

## ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Розглянуті особливості моделювання перебігу та динаміки хаотичних процесів у детермінованих механічних та електромеханічних системах, у складі яких є ексцентрично неврівноважені маси, що обертаються навколо нефіксованих центрів.

## PECULIARITIES OF MODELING THE DYNAMICS OF CHAOTIC PROCESSES IN THE DETERMINED SYSTEMS BY ANALYTICAL MECHANICS' METHODS

The peculiarities of dynamics modeling of chaotic processes in determined mechanical and electromechanical systems, where there are eccentric unbalanced masses, which are rotated relatively to the shifting unfixed centers, has been examined.

Моделирование динамики детерминированных систем, для которых возможны и характерны хаотические режимы, является достаточно сложной и настолько же неоднозначной задачей, насколько множественны варианты функционирования этих систем. Результаты моделирования часто критически чувствительны как к незначительным изменениям параметров систем, так и к выбору метода и шага численного интегрирования. Также имеет значение алгоритм и реализованная точность вычислений.

**Задачи статьи.** Выявить, проработать и описать особенности моделирования хаотических режимов механических и электромеханических систем. Определить влияние допустимой погрешности итераций и порядка вычислений величин угловых ускорений эксцентрически смещенных масс внутри одной итерации на поведение детерминированных систем при моделировании динамики развития хаотических процессов. Сформулировать критерии выбора допустимой погрешности итераций.

**Основная часть.** Рассмотрим, например, механические и электромеханические системы, в которых имеются эксцентрически неуравновешенные массы, вращающиеся относительно смещающихся нефиксированных центров вращения (маятниковые и рычажные механизмы, упруго деформирующиеся коленчатые и распределительные валы, кулачковые и молоточковые механизмы, механизмы с рабочими органами-эксцентриками, раскачивающиеся грузы на упруго деформирующихся стрелах подъемных кранов, а также внутримельничная загрузка шаровых мельниц и мельниц принудительного самоизмельчения.). Что касается барабанных мельниц, то шаровая загрузка представляет собой физический маятник с точкой подвеса на оси барабана. И, хотя центры осей барабана и вращающегося интенсификатора (если таковой имеется) в нормальных режимах без учета упругих деформаций конструктивных элементов мельницы являются неподвижными, элементарные сегменты загрузки описывают сложные криволинейные траектории с нестабильными смещающимися центрами. Механика движения сегмента загрузки, определяемая сложным гранулометрическим

составом, наличием твердой и жидкой фазы, взаимодействием с футеровками барабана и интенсификатора, а также взаимодействием с соседними сегментами, является довольно сложной и приводит к появлению гравитационно-фрикционных колебаний. В результате вращающий момент двигателя электропривода мельницы становится пульсирующим даже в установившемся режиме, что приводит к усилению негативного влияния электропривода на сеть и ухудшению параметров качества электроэнергии. В вибрационных мельницах особенности конструкции (такие как: наличие гибких валов, упругих подвесок и мембран, эластичных муфт и эксцентриковых вибровозбудителей) вызывают вынужденные колебания, причем совершенно ясно, что центры вращения эксцентриков и элементов загрузки постоянно и хаотично смещаются. В то же время этот хаос является детерминированным, т. е. строго определенным совокупностью физических параметров системы.

Весьма часто при моделировании перечисленных выше механизмов и систем на основе уравнений динамики возникают ошибки, связанные с тем, что центр вращения определен неправильно, либо значительно смещается в пространстве за время одного шага интегрирования. Если эти системы проявляют себя как хаотические, то обнаружить ошибку, визуальным образом анализируя графики переходных процессов, достаточно сложно. Однако, рассчитав полную энергию такой системы на каждом шаге интегрирования, можно увидеть, что она изменяется даже в пределах временного интервала одного периода колебаний наиболее инерционного звена, что противоречит фундаментальному закону физики. Если координаты центров вращения определены неверно, то действующие на центры масс силы раскладываются на нормальные и тангенциальные составляющие вдоль ошибочных радиусов и касательных к траекториям. Неверно определенные тангенциальные составляющие сил дают ошибочные значения линейных тангенциальных ( $a$ , следовательно, и угловых) ускорений. Неверно определенные нормальные составляющие при жестких недеформируемых связях между массами дают ошибочную картину перераспределения сил, т. е. взаимного воздействия масс друг на друга. Так, на рис. 1 на примере плоской задачи для двухплечевой маятниковой системы показано, что в некоторых случаях центры вращения совпадают с центрами масс (а) или осями шарнирных соединений (б). Однако в общем случае центры вращения могут находиться в пределах геометрического места точек, определяемого наличествующими степенями свободы (в), и, смещаясь в процессе движения масс, описывать сложную траекторию (г). На рис. 1 (в) показано, что при шаге моделирования, стремящемся к нулю ( $h = \Delta t \rightarrow 0$ ), центр вращения массы  $m_2$  находится на пересечении высот треугольников  $AO_2B$  и  $BO_2C$ . В принятом приближении ( $h \rightarrow 0$ ) данные треугольники являются равнобедренными, и хорды  $AB$  и  $BC$  образуют часть окружности – элементарный участок траектории движения массы  $m_2$ . Таким образом, для того чтобы определить направление вектора мгновенной скорости  $\vec{v}_2$ , необходимо выполнить два шага моделирования, что требует предварительного разложения сил, приложенных к центру массы  $m_2$  на

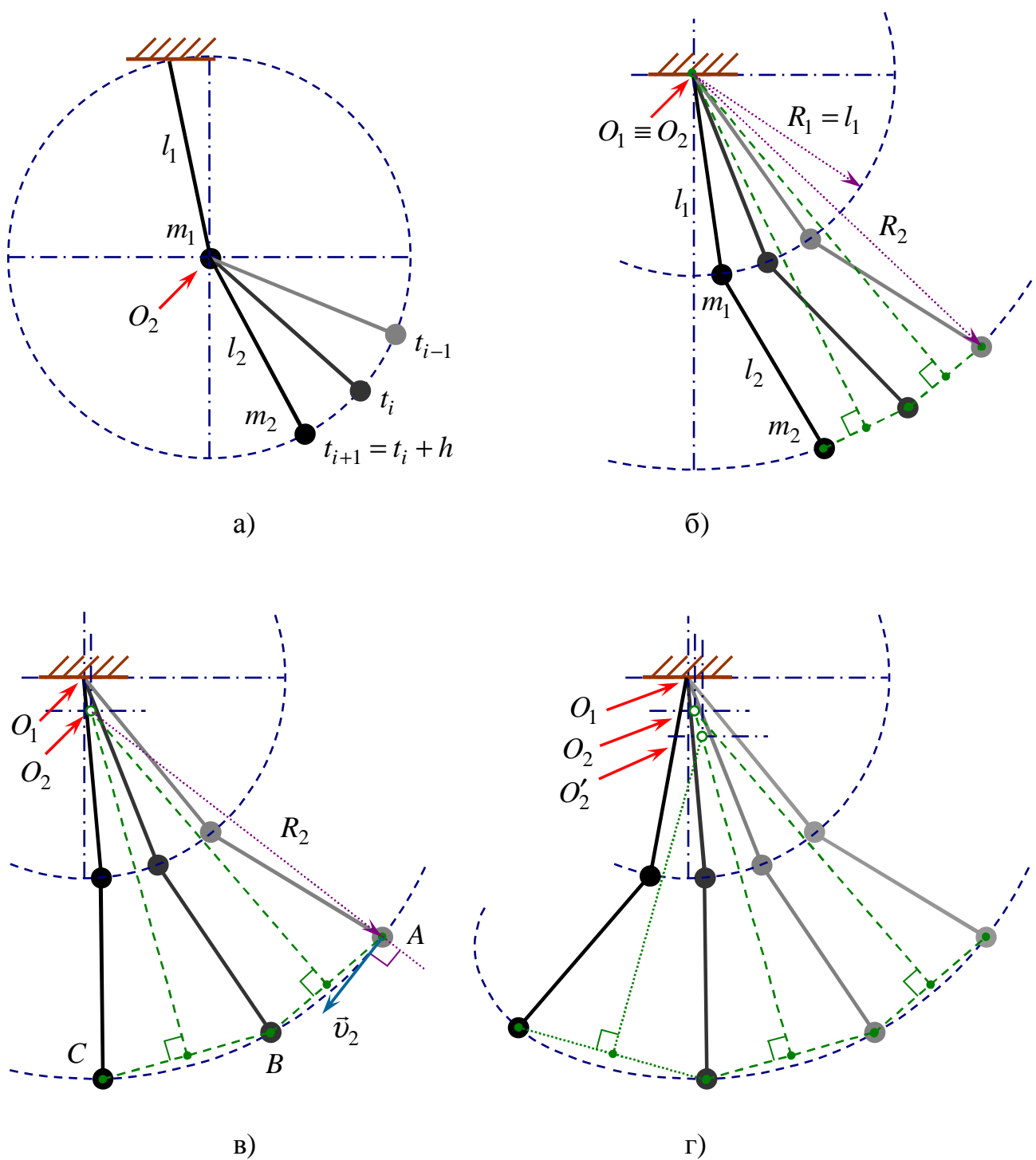


Рис. 1 – Определение координат центров вращения масс системы маятников для случая плоской задачи  
 а) плечо 1 закреплено жестко, плечо 2 – шарнирно;  
 б) плечо 1 закреплено шарнирно, плечо 2 – жестко;  
 в) оба плеча соединены шарнирно, центр вращения  $O_2$  не совпадает ни с центром вращения  $O_1$ , ни с центром массы  $m_1$ ;  
 г) центр вращения  $O_2$  смещается и в общем случае описывает сложную траекторию.

нормальную и тангенциальную составляющие (т. е. координаты центра вращения должны быть предварительно известны). В случае абсолютно жестких рычагов маятниковой системы моделирование, тем не менее, возможно выполнить методом итерационных приближений. Критерием адекватности программной модели будем считать постоянство полной энергии замкнутой системы.

Второй путь – вывод выражений, описывающих кинематику системы [1]. Для этого используем уравнения Лагранжа. Проф. Дж. М. Т. Томпсон указывал: «Уравнения Лагранжа продолжают играть в механике фундаментальную роль благодаря тому, что основанный на них подход является более общим, чем векторный подход Ньютона: они естественным образом привели... к представлению о минимуме общей потенциальной энергии... в состоянии устойчивого равновесия консервативной системы» [2].

Если материальная система обладает идеальными связями, то ее движение можно математически описать уравнениями Лагранжа второго рода, т. е. системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_i}, \quad (1)$$

где:  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $Q_i$  – обобщенные силы;  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\dot{\alpha}_i$  – обобщенные скорости;  $\alpha_i$  – обобщенные координаты.

Обобщенные силы можно найти как коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta \alpha_i = Q_1 \cdot \delta \alpha_1 + Q_2 \cdot \delta \alpha_2 + \dots + Q_n \cdot \delta \alpha_n. \quad (2)$$

Кинетическую энергию можно выразить через обобщенные скорости  $\dot{\alpha}_i$  и обобщенные координаты  $\alpha_i$ .

Рассмотрим материальную систему в виде тройного математического маятника, массы грузов которого равны:  $m_1, m_2, m_3$ ; длины плеч маятника равны:  $l_1, l_2, l_3$ ; обобщенные координаты равны:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (рис. 2).

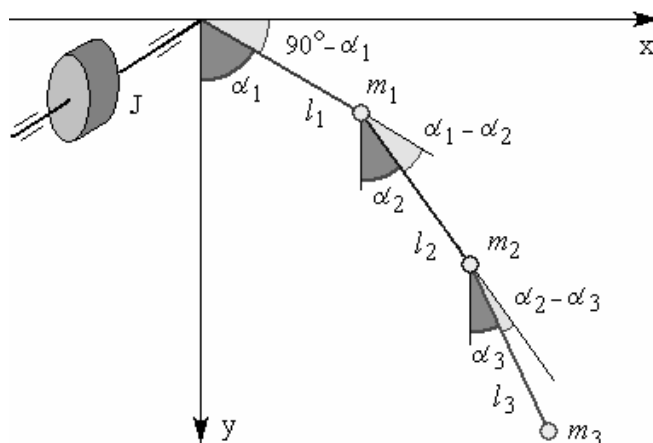


Рис. 2 – Кинематическая расчетная схема системы

Координаты грузов определим по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1, & y_1 &= l_1 \cdot \sin \alpha_1, \\ x_2 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2, & y_2 &= l_1 \cdot \sin \alpha_1 + l_2 \cdot \sin \alpha_2, \\ x_3 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2 + l_3 \cdot \cos \alpha_3, & y_3 &= l_1 \cdot \sin \alpha_1 + l_2 \cdot \sin \alpha_2 + l_3 \cdot \sin \alpha_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическую энергию системы определим по формуле:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot v_3^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 \cdot (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2). \quad (4)$$

Подставляя выражения производных:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1, & \dot{y}_1 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1, \\ \dot{x}_2 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 - l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2, & \dot{y}_2 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2, \\ \dot{x}_3 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 - l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2 - l_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \dot{\alpha}_3, & & \\ \dot{y}_3 &= l_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2 + l_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \dot{\alpha}_3, & & \end{aligned} \quad (5)$$

получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot l_3^2 \cdot \dot{\alpha}_3^2 + \\ &+ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \\ &+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, из полученной формулы следует, что кинетическая энергия есть функция обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Частные производные кинетической энергии материальной системы равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} &= (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\alpha}_1 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} &= -(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3} &= (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \dot{\alpha}_2 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} &= (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} &= m_3 \cdot l_3^2 \cdot \dot{\alpha}_3 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha_3} &= m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) + m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Виртуальная работа равна:

$$\delta A = m_1 \cdot g \cdot \delta x_1 + m_2 \cdot g \cdot \delta x_2 + m_3 \cdot g \cdot \delta x_3. \quad (8)$$

Подставляя:

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1, \\
\delta x_2 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2, \\
\delta x_3 &= -l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 - l_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \delta \alpha_3,
\end{aligned} \tag{9}$$

получим окончательное выражение для виртуальной работы, откуда найдем обобщенные силы как коэффициенты при вариациях обобщенных координат:

$$\begin{aligned}
\delta A &= -(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 - \\
&- m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \delta \alpha_3;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1, \\
Q_2 &= -(m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2, \\
Q_3 &= -m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3.
\end{aligned} \tag{11}$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода – уравнения движения данной материальной системы:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_1}; \\
Q_2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_2}; \\
Q_3 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_3}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставив обобщенные силы, частные производные кинетической энергии системы и выполнив некоторые математические операции, получим окончательные уравнения движения материальной системы:

$$\begin{aligned}
-(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1 &= (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \ddot{\alpha}_2 &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_3 + \\
+(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dot{\alpha}_2^2 &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_3^2;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
-(m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2 &= (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\alpha}_2 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_3 &- (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dot{\alpha}_1^2 + \\
+m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_3^2;
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
-m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3 &= m_3 \cdot l_3^2 \cdot \ddot{\alpha}_3 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_2 &- m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_1^2 - \\
-m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_2^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Добавим к оси вращения первого маятника маховик массой  $m_m$ , радиусом  $R$ . Момент инерции маховика равен суммарному моменту инерции ротора или якоря электродвигателя и вращающихся частей зубчатой передачи, приведен-

ному к валу (оси вращения) первого плеча маятника. Теперь к кинетической энергии материальной системы добавится кинетическая энергия вращения маховика  $T_M$ , и формула для ее определения примет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_M, \quad (16)$$

где:  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  – кинетические энергии соответственно первого, второго и третьего маятников;

$$T_M = \frac{1}{2} J \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\alpha}_1^2, \quad (17)$$

где:  $J$  – момент инерции маховика,  $\omega_1$  – угловая скорость вращения маховика и первого маятника, т. к. они находятся на одной оси вращения;

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot v_3^2 + \frac{1}{2} J \cdot \dot{\alpha}_1^2. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot l_3^2 \cdot \dot{\alpha}_3^2 + \\ & + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + \\ & + m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{1}{2} J \cdot \dot{\alpha}_1^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Частные производные кинетической энергии материальной системы равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} &= (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 \cdot \dot{\alpha}_1 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + J \cdot \dot{\alpha}_1, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} &= -(m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} &= (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \dot{\alpha}_2 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} &= (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3} &= m_3 \cdot l_3^2 \cdot \dot{\alpha}_3 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) + m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_3} &= m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_1 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) + m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \dot{\alpha}_2 \cdot \dot{\alpha}_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned} \quad (20)$$

Виртуальная работа равна:

$$\delta A = m_1 \cdot g \cdot \delta x_1 + m_2 \cdot g \cdot \delta x_2 + m_3 \cdot g \cdot \delta x_3 + m_M \cdot g \cdot \delta x_M; \quad (21)$$

т. к.  $\delta x_M = 0$ , то

$$\begin{aligned} \delta A = & -(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \delta \alpha_1 - (m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \delta \alpha_2 - \\ & - m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \delta \alpha_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Обобщенные силы равны:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1, \\
Q_2 &= -(m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2, \\
Q_3 &= -m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3.
\end{aligned}
\tag{23}$$

Уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой материальной системы имеют вид:

$$\begin{aligned}
-(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin \alpha_1 &= \left( (m_1 + m_2 + m_3) \cdot l_1^2 + J \right) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \ddot{\alpha}_2 &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_3 + \\
+ (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dot{\alpha}_2^2 &+ m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_3^2;
\end{aligned}
\tag{24}$$

$$\begin{aligned}
-(m_2 + m_3) \cdot g \cdot l_2 \cdot \sin \alpha_2 &= (m_2 + m_3) \cdot l_2^2 \cdot \ddot{\alpha}_2 + (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_3 &- (m_2 + m_3) \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dot{\alpha}_1^2 + \\
+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_3^2;
\end{aligned}
\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
-m_3 \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \alpha_3 &= m_3 \cdot l_3^2 \cdot \ddot{\alpha}_3 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \\
+ m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \ddot{\alpha}_2 &- m_3 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_1^2 - \\
- m_3 \cdot l_2 \cdot l_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \dot{\alpha}_2^2.
\end{aligned}
\tag{26}$$

Угловые ускорения маятников являются взаимозависимыми величинами, поэтому для их определения используем метод итерационных приближений. Анализ полученных нами формул и известных ранее выражений для двухмассовой маятниковой системы показывает, что в общем случае угловое ускорение каждого маятника определяется следующими составляющими: слагаемым, включающим конструктивные параметры системы; слагаемыми числом  $n-1$ , включающими в качестве сомножителя квадраты угловых скоростей остальных маятников; и, наконец, слагаемыми числом  $n-1$ , включающими в качестве сомножителя угловые ускорения остальных маятников (где  $n$  – количество маятников). Следует также отметить, что каждая из указанных составляющих включает в качестве сомножителя синусы или косинусы углов, определяющих текущее мгновенное положение масс, т. е. пространственное состояние системы. При определении угловых ускорений на каждом шаге моделирования предложена следующая последовательность вычислений:

- определение угловых ускорений каждого из маятников с учетом всех составляющих, не зависящих от угловых ускорений остальных маятников (начальный шаг);

- последовательное уточнение угловых ускорений каждого из маятников методом итерационных приближений с учетом всех составляющих; в слагаемые, зависящие от угловых ускорений остальных маятников, подставляем значения, полученные на начальном шаге, а затем – значения, полученные на предыдущей итерации.



Очевидно, что для систем, используемых в технических приложениях, т. е. для систем с конечными массами и ограниченными геометрическими размерами, а также для упрощенных адекватных моделей таких систем сходимость итерационных вычислений обеспечивается в любом случае. Однако важным является вопрос выбора допустимой погрешности итераций и порядка вычислений величин угловых ускорений внутри одной итерации. Если изменить установленный порядок, то полученные значения угловых ускорений также изменятся, хотя и на меньшую величину, чем допустимая погрешность итераций. Тем не менее, эти незначительные изменения могут оказаться существенными с точки зрения определения текущих координат центров масс в конкретный момент времени, поскольку системы динамического хаоса являются весьма чувствительными к начальным условиям. Известный физик-релятивист К. Ланцош утверждал: «Аналитическая механика представляет собой много больше, чем эффективный инструмент для решения динамических проблем, встречающихся в физике и технике. Вряд ли существует другая такая математическая наука, в которой строгая абстрактная модель и экспериментальные данные столь хорошо согласуются и поддерживают друг друга» [3]. Однако, ныне известно, что для детерминированных систем, в которых наблюдается динамический хаос, сколь угодно малые изменения начальных условий приводят со временем к значительным отклонениям траектории, в связи с чем определение координат системы математическим моделированием в заданный момент времени невозможно, даже если имеется только лишь единственное решение при данных начальных условиях.

При использовании численных методов для решения дифференциальных уравнений координаты системы в момент времени  $t_{i+1}$  определяются на основе их значений в момент времени  $t_i$ , являющихся, по сути, начальными условиями. На каждом шаге интегрирования происходит возмущение начальных условий, обусловленное ошибкой интегрирования. Поэтому очевидно, что изменение допустимой погрешности итераций и порядка вычислений величин угловых ускорений внутри одной итерации при определении угловых ускорений эксцентрически смещенных масс также существенно влияет на полученные траектории (а не только изменение шага интегрирования по времени).

Как было отмечено, критерием адекватности модели можно считать постоянство полной энергии замкнутой системы. Выполнено моделирование трехмассовой системы маятников при различных значениях шага интегрирования и допустимой погрешности итераций (табл. 1). Во всех случаях общая энергия системы растет практически линейно во времени крайне медленными темпами (менее 3 десятитысячных долей процента на один шаг интегрирования), рис. 3. Незначительный рост значения полной энергии объясняется погрешностью численного интегрирования, однако на протяжении десятков циклов даже самых низкочастотных колебаний энергия системы практически не изменяется, что говорит об адекватности модели. Тем не менее, анализируя рис. 3 и табл. 1 можно заметить, что при одном и том же значении шага интегрирования по времени уменьшение допустимой погрешности итераций с 0,1 о. е. до 0,01 о. е.

приводит к существенному выполаживанию графика потенциальной энергии (пары графиков 1 – 2 и 5 – 6 на рис. 3). В то же время дальнейшее уменьшение допустимой погрешности итераций с 0,01 о. е. до 0,0001 о. е. практически не улучшает качество моделирования (группы графиков «А» и «В»). При этом число итераций растет в 1,5 – 1,6 раз. В этой связи предлагается принимать допустимую погрешность итераций равной 0,01 о. е. при ограниченном вычислительном быстродействии ЭВМ, на которой производится моделирование и значительной сложности модели. Если же время вычислительного эксперимента не является критичным параметром, то допустимую погрешность итераций можно принять равной 0,001 – 0,0001 о. е. В то же время уменьшение шага интегрирования по времени в данном случае обеспечит более значительный эффект, чем дальнейшее уменьшение допустимой погрешности итераций (группы графиков «А» и «В» на рис. 3).

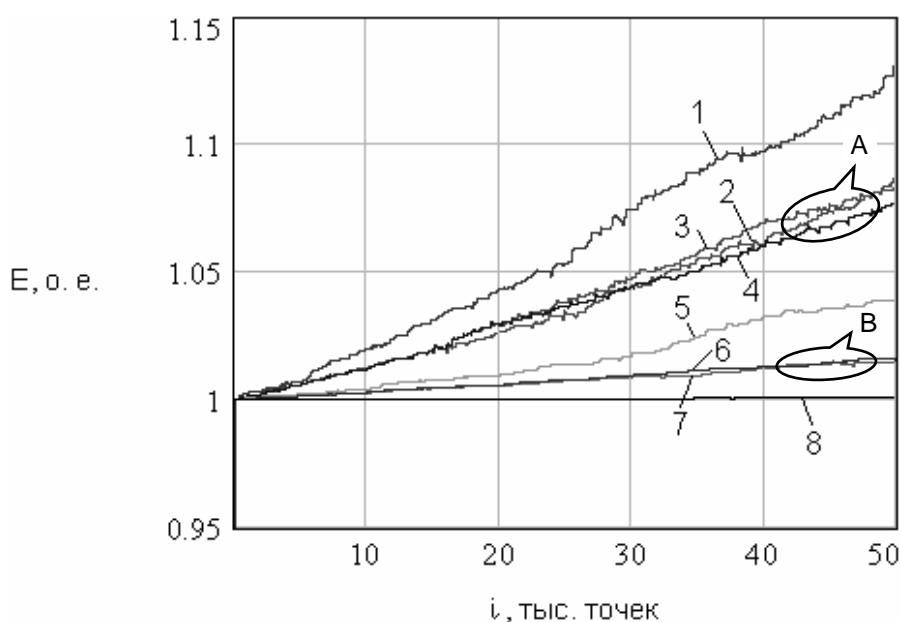


Рис. 3 – Изменение общей энергии модели системы, обусловленное погрешностью моделирования

Порядок вычисления угловых ускорений внутри одной итерации влияет на полученные значения в пределах допустимой погрешности, а, следовательно, и на форму траектории, которую отрабатывает система. Однако в любом случае модель остается адекватной: характер хаотического процесса и энергетические характеристики системы не изменяются. На рис. 4 приведены траектории трехмассовой системы связанных маятников в фазовом пространстве  $y(x)$  при различных порядках вычисления угловых ускорений внутри одной итерации:  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3$  (а),  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_2$  (б),  $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_1$  (в),  $\varepsilon_3 \rightarrow \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$  (г). Выполнено моделирование для всех возможных порядков вычислений. На рис. 4 выделены тождественные области «А», «В» и «С», которые иллюстрируют близость начальных участков траекторий. В дальнейшем траектории расходятся, явные отличия указаны стрелками. Конечные положения маятников существ-

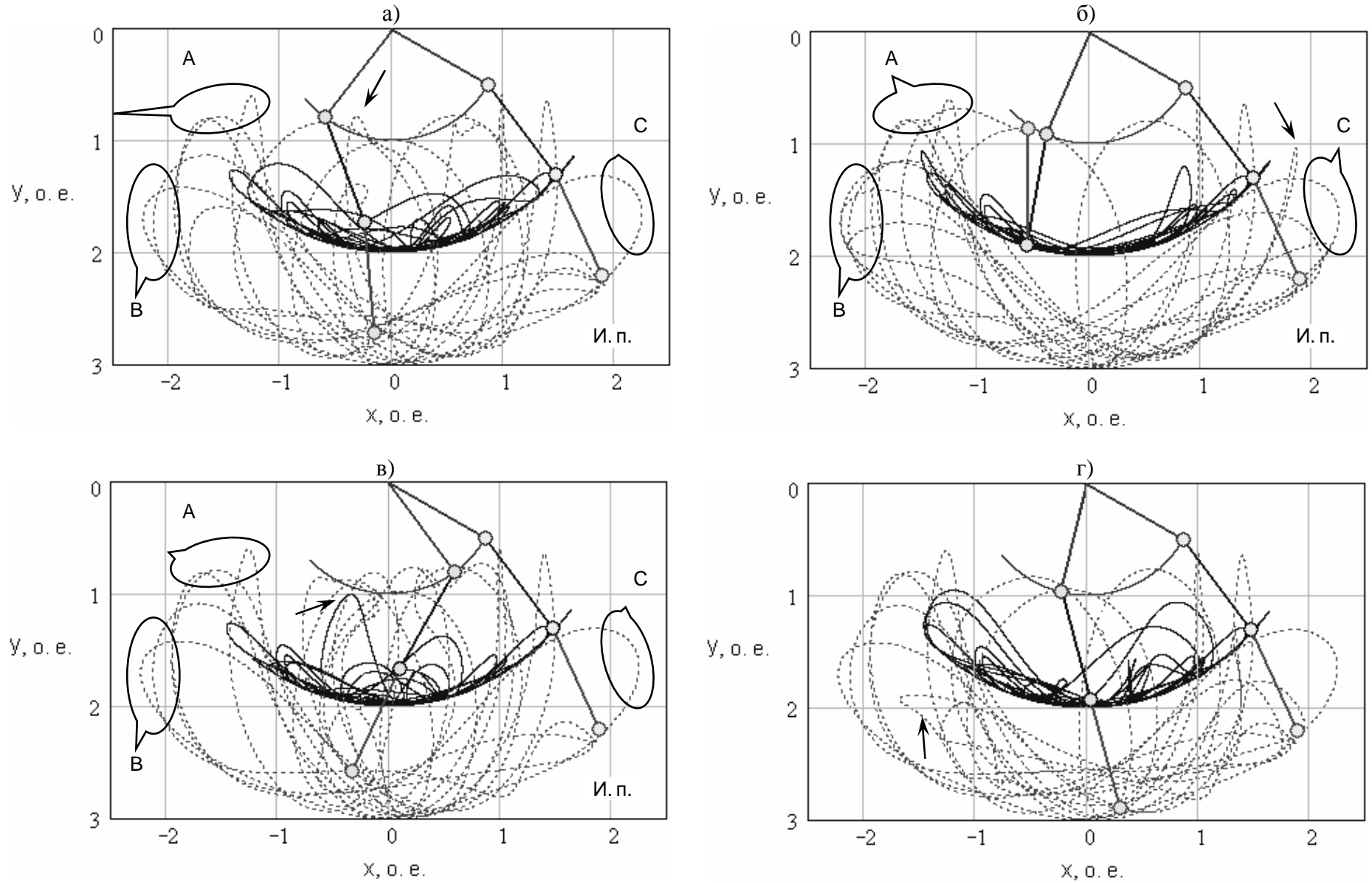


Рис. 4 – Влияние изменения порядка вычислений угловых ускорений в пределах одной итерации на форму траектории: характер процесса остается неизменным (И. п. – исходное положение)

венно различны. Однако характер процесса при этом не изменяется. Таким образом, порядок вычисления угловых ускорений эксцентрически смещенных вращающихся масс внутри одной итерации можно считать несущественным с точки зрения характера протекающих процессов и энергетических характеристик системы.

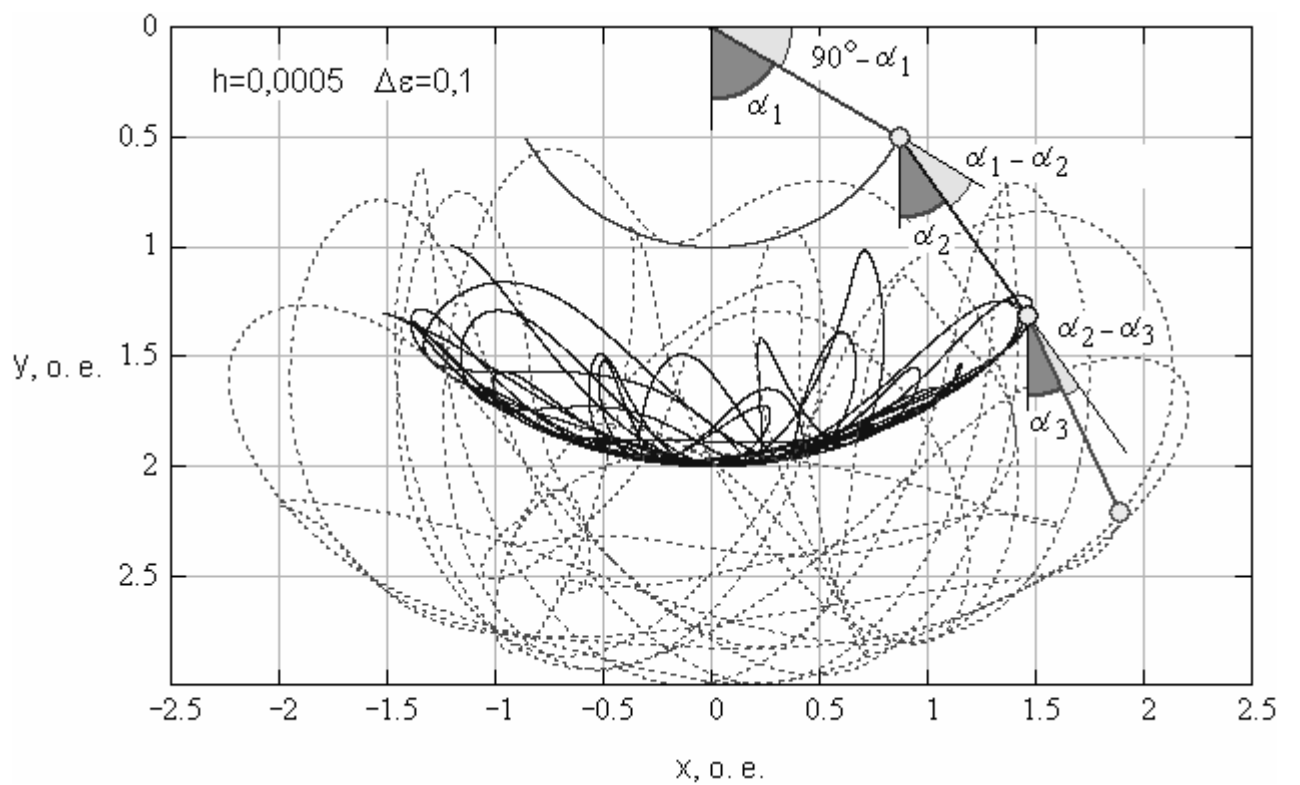
На рис. 5 и 6 приведены графики траекторий, описываемых системой в фазовом пространстве  $y(x)$  и во времени.

Таблица 1 – Перечень значений шага счета по времени и допустимой относительной погрешности итерационных приближений при вычислении угловых ускорений эксцентрически смещенных вращающихся масс

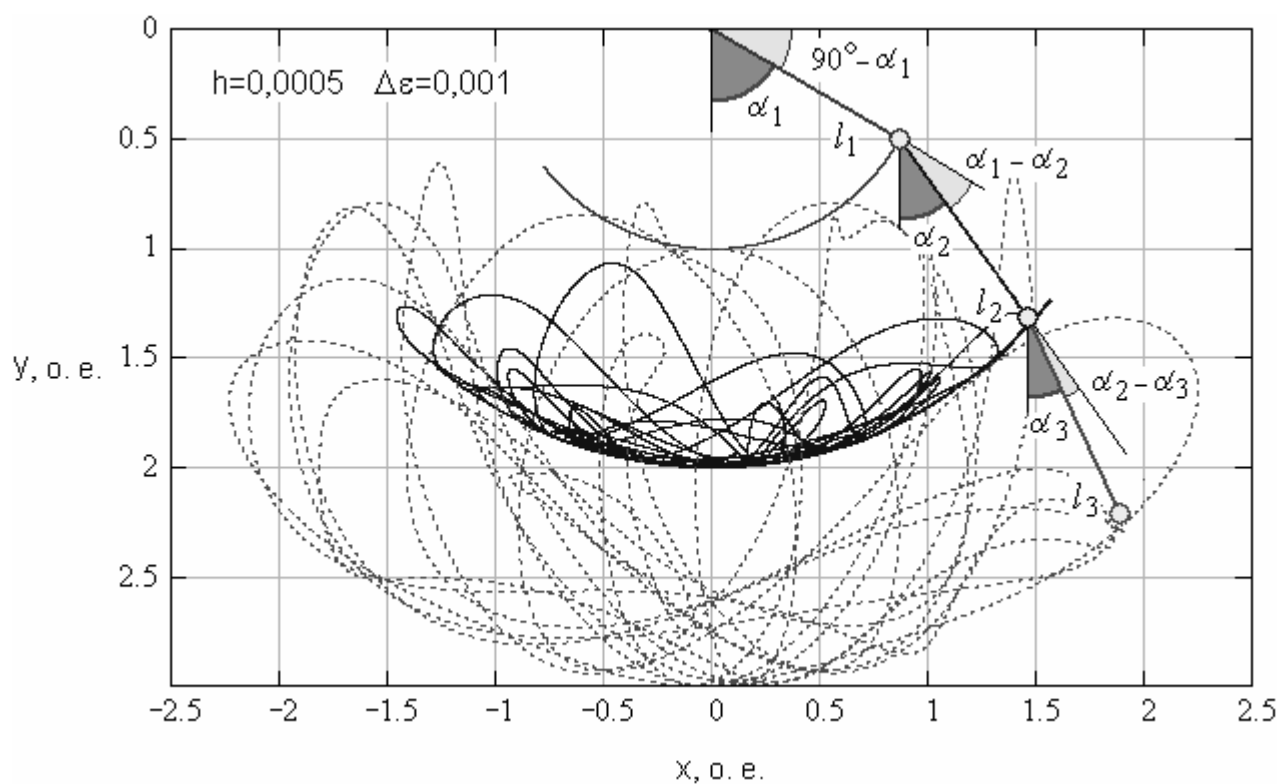
№ п/п	Шаг счета по времени, с	Относительная погрешность итераций, о. е.	Число итераций	Номер графика на рис. 3
1	0,001	0,1	6	1
2	0,001	0,01	10	2
3	0,001	0,001	14	3
4	0,001	0,0001	16	4
5	0,0005	0,1	4	5
6	0,0005	0,01	8	6
7	0,0005	0,001	12	7
8	0,0001	0,001	8	8

На рис. 7 представлены результаты моделирования трехплечевой системы маятников с маховиком, жестко закрепленным на оси вращения первого маятника. Несмотря на то, что с точки зрения кинематики добавление такого маховика аналогично увеличению массы груза  $m_1$  (поскольку центр вращения  $O_1$  неподвижен относительно системы координат), полученные для данной механической системы выражения интересны с точки зрения анализа происходящих процессов. Видно, что момент инерции маховика входит только в одно из трех уравнений Лагранжа как множитель в слагаемом  $J \cdot \ddot{\alpha}_1$ , поэтому данная механическая система может быть дополнена, например редуктором с заданным передаточным числом  $i$  или упруго-деформируемым валом с жесткостью  $c$  (в последнем случае добавится еще одна степень свободы).

Рассмотрим случай, когда момент инерции маховика значительно превышает моменты инерции масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , посчитанные как моменты инерции материальных точек, вращающихся относительно  $O_1$  (в расчетах используем максимально возможные радиусы окружностей вращения 2-го и 3-го грузов  $R_2 = l_1 + l_2$ ,  $R_3 = l_1 + l_2 + l_3$ ). Как видно из рис. 7, а, точки траекторий центров масс грузов  $m_2$  и  $m_3$  составляют сложные фигуры явно фрактального характера. В их структуре можно увидеть подобие отдельных структурных элементов, составленных разными участками траекторий, наблюдаемое в разных масштабах (мелких и крупных). Например, фиг. А, образованная участком окружности



а)



б)

Рис. 5 – Колебания трехплечевой маятниковой системы в плоскости  $x - y$ : а) погрешность итерационных приближений  $\Delta\varepsilon = 0,1$ ; б) погрешность итерационных приближений  $\Delta\varepsilon = 0,001$ ; характер процесса однотипен, однако траектории отличаются

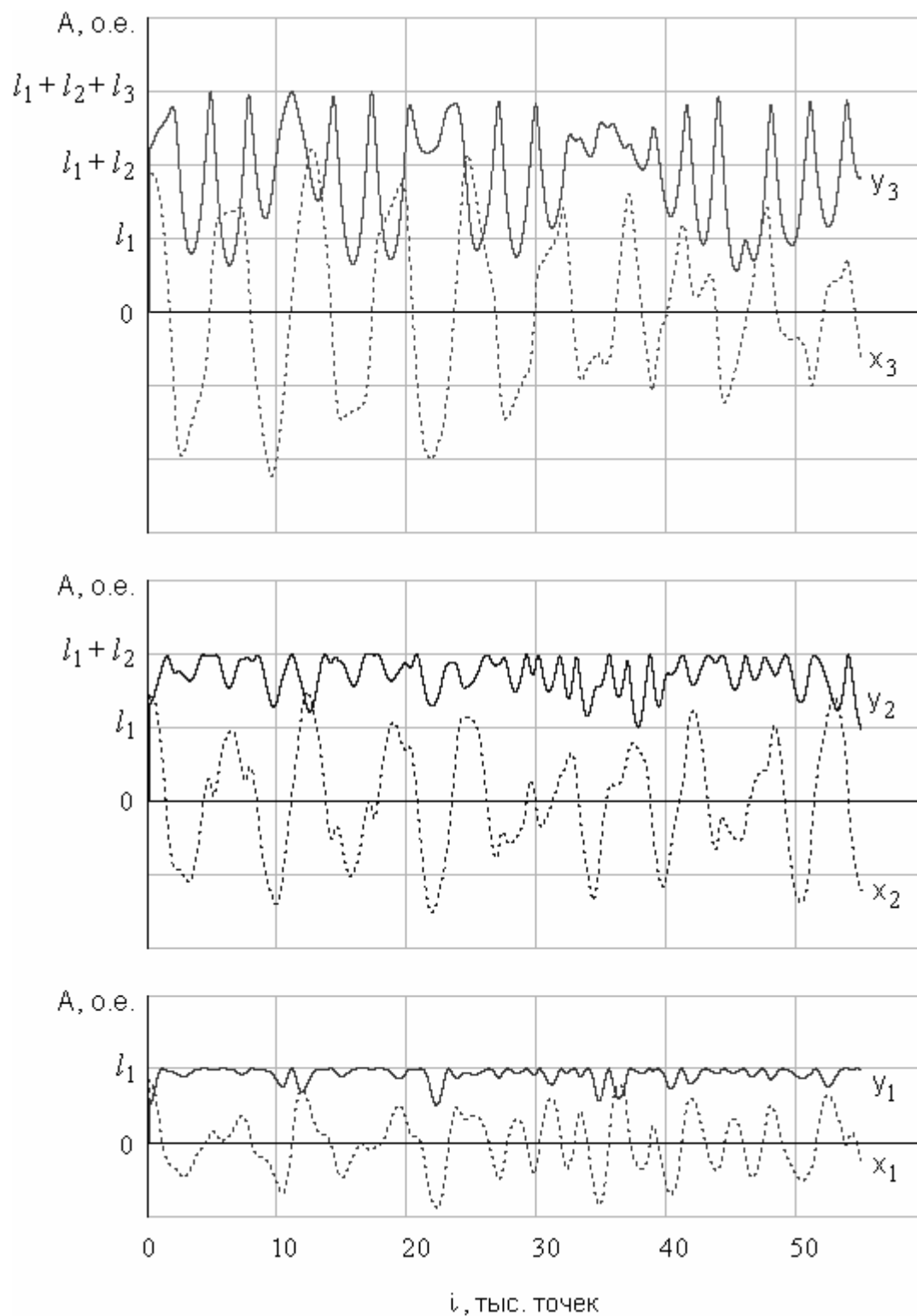
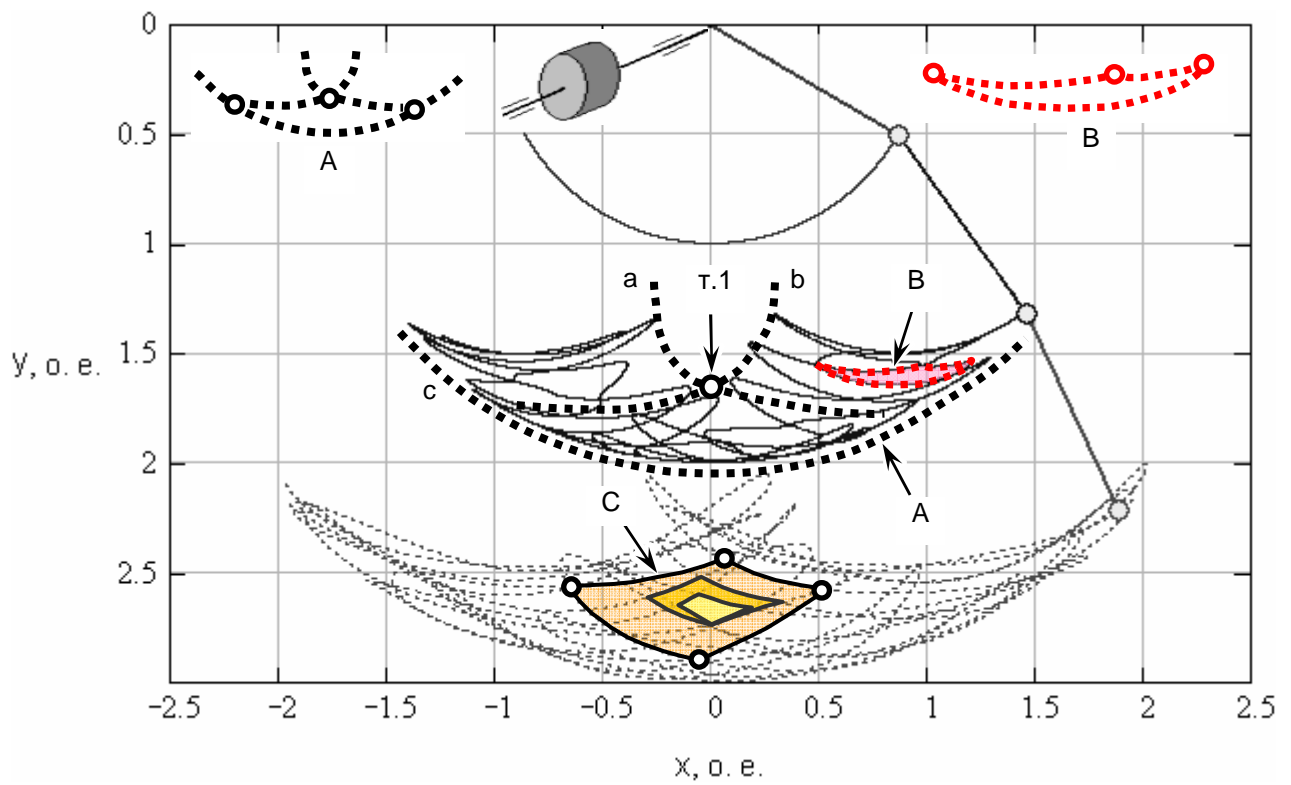
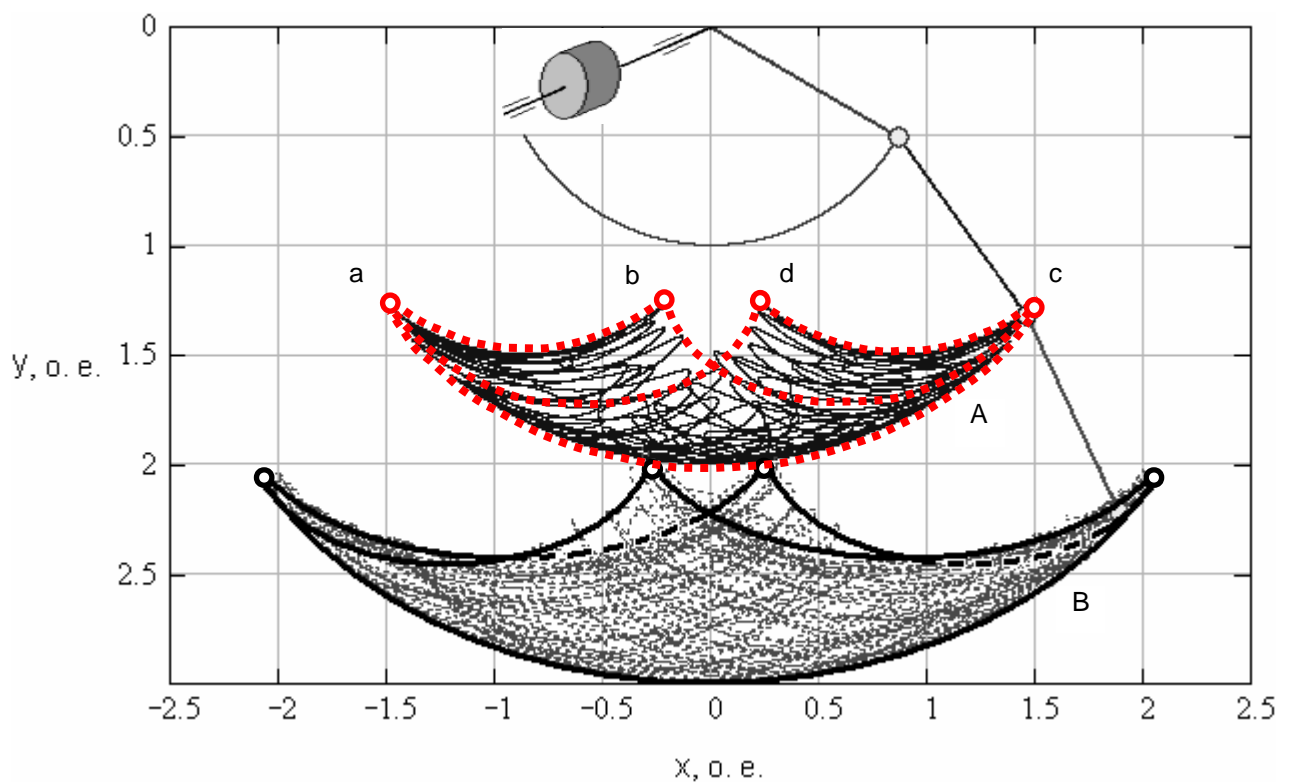


Рис. 6 – Графики изменения координат во времени для центров масс трехплечевой системы маятников



a)



б)

Рис. 7 – Траектории, описываемые исследуемой механической системой при преобладающем влиянии момента инерции маховика: а) 75 тыс. точек; б) 255 тыс. точек

«с» радиуса  $R_2$  и участками кривых «а» и «b» (где «а», «b» и «с» – кривые, ограничивающие геометрическое место точек траектории центра массы груза  $m_2$ ), имеет геометрическое подобие с фиг. В, образованной участками той же траектории. Множество подобных фигур, в т. ч. и зеркальных, можно построить также на криволинейных отрезках траектории 3-го груза.

Для обеих траекторий также характерными являются структурные элементы, подобные фиг. С (четырёхугольники, образованные замкнутой ломанной, состоящей из криволинейных отрезков – участков траектории). Данные элементы можно найти в различных местах рисунка, причем некоторые из них смещены друг относительно друга, а некоторые являются вложенными друг в друга; некоторые из них пространственно отделены от остальных, а некоторые имеют общие вершины или стороны. Таким образом, очевидным является фрактальный характер фазовых траекторий рассматриваемой системы (который можно также описать как «сеточный» или «ячеистый»).

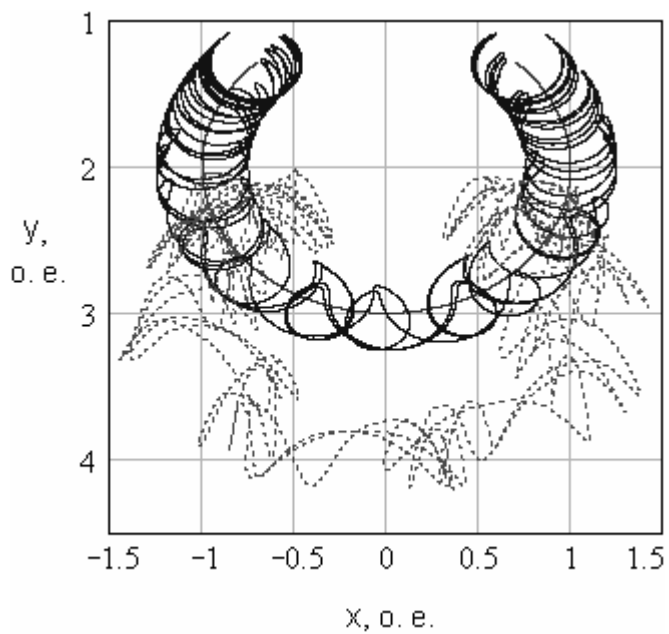
С другой стороны фиг. А на рис. 7, а можно рассматривать как часть видимого контура тора, спроектированного на плоскость (где т. 1 – точка пересечения видимых контуров). Кроме того, фиг. С также приближается к плоскому отображению четырехугольного участка поверхности гладкого тора. При увеличении числа точек моделирования (рис. 7, б) мелкие структурные элементы становятся неразборчивыми ввиду низкой разрешающей способности рисунка. Однако геометрическое подобие рассматриваемых фигур плоскому отображению четырехугольного участка поверхности гладкого тора становится еще более очевидным.

На рис. 8 приведены результаты моделирования движения той же системы маятников при других начальных условиях. Данные рисунки вызывают у наблюдателя стойкую иллюзию того, что он рассматривает траектории движения маятников в трехмерном пространстве, а не на плоскости (что не удивительно, т. к. рассматриваемая система имеет три степени свободы). Тот факт, что сложные фигуры, образованные точками траекторий центров масс, во-первых, имеют фрактальный характер, и, во-вторых, приближаются к гладким отображениям поверхностей на плоскость, позволяет нам утверждать, что движение данной системы можно анализировать с позиций теории катастроф (теории особенностей и бифуркаций) [4, 5]. Задачей такого анализа может быть прогнозирование и предупреждение выходов из строя (поломок) оборудования, а также оценка воздействия отдельных подсистем на работу системы в целом, например оценка влияния электроустановки на питающую сеть.

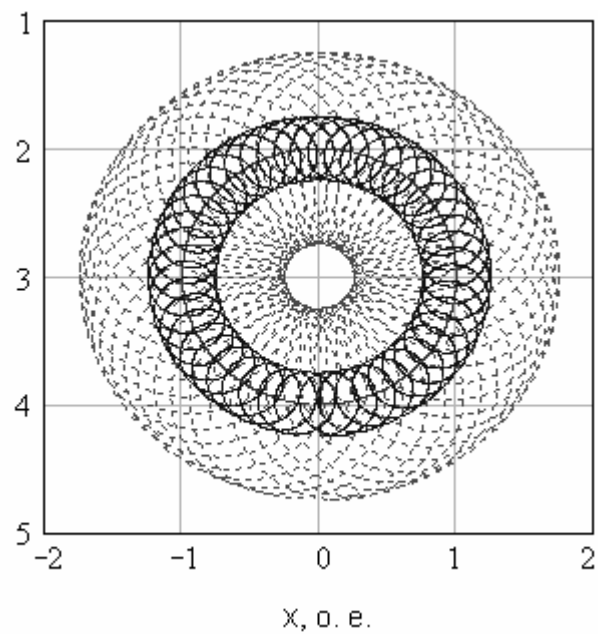
#### **Выводы:**

1. Некоторые электромеханические и механические системы включают механизмы и узлы с несколькими степенями свободы, характеризующиеся сложным вращательно-колебательным движением сосредоточенных и распределенных масс по криволинейным траекториям различных порядков; при этом центры вращения могут совпадать с центрами масс и/или с осями шарнирных соединений, либо находятся в пределах геометрического места точек, определяемого имеющимися степенями свободы и геометрическими размерами деталей

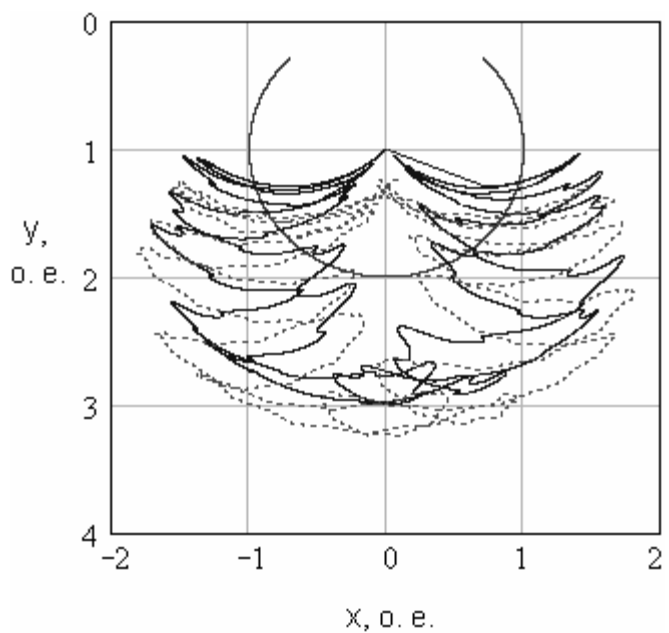




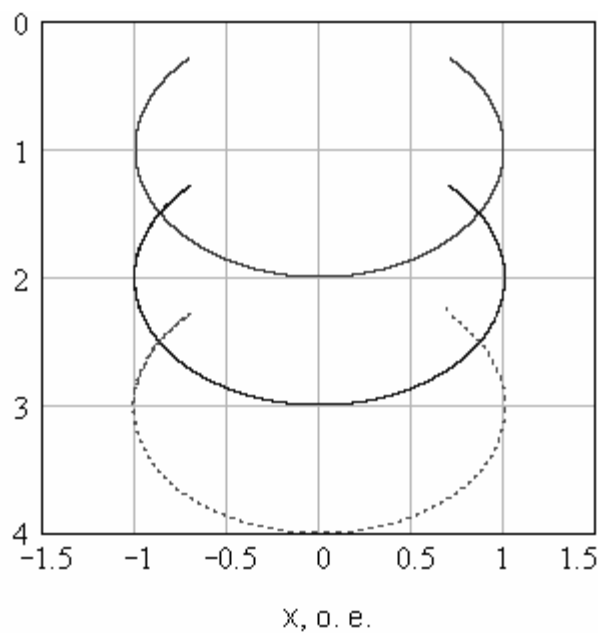
а)



б)



в)



г)

Рис. 8 – Фазовые траектории, описываемые центрами масс маятников, движущихся в одной плоскости: траектории приближаются к отображениям различных криволинейных поверхностей на указанную плоскость

этих механизмов; в общем случае центры вращения смещаются в процессе движения масс, описывая сложные траектории.

2. Одним из необходимых условий адекватности программной модели механической или электромеханической системы с эксцентрически неуравновешенными вращающимися относительно нефиксированных центров массами является достоверное определение координат центров вращения и векторов мгновенной скорости, в частности методом итерационных приближений.

3. Порядок вычисления внутри одной итерации взаимозависимых угловых ускорений эксцентрически неуравновешенных масс для системы, проявляющей себя как генератор динамического хаоса, существенно влияет на численные значения текущих координат центров этих масс в каждый последующий момент времени после прохождения ближайшей области локальной неустойчивости, однако не изменяет качественно характер протекающих процессов и общие энергетические характеристики модели.

4. При одном и том же значении шага интегрирования по времени уменьшение допустимой погрешности итераций от 0,1 о. е. до 0,01 о. е. существенно улучшает качество модели по критерию постоянства полной энергии системы; дальнейшее уменьшение допустимой погрешности итераций практически не влияет на качество моделирования и не целесообразно, поскольку уменьшение шага счета по времени является в данном случае более эффективным.

5. Траектории центров масс системы связанных маятников даже в приложении к плоской задаче образуют сложные фигуры, имеющие фрактальный характер, которые могут рассматриваться как гладкие отображения поверхностей на плоскость, имеющие складки и сборки. Следовательно, движение таких систем можно анализировать с точки зрения теории катастроф для выявления (а в технических приложениях – для прогнозирования и предупреждения) скачкообразных изменений, возникающих в виде внезапных ответов на плавное изменение условий (в технических приложениях – постепенный износ деталей, плавное увеличение нагрузок, нарушение температурных режимов, ухудшение параметров изоляции, плавное насыщение магнитных систем и др. факторы по отдельности и в комплексе).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
2. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
3. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
4. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. – К.: Наук. Думка, 2005. – 358 с.
5. Усаченко Б.М., Паламарчук Т.А., Слащева Е.А. Исследование синергетических и волновых процессов в массиве горных пород // Горный информационно-аналитический бюллетень. – М.: МГУ, 2000. – № 8. – С. 182-184.