УДК 512.54

А. С. Олійник

Ізоморфні зображення амальгамованих добутків нескінченних циклічних груп скінченно становими автоморфізмами p-адичного кореневого дерева

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Встановлено, що амальгамовані вільні добутки нескінченних циклічних груп, які є резидуально скінченними p-групами, діють точно скінченно становими автоморфізмами p-адичного кореневого дерева $\mathcal{T}_p$, що містяться в p-силовській підгрупі його групи автоморфізмів.

1. Групи автоморфізмів регулярних кореневих дерев є важливим джерелом різноманітних прикладів, які відіграють помітну роль у дослідженнях з алгебри, геометрії, голоморфної динаміки, гармонічного аналізу та ергодичної теорії (див. [1, 2] та списки літератури в них). Особливо цікавими і зручними для вивчення є ті приклади, які задаються за допомогою скінченних автоматів або, інакше кажучи, є групами скінченно станових автоморфізмів кореневих дерев. Тому природно виникає задача систематичного дослідження таких груп. Але насамперед потрібно з'ясувати, які групи допускають точні дії скінченно становими автоморфізмами (зокрема, з певними додатковими властивостями) кореневих дерев.

Нехай $\mathcal{X}$ — деякий клас груп. Нагадаємо (див., напр., [3, с. 56]), що група G називається резидуально $\mathcal{X}$-групою, якщо для кожного неодиничного елемента $g \in G$ існує нормальна підгрупа N_g в G така, що $g \notin N_g$ і факторгрупа G/N_g належить класу $\mathcal{X}$. Якщо $\mathcal{X}$ — клас скінченних p-груп, то резидуально $\mathcal{X}$-групи називають резидуально скінченними p-групами.

Кожна зліченна резидуально скінченна p-група ізоморфно занурюється в p-силовську підгрупу групи автоморфізмів регулярного кореневого дерева $\mathcal{T}_p$ [4]. Проте питання про існування занурення, образ якого є скінченно становим, потрібно досліджувати окремо. У цій роботі розглядаються амальгамовані вільні добутки скінченного числа нескінченних циклічних груп, які є резидуально скінченними p-групами. Побудовано точні зображення таких груп скінченно становими автоморфізмами з силовської p-підгрупи групи автоморфізмів регулярного кореневого дерева $\mathcal{T}_p$. Ми встановлюємо, що має місце така

Теорема 1. *Кожен амальгамований вільний добуток скінченного числа нескінченних циклічних груп, який є резидуально скінченною p-групою, ізоморфно занурюється в підгрупу скінченно станових автоморфізмів p-силовської підгрупи групи автоморфізмів p-адичного кореневого дерева.*

2. Нагадаємо необхідні поняття і твердження про кореневі дерева та їх групи автоморфізмів (докладніше див., напр., [1, 2]). Нехай n — натуральне число, $n \geqslant 2$. Символом $\mathcal{T}_n$ позначимо n-адичне кореневе дерево, тобто регулярне дерево з виділеною вершиною валентності n, кожна інша вершина якого має валентність $n+1$. Множину вершин дерева $\mathcal{T}_n$, які з'єднані з його коренем, називатимемо першим рівнем цього дерева, множину вершин, які з'єднані з вершинами першого рівня і відмінні від кореня, — другим рівнем і т. д. Вважатимемо, що корінь утворює нульовий рівень. Скінченне кореневе піддерево, що складається з усіх вершин від нульового до m-го рівнів, позначимо $\mathcal{T}_{n,m}$, $m \geqslant 1$.

Зафіксуємо деяку множину символів X, $|X| = n$, яку називатимемо алфавітом, і нехай X^* — множина всіх слів над X. Для кожної вершини дерева $\mathcal{T}_n$ зафіксуємо біекцію між вершинами наступного рівня, які з'єднані з цією вершиною, і символами алфавіту X. Кореню дерева $\mathcal{T}_n$ поставимо у відповідність порожнє слово $\Lambda \in X^*$. Тоді множині вершин дерева $\mathcal{T}_n$ взаємно однозначно ставиться у відповідність множина X^*, тобто маємо розмітку вершин дерева $\mathcal{T}_n$ словами над алфавітом X. Множині вершин m-го рівня при цьому відповідає множина X^m слів довжини m. Далі будемо ототожнювати вершини з їх помітками. Для кожного слова $v \in X^*$ операція приписування слова v зліва до всіх слів з X^* визначає ізоморфізм кореневого дерева $\mathcal{T}_n$ і його кореневого піддерева $\mathcal{T}_{n,v}$ з коренем у вершині v.

Позначимо символом GA_n групу автоморфізмів кореневого дерева $\mathcal{T}_n$. Ця група ізоморфна вінцевому добутку за нескінченною послідовністю симетричних груп S_n степеня n [1]

$$GA_n \simeq \wr_{i=1}^{\infty} S^{(i)}, \qquad S_n^{(i)} \simeq S_n. \tag{1}$$

Це означає, що кожен автоморфізм $g \in GA_n$ однозначно записується рекурентно у вигляді

$$g = (g_x, x \in X)\pi, \tag{2}$$

де $g_x \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}_n$, $x \in X$, а $\pi \in S_n$. Автоморфізм g_x діє на кореневому дереві $\mathcal{T}_{n,x}$, $x \in X$, а підстановка σ переставляє вершини першого рівня разом з піддеревами, коренями яких є ці вершини. Автоморфізми g_x, $x \in X$, називаються станами першого рівня автоморфізму g, а підстановка σ — його кореневою підстановкою. Станами другого рівня g називають стани першого рівня автоморфізмів g_x, $x \in X$. Індуктивно визначаються стани k-го рівня g для кожного натурального k. Станом 0-го рівня g є сам g. Таким чином, кожній вершині v дерева $\mathcal{T}_n$ відповідає стан g_v автоморфізму g. Дерево $\mathcal{T}_n$, кожна вершина v якого помічена кореневою підстановкою відповідного стану g_v, називається портретом автоморфізму g. Використовуючи аналогічну розмітку усіх невисячих вершин дерева $\mathcal{T}_{n,m}$ (висячі вершини не розмічаються), будемо говорити про портрет автоморфізму дерева $\mathcal{T}_{n,m}$.

Автоморфізм $g \in GA_n$ називається скінченно становим, якщо g має лише скінченну кількість різних станів. Усі скінченно станові автоморфізми утворюють підгрупу FGA_n в $\operatorname{Aut} \mathcal{T}_n$.

Будемо надалі використовувати символ e для позначення як тотожного автоморфізму дерева $\mathcal{T}_n$ чи $\mathcal{T}_{n,m}$, так і одиничної підстановки множини X.

3. Зафіксуємо просте число p і розглянемо кореневе дерево $\mathcal{T}_p$. Для нумерації його вершин будемо використовувати алфавіт $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Група GA_p проскінченна, а тому містить єдину з точністю до спряженості p-силовську підгрупу, яку позначатимемо символом SGA_p [5]. Група SGA_p розкладається у вінцевий добуток за нескінченною послідовністю регулярних циклічних груп порядку p [1]. Зафіксуємо цикл $\sigma = (0\,1 \ldots p-1)$ довжини p. Елементами групи SGA_p будуть ті автоморфізми з GA_p, у чиїх портретах усі помітки вершин є степенями циклу σ. Позначимо символом $FSGA_p$ перетин підгруп FGA_p і SGA_p групи GA_p.

Усі необхідні означення і твердження про амальгамовані вільні добутки груп можна знайти в [3]. Розглянемо амальгамований вільний добуток m ($m \geqslant 2$) нескінченних циклічних груп, об'єднаних за нетривіальною власною підгрупою кожної з них. Позначимо твірні елементи цих груп $g_1, \ldots, g_m$ відповідно. Оскільки об'єднана підгрупа є власною неодиничною в кожній з них, то вона породжується, відповідно, елементами $g_1^{k_1}, \ldots, g_m^{k_m}$ для деяких натуральних $k_1, \ldots, k_m \geqslant 2$. Це означає, що такий амальгамований добуток має задання твірними та визначальними співвідношеннями виду

$$\langle y_1, \ldots, y_m \mid y_1^{k_1} = \cdots = y_m^{k_m} \rangle.$$

Позначимо його $G(k_1, \ldots, k_m)$.

З результатів робіт [4, 6] випливає

Твердження 1. *Група $G(k_1, \ldots, k_m)$ ізоморфно занурюється в групу SGA_p тоді й лише тоді, коли кожне з чисел $k_1, \ldots, k_m$ є степенем числа p.*

4. Зафіксуємо числа $k_1, \ldots, k_m \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, і опишемо конструкцію явного ізоморфного занурення амальгамованого добутку $G(p^{k_1}, \ldots, p^{k_m})$ у групу $FSGA_p$.

Нехай $k = k_1 + \cdots + k_m$. Визначимо слова $\overline{0}_i \in X^*$, поклавши $\overline{0}_i = \underbrace{0 \ldots 0}_{i}$, $i \geqslant 1$, $\overline{0}_0 = \Lambda$.

Множину слів

$$\{\overline{0}_0, \ldots, \overline{0}_{k-1}\},$$

впорядковану за зростанням їх довжин, розіб'ємо на m підмножин $D_1, \ldots, D_m$, включивши в D_1 перші k_1 слів, у D_2 — наступні k_2 і т. д., у D_m — останні k_m слів. Визначимо m автоморфізмів $c_1, \ldots, c_m$ дерева $\mathcal{T}_{p,k}$, задавши їх портрети. У портреті автоморфізму c_i поміткою всіх вершин з множини D_i буде $\sigma = (0\,1 \ldots p-1)$, а решта вершин отримують помітку e, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лема 1. *Порядок автоморфізму c_i у групі автоморфізмів дерева $\mathcal{T}_{p,k}$ дорівнює p^{k_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Доведення леми 1 проводиться індукцією за числом k_i.

Позначимо символом O_i орбіту вершини $\overline{0}_k$ при дії циклічної групи $\langle c_i \rangle$ на X^k, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Лема 2. *Довжина орбіти O_i дорівнює p^{k_i}. Всі інші орбіти циклічної групи $\langle c_i \rangle$ на вершинах k-го рівня дерева $\mathcal{T}_{p,k}$ або тривіальні, або також мають довжину p^{k_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Лема 3. *Попарні перетини орбіт $O_1, \ldots, O_k$ одноелементні.*

Доведення лем 2 і 3 здійснюється прямим обчисленням вказаних орбіт з використанням означення автоморфізмів $c_1, \ldots, c_m$.

Визначимо два набори $a_1, \ldots, a_m$ та $b_1, \ldots, b_m$ автоморфізмів дерева $\mathcal{T}_p$. Скористаємось розкладом

$$GA_p \simeq \operatorname{Aut} \mathcal{T}_{p,k} \wr GA_p,$$

який прямо випливає з (1). Він дозволяє для задання автоморфізму $g \in GA_p$ використовувати рекурсію

$$g = (g_v, v \in X^k)c, \qquad \text{де} \qquad g_v \in GA_p, \qquad v \in X^k, \qquad c \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}_{p,k}, \tag{3}$$

аналогічну (2). Для кожного $i \in \{1, \ldots, m\}$ за допомогою зображення (3) визначимо автоморфізми

$$a_i = (d_{i,v}, v \in X^k)c_i, \qquad b_i = (d_{i,v}, v \in X^k)e,$$

де

$$d_{i,v} = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } v \in \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{m} O_j\Big)^{\langle a_i \rangle} \setminus O_i, \\ b_i, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Лема 4. *Автоморфізми* a_i *та* b_i *містяться в групі* $FSGA_p$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Справді, з означення прямо випливає, що a_i та b_i лежать в SGA_p. Крім того, кожен з них має не більше $2\dfrac{p^k - 1}{p - 1}$ різних станів, звідки маємо твердження леми.

Лема 5. *Кожен з автоморфізмів* a_i *та* b_i *має порядок* p^{k_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$.

З лем 2 і 3 випливає, що мають місце рівності

$$a_i^2 = (d_{i,v}^2, v \in X^k)c_i^2, \qquad b_i^2 = (d_{i,v}^2, v \in X^k)e.$$

Після цього твердження леми 5 одержуємо застосуванням леми 1.

Розглянемо автоморфізм a з групи GA_p, задавши його за допомогою рекурсії вигляду (2):

$$a = (e, \ldots, e, a)\sigma.$$

Лема 6 [1]. *Автоморфізм* a *міститься в групі* $FSGA_p$ *і має нескінченний порядок.*

Нехай $L = p^{k_1 + \cdots + k_m}$, $l_i = L/p^{k_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Розглянемо автоморфізми

$$g_i = (a_i, a^{l_i}, \ldots, a^{l_i}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

і

$$h = (e, a^L, \ldots, a^L), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Позначимо $G_i = \langle g_i \rangle$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $H = \langle h \rangle$.

Лема 7. *Кожна з підгруп* G_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, *є нескінченною підгрупою* $FSGA_p$. *Для довільних* i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, *має місце рівність* $G_i \bigcap G_j = H$.

Перша частина леми 7 випливає з лем 4 і 6, а друга — з рівностей

$$g_1^{k_1} = \cdots = g_m^{k_m} = h$$

і леми 3.

Нехай тепер $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. З леми 7 випливає, що $G < FSGA_p$ і G породжується своїми циклічними підгрупами $G_1, \ldots, G_m$, перетин яких дорівнює H. Має місце

Теорема 2. *Група* G *ізоморфна амальгамованому добутку* $G(p^{k_1}, \ldots, p^{k_m})$.

Для доведення використовуємо теорему про канонічний вигляд елемента амальгамованого добутку [3, с. 179]. Досить показати, що в групі G для кожного $s > 1$ добуток

$$h_0 h_1 \ldots h_s,$$

в якому $h_0 \in H$, $h_0 \neq e$, $h_1 \in G_{j_1} \setminus H, \ldots h_s \in G_{j_s} \setminus H$, $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, m\}$, причому $j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_s$, визначає неодиничний автоморфізм дерева $\mathcal{T}_p$. Це випливає з того, що вершина $\overline{0}_{ks+1}$ цього дерева під дією такого автоморфізму не є нерухомою.

Теорема 1 тепер випливає з теореми 2.

1. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – **231**. – С. 134–214.
2. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. – Providence, RI: AMS, 2005. – 232 p.
3. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – Berlin: Springer, 1993. – 482 p.

4. *Сущанський В. І.* Групи скінченно автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1999. – № 2. – С. 29–32.
5. *Wilson J.* Profinite groups. – Oxford: Clarendon Press, 1998. – 284 p.
6. *Kim G., McCarron J.* Some residually p-finite one-relator groups // J. Algebra. – 1994. – **169**. – P. 817–826.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 30.04.2010

A. S. Oliynyk

Isomorphic representations of amalgamated products of infinite cyclic groups by finite state automorphisms of a p-adic rooted tree

It is shown that the amalgamated free products of infinite cyclic groups that are residually finite p-groups admit faithful actions by finite state automorphisms of a p-adic rooted tree $\mathcal{T}_p$ contained in the p-Sylow subgroup of its automorphism group.