t) \in \Omega$, $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{E}^n \to \Omega$.

Относительно этого уравнения сделаем следующие предположения.

Предположение. *Нечеткое дифференциальное уравнение (1) такое, что:*

1) оператор $\mathcal{F}$ в области $D_{T,r} = \{(t,h) \mid 0 \leqslant t - t_0 \leqslant T, \|h - h_0\|_\Omega \leqslant r\}$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует постоянная L такая, что

$$\|\mathcal{F}(t,\alpha,h') - \mathcal{F}(t,\alpha,h'')\|_\Omega \leqslant L\|h' - h''\|_\Omega$$

при всех $(t,h') \in D_{T,r}$, $(t,h'') \in D_{T,r}$;

2) существуют операторы $\mathcal{F}_\alpha\colon \mathcal{K}_C^2 \to C[0,2\pi]$, где $\mathcal{K}_C^2$ — пространство опорных функций непустых выпуклых компактов на плоскости, такие, что

$$[\mathcal{F}(t,h(t))]_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(t, h_\alpha(t)), \qquad \alpha \in [0,1],$$

где $h_\alpha(t) = h(t,\alpha,.) \in C[0,2\pi]$.