УДК 539.3

Член-кореспондент НАН України **Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, У. В. Жидик, В. М. Флячок**

Термомеханічна модель неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями

Розвинуто уточнену математичну модель динамічної задачі взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням початкових деформацій та анізотропії термомеханічних властивостей матеріалу як у напрямку координатних ліній серединної поверхні, так і в трансверсальному напрямку.

Пружні оболонки як важливі елементи багатьох конструкцій широко використовуються в різних областях сучасної техніки. Тому розрахунок таких елементів конструкцій на температурні напруження залишається проблемою, яка цікавить інженерів [1, 2]. Більшість досліджень у цьому напрямі стосувались однорідних конструкцій з традиційних матеріалів на основі моделей ізотропного [2–4] або ортотропного тіла [2, 5]. Для неоднорідних анізотропних матеріалів такі дослідження проводилися значно менше [6, 7].

Метою повідомлення є розвиток лінійної математичної моделі динамічної поведінки податливих поперечним деформаціям зсуву і стисненню неоднорідних анізотропних термопружних оболонок з урахуванням початкових деформацій та анізотропії матеріалу як у площині серединної поверхні, так і в напрямку її нормалі.

Нехай оболонка сталої товщини $2h$, серединна поверхня якої віднесена до ортогональних криволінійних координат α_1, α_2, нагрівається нерівномірним температурним полем t, зумовленим зовнішнім нагрівом або деформацією оболонки. A_1, A_2 — коефіцієнти Ламе серединної поверхні, k_1, k_2 — головні кривини, z — координата у напрямку зовнішньої нормалі до серединної поверхні. Матеріал оболонки вважаємо неоднорідним по товщині і анізотропним, що має в кожній точці одну площину пружної і теплової симетрії, до якої перпендикулярна вісь z. На оболонку також діють власні напруження, зумовлені несумісністю дисторсій [8], та поверхневе навантаження. Тоді, використовуючи методи термодинаміки необоротних процесів і подання вектора переміщень і температурного поля лінійними функціями від нормальної координати [9], для вільної енергії, віднесеної до одиниці площі серединної поверхні оболонки і її диференціалу, одержимо такі вирази:

$$F = F_0(t) + \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i,j}^{2}\sum_{k,l}^{2}\big(A_{ijkl}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^0)(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^0) + 2B_{ijkl}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^0)(æ_{kl}-æ_{kl}^0) +$$

$$+ D_{ijkl}(æ_{ij}-æ_{ij}^0)(æ_{kl}-æ_{kl}^0)\big) + \sum_{i,k}^{2}\big(A_{i3k3}(\varepsilon_{i3}-\varepsilon_{i3}^0)(\varepsilon_{i3}-\varepsilon_{k3}^0) +$$

$$+ 2B_{i3k3}(\varepsilon_{i3}-\varepsilon_{i3}^0)(æ_{k3}-æ_{k3}^0) + D_{i3k3}(æ_{i3}-æ_{i3}^0)(æ_{k3}-æ_{k3}^0)\big) +$$

$$+ \sum_{i,j}^{2}(A_{ij33}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^0)(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33}^0) + 2B_{ij33}(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33}^0)(æ_{ij}-æ_{ij}^0)) +$$

$$+ A_{3333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0)(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0)\Bigg] -$$

$$- \left[\sum_{i,j}^{2}(A_{ij}^t(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + B_{ij}^t(æ_{ij} - æ_{ij}^0)) + A_{33}^t(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0)\right] T_1 -$$

$$-\frac{1}{h}\left[\sum_{i,j}^{2}(B_{ij}^t(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^0)+D_{ij}^t(æ_{ij}-æ_{ij}^0))+B_{33}^t(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{33}^0)\right] T_2-\frac{1}{2T_0}\sum_{n,m}^{2} C_e^{(n,m)} T_n T_m; \quad (1)$$

$$dF = -\int_{-h}^{h} S(1 + k_1 z)(1 + k_2 z)\, d\widetilde{T} dz +$$

$$+ \sum_{i,j}^{2}(N_{ij} d\varepsilon_{ij} + M_{ij} dæ_{ij} + N_{i3} d\varepsilon_{i3} + M_{i3} dæ_{i3}) + \mathrm{N}_{33} d\varepsilon_{33}, \qquad (2)$$

де

$$C_e^{(n,m)} = \int_{-h}^{h} c_e \left(\frac{z}{h}\right)^{n+m-2} dz; \qquad T_n = \frac{2n-1}{2h^n}\int_{-h}^{h} t z^{n-1} dz;$$

A_{ijkl}, B_{ijkl}, D_{ijkl} — інтегральні характеристики жорсткості оболонки; A_{ij}^t, B_{ij}^t, D_{ij}^t — інтегральні характеристики коефіцієнтів термопружності; $(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{i3}, æ_{ij}, æ_{i3})$ — компоненти деформації серединної поверхні; $(\varepsilon_{ij}^0, \varepsilon_{33}^0, \varepsilon_{i3}^0, æ_{ij}^0, æ_{i3}^0)$ — інтегральні характеристики компонентів початкової деформації (дисторсій) [9]; S — питома ентропія; $c_e(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — питома теплоємність; $\widetilde{T}$ — абсолютна температура; T_0 — початкова температура; t — приріст температури.

Із формул (1) і (2) випливають фізичні співвідношення термопружності неоднорідних анізотропних оболонок для зусиль N_{ij} і моментів M_{ij}. Обмежившись жорсткостями не вище другого порядку і перейшовши до двоіндексних позначень, запишемо ці співвідношення у вигляді

$$N_{11} = [A_{11} + (k_2 - k_1)B_{11} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{11}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + A_{12}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) +$$

$$+ A_{16}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + (A_{13} + k_2 B_{13})(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) +$$

$$+ [A_{16} + (k_2 - k_1)B_{16} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{16}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) +$$

$$+ [B_{11} + (k_2 - k_1)D_{11}](æ_{11} - æ_{11}^0) + B_{12}(æ_{22} - æ_{22}^0) +$$

$$+ [B_{16} + (k_2 - k_1)D_{16}](æ_{12} - æ_{12}^0) +$$

$$+ B_{16}(æ_{21} - æ_{21}^0) - (A_{11}^t + k_2 B_{11}^t)T - (B_{11}^t + k_2 D_{11}^t)\frac{T^*}{h}, \qquad (1 \Leftrightarrow 2),$$

$$N_{12} = [A_{16} + (k_2 - k_1)B_{16} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{16}](\varepsilon_{11} - \varepsilon_{11}^0) + A_{26}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^0) +$$

$$+ A_{66}(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{21}^0) + (A_{36} + k_2 B_{36})(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) +$$

$$+ [A_{66} + (k_2 - k_1)B_{66} + (k_1^2 - k_1 k_2)D_{66}](\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0) +$$

$$+[B_{16}+(k_2-k_1)D_{16}](\text{æ}_{11}-\text{æ}^0_{11})+B_{26}(\text{æ}_{22}-\text{æ}^0_{22})+[B_{66}+(k_2-k_1)D_{66}](\text{æ}_{12}-\text{æ}^0_{12})+$$
$$+B_{66}(\text{æ}_{21}-\text{æ}^0_{21})-(A^t_{12}+k_2B^t_{12})T-(B^t_{12}+k_2D^t_{12})\frac{T^*}{h}, \qquad (1\Leftrightarrow 2),$$
$$N_{33}=(A_{13}+k_2B_{13})(\varepsilon_{11}-\varepsilon^0_{11})+(A_{23}+k_1B_{23})(\varepsilon_{22}-\varepsilon^0_{22})+(A_{36}+k_2B_{36})(\varepsilon_{12}-\varepsilon^0_{12})+$$
$$+[A_{33}+(k_2+k_1)B_{33}+k_1k_2D_{33}](\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})+(A_{36}+k_1B_{36})(\varepsilon_{21}-\varepsilon^0_{21})+$$
$$+(B_{13}+k_2D_{13})(\text{æ}_{11}-\text{æ}^0_{11})+(B_{23}+k_1D_{23})(\text{æ}_{22}-\text{æ}^0_{22})+ \qquad (3)$$
$$+(B_{36}+k_2D_{36})(\text{æ}_{12}-\text{æ}^0_{12})\text{æ}_{12}+(B_{36}+k_1D_{36})(\text{æ}_{21}-\text{æ}^0_{21})-$$
$$-[A^t_{33}+(k_1+k_2)B^t_{33}+k_1k_2D_{33}]T-[B^t_{33}+(k_1+k_2)D^t_{33}]\frac{T^*}{h},$$
$$N_{13}=k'\{A_{45}(\varepsilon_{23}-\varepsilon^0_{23})+[A_{55}+(k_2-k_1)B_{55}+(k_1^2-k_1k_2)D_{55}](\varepsilon_{13}-\varepsilon^0_{13})+$$
$$+[B_{55}+(k_2-k_1)D_{55}](\text{æ}_{13}-\text{æ}^0_{13})+B_{45}(\text{æ}_{23}-\text{æ}^0_{23})\}, \qquad (1\Leftrightarrow 2), \qquad (4\Leftrightarrow 5),$$
$$M_{13}=k'\{B_{45}(\varepsilon_{23}-\varepsilon^0_{23})+[B_{55}+(k_2-k_1)D_{55}](\varepsilon_{13}-\varepsilon^0_{13})+D_{55}(\text{æ}_{13}-\text{æ}^0_{13})+$$
$$+D_{45}(\text{æ}_{23}-\text{æ}^0_{23})\}, \qquad (1\Leftrightarrow 2), \qquad (4\Leftrightarrow 5),$$
$$M_{11}=[B_{11}+(k_2-k_1)D_{11}](\varepsilon_{11}-\varepsilon^0_{11})+B_{12}(\varepsilon_{22}-\varepsilon^0_{22})+(B_{13}+k_2D_{13})(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})+$$
$$+[B_{16}+(k_2-k_1)D_{16}](\varepsilon_{12}-\varepsilon^0_{12})+B_{16}(\varepsilon_{21}-\varepsilon^0_{21})+D_{11}(\text{æ}_{11}-\text{æ}^0_{11})+D_{12}(\text{æ}_{22}-\text{æ}^0_{22})+$$
$$+D_{16}(\text{æ}_{12}-\text{æ}^0_{12}+\text{æ}_{21}-\text{æ}^0_{21})-(B^t_{11}+k_2D^t_{11})T-D^t_{11}\frac{T^*}{h}, \qquad (1\Leftrightarrow 2),$$
$$M_{12}=[B_{16}+(k_2-k_1)D_{16}](\varepsilon_{11}-\varepsilon^0_{11})+B_{26}(\varepsilon_{22}-\varepsilon^0_{22})+(B_{36}+k_2D_{36})(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})+$$
$$+[B_{66}+(k_2-k_1)D_{66}](\varepsilon_{12}-\varepsilon^0_{12})+B_{66}(\varepsilon_{21}-\varepsilon^0_{21})+D_{16}(\text{æ}_{11}-\text{æ}^0_{11})+$$
$$+D_{26}(\text{æ}_{22}-\text{æ}^0_{22})+D_{66}(\text{æ}_{12}-\text{æ}^0_{12}+\text{æ}_{21}-\text{æ}^0_{21})-$$
$$-(B^t_{12}+k_2D^t_{12})T-D^t_{12}\frac{T^*}{h}, \qquad (1\Leftrightarrow 2),$$

де інтегральні характеристики коефіцієнтів мембранної A_{ij}, мембранно-згинної B_{ij} і згинної D_{ij} жорсткостей, коефіцієнтів термопружності A^t_{ij}, B^t_{ij}, D^t_{ij} та початкових деформацій ε^0_{ij}, æ^0_{ij} подаються формулами

$$\{A_{ij},B_{ij},D_{ij}\}=\int\limits_{-h}^{h}\{1,z,z^2\}c_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,z)\,dz;$$
$$\{A^t_{ij},B^t_{ij},D^t_{ij}\}=\int\limits_{-h}^{h}\{1,z,z^2\}\beta^t_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,z)\,dz;$$
$$\varepsilon^0_{ij}=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}e^0_{ij}dz, \qquad \text{æ}^0_{ij}=\frac{3}{2h^3}\int\limits_{-h}^{h}e^0_{ij}zdz,$$

k' — коефіцієнт зсуву; $T\equiv T_1$; $T^*\equiv T_2$.

Рівняння для визначення інтегральних характеристик температури T_1 і T_2 виведемо із записаного в диференціальній формі закону збереження енергії для анізотропного тіла [3, 6]. За умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем з температурою $t_c^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ і коефіцієнтами тепловіддачі $\alpha_z^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$ на поверхнях $z = \pm h$ та лінійного розподілу температури вздовж товщини одержимо таку систему рівнянь теплопровідності для неоднорідних анізотропних оболонок:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{(1)} T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(1)} T_2 - T_1 \varepsilon_1^t - T_2 \varepsilon_2^t - C^{(1)} \dot{T}_1 - C^{(2)} \dot{T}_2 - T_0 f_1(\dot{\varepsilon}, \dot{æ}) + W_1^t = \\
&\qquad = -t_1^c \varepsilon_1^t - t_2^c \varepsilon_2^t; \\
&\Delta_{(2)} T_1 + \Delta_{(3)} T_2 + \frac{2k_0}{h} \Lambda_{33}^{(2)} T_2 - \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{h^2} T_2 - T_1 \varepsilon_2^t - T_2 \varepsilon_1^t - C^{(2)} \dot{T}_1 - C^{(3)} \dot{T}_2 - \\
&\qquad - T_0 f_2(\dot{\varepsilon}, \dot{æ}) + W_2^t = -t_1^c \varepsilon_2^t - t_2^c \varepsilon_1^t.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут

$$\Delta_{(k)} = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \Lambda_{11}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \Lambda_{12}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \Lambda_{22}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \Lambda_{12}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right];$$

$$f_1(\varepsilon, æ) = \sum_{i,j}^{2} [A_{ij}^t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + B_{ij}^t (æ_{ij} - æ_{ij}^0)] + A_{33}^t (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0); \quad \varepsilon_n^t = (\alpha_z^+ - (-1)^n \alpha_z^-);$$

$$f_2(\varepsilon, æ) = \frac{1}{h} \left(\sum_{i,j}^{2} (B_{ij}^t (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + D_{ij}^t (æ_{ij} - æ_{ij}^0)) + B_{33}^t (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) \right);$$

$$t_n^c = \frac{1}{2} (t_c^+ - (-1)^n t_c^-); \qquad W_n^t = \int_{-h}^{h} w_t \left(\frac{z}{h} \right)^{n-1} dz \qquad (n = 1, 2); \qquad k_0 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2);$$

$$\{\Lambda_{ij}^{(k)}, C^{(k)}\} = \int_{-h}^{h} \{\lambda_{ij}, c_e\} \left(\frac{z}{h} \right)^{k-1} dz \qquad (k = 1, 2, 3);$$

w_t — густина теплових джерел; $\lambda_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — коефіцієнти теплопровідності.

Рівняння (3) і (4) разом з рівняннями руху

$$\begin{aligned}
&(A_2 N_{11})_{,1} - A_{2,1} N_{22} + (A_1 N_{21})_{,2} + A_{1,2} N_{12} + k_1 A_1 A_2 N_{13} = A_1 A_2 (\ddot{I}_1 - q_1), \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\
&(A_1 A_2)^{-1} [(A_2 N_{13})_{,1} + (A_1 N_{23})_{,2}] - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} = \ddot{I}_3 - q_3, \\
&(A_2 M_{11})_{,1} - A_{2,1} M_{22} + (A_1 M_{21})_{,2} + A_{1,2} M_{12} - A_1 A_2 N_{13} = A_1 A_2 (\ddot{J}_1 - m_1), \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\
&(A_1 A_2)^{-1} [(A_2 M_{13})_{,1} + (A_1 M_{23})_{,2}] - k_1 M_{11} - k_2 M_{22} - N_{33} = \ddot{J}_3 - m_3
\end{aligned} \tag{5}$$

і геометричними рівняннями

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = A_1^{-1} u_{1,1} + (A_1 A_2)^{-1} u_2 A_{1,2} + k_1 u_3, \quad \varepsilon_{12} = A_1^{-1} u_{2,1} - (A_1 A_2)^{-1} u_1 A_{1,2}, \quad (1 \Leftrightarrow 2), \\
&\varepsilon_{13} = A_1^{-1} u_{3,1} - k_1 u_1 + \gamma_1, \qquad æ_{11} = A_1^{-1} \gamma_{1,1} + (A_1 A_2)^{-1} \gamma_2 A_{1,2}, \qquad (1 \Leftrightarrow 2), \\
&æ_{12} = A_1^{-1} \gamma_{2,1} - (A_1 A_2)^{-1} \gamma_1 A_{1,2}, \qquad æ_{13} = A_1^{-1} \gamma_{3,1}, \qquad (1 \Leftrightarrow 2), \qquad \varepsilon_{33} = \gamma_3
\end{aligned} \tag{6}$$

Таблиця 1

Кут армування φ°	0	15	30	45	60	75	90
Теорія пружності	0,00	0,15	2,00	5,35	14,80	17,60	18,80
Уточнена теорія оболонок	0,00	0,11	1,24	4,65	12,00	15,62	17,88
Класична теорія оболонок	−1,30	−1,01	−1,55	0,00	1,05	0,70	1,10

складають повну систему рівнянь теорії взаємозв'язаної термопружності податливих поперечним деформаціям зсуву і стисненню неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням початкових деформацій ε_{ij}^0, $æ_{ij}^0$. Для однозначності розв'язку цієї системи на краях оболонки потрібно задати відповідні граничні і початкові умови на механічні та температурні величини.

Для підтвердження необхідності врахування поперечних характеристик суттєво анізотропного матеріалу при розрахунку температурних напружень проведемо порівняння розв'язку задач для шаруватих анізотропних оболонок на основі уточненої теорії цієї роботи і класичної теорії оболонок з розв'язком лінійної теорії пружності, яка для пружного матеріалу і малої деформації є безсумнівним стандартом точності.

Розглянемо незв'язану статичну задачу температурних напружень для чотиришарової косокутно армованої $(+\varphi^\circ/-\varphi^\circ/-\varphi^\circ/+\varphi^\circ)$ осесиметричної циліндричної оболонки з відносною товщиною $h/R = 1/21$, яка нагрівається сталою температурою $t = t^* = \mathrm{const}$. За матеріал кожного шару візьмемо графітоепоксидний композит з такими властивостями [10]: $E_1 = 138$ ГПа; $E_3 = 6{,}9$ ГПа; $\alpha_{11}^t = 1 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\alpha_{33}^t = 16{,}55 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $\nu_{21} = \nu_{23} = 0{,}25$; $G_{12} = 4{,}1$ ГПа; $G_{23} = 3{,}4$ ГПа, де індекс 1 позначає напрям вздовж волокон армування, а індекси 2, 3 — поперек волокон.

Результати обчислень відносного колового напруження $\sigma_\theta(h)/t^*$ на зовнішній поверхні оболонки $z = h$ залежно від кута армування волокон φ° наведені в табл. 1.

При цьому обчислення проводилися для трьох випадків: на основі рівнянь теорії пружності [10], на основі рівнянь уточненої теорії оболонок цієї роботи і на основі рівнянь класичної теорії оболонок [4].

З таблиці видно, що розв'язок, одержаний на основі рівнянь уточненої теорії оболонок, достатньою мірою кількісно і якісно узгоджується з точним, а неврахування поперечної нормальної деформації може призвести не тільки до значної кількісної відмінності у визначенні колових напружень, але, навіть, до якісно неправильних результатів для суттєво анізотропних матеріалів.

Таким чином, розвинуто лінійну математичну модель динамічного деформування термопружних неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням анізотропії термомеханічних властивостей матеріалу як у серединній поверхні, так і в нормальному до неї напрямку. Проведено порівняльний аналіз температурних напружень для тестової задачі теорії оболонок з відповідним розв'язком теорії пружності. З аналізу випливає, що результати, одержані на основі запропонованої моделі, кількісно і якісно узгоджуються з точними, а неврахування поперечної анізотропії матеріалу може призвести до неправильних результатів.

1. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Решение задач и анализ напряженного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 11. – С. 3–37.
2. *Keene F. W., Hetnarsky R. B.* Bibliography on thermal stresses in shells // J. Therm. Stresses. – 1990. – **13**, No 4. – P. 341–531.
3. *Коваленко А. Д.* Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – 762 с.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.

5. *Шевченко В. П., Гольцев А. С.* Термоупругий изгиб локально нагретых ортотропных оболочек // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 3. – С. 80–85.
6. *Подстригач Я. С., Ломакин В. Д., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
7. *Miller C. J., Millavect W. A., Kicher T. P.* Thermal stress analysis of layered cylindrical shells // AIAA Journal. – 1981. – **19**, No 4. – P 523–530.
8. *Николишин М. М., Жидик У. В.* Варіаційні постановки задач взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 94–103.
9. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
10. *Whitney J. M. Sun C.-T.* A refined theory for laminated anisotropic cylindrical shells // Trans. ASME. Ser. E. – 1974. – **41**, No 2. – P. 441–476.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів
Національний університет "Львівська політехніка"
Українська академія друкарства, Львів

Надійшло до редакції 25.03.2010

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **R. M. Kushnir, M. M. Nykolyshyn, U. V. Zhydyk, V. M. Flyachok**

A thermomechnical model of heterogeneous anisotropic shells with initial deformations

A refined mathematical model of the dynamical problem of coupled thermoelasticity of heterogeneous anisotropic shells accounting for initial deformations and an anisotropy of material thermomechanic properties both in the median surface and the transversal direction is developed.