



УДК [519.876.5:530.182]:553.98

© 2010

А. Я. Бомба, С. В. Ярощак

Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Скопецьким)

На основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища побудовано алгоритм числового розв'язання модельних задач двофазної фільтрації типу Баклея-Леверетта.

У даній роботі на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища [1–3] побудовано алгоритм числового розв'язання модельних задач двофазної фільтрації типу Баклея-Леверетта.

Розглядається процес двофазної ізотермічної фільтрації рідин в горизонтальному пластині-колекторі (тризв'язна криволінійна область G_z , обмежена трьома гладкими замкненими контурами: $L_* = \{x + iy: x = x_*(\tau), y = y_*(\tau), \alpha_* < \tau < \beta_*\} = \{z: f_*(x, y) = 0\}$, $L^* = \{x + iy: x = x^*(\tau), y = y^*(\tau), \alpha^* < \tau < \beta^*\} = \{z: f^*(x, y) = 0\}$, $L_0 = \{x + iy: x = x_0(\tau), y = y_0(\tau), \alpha_0 < \tau < \beta_0\} = \{z: f_0(x, y) = 0\}$, $z = x + iy$; рис. 1) провідності k від нагнітальної свердловини до експлуатаційної. Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}(p(x, y, t) -$

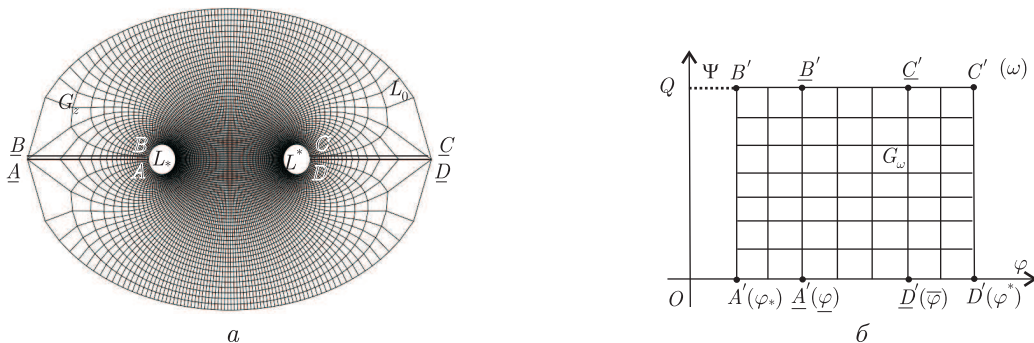


Рис. 1. Фізична область (а) та область комплексного квазіпотенціалу (б)

тиск; \tilde{p} — деяке характерне його значення) та насиченості $s = s(x, y, t)$ витісняючої фази, згідно з [4–6], наведемо у вигляді:

$$\vec{v}_1 = \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1} \text{grad } \varphi, \quad \vec{v}_2 = \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2} \text{grad } \varphi, \quad \sigma \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_1 = 0, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{v}_2 = 0,$$

де μ_1, μ_2 — динамічні в'язкості (вважаємо їх сталими), відповідно, фази, що витісняється та витісняє (наприклад, нафти і води); \vec{v}_1, \vec{v}_2 — вектори швидкості; σ — пористість; t — час; \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 — відносні фазові провідності (задані достатньо гладкими мало змінними функціями насиченості: $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s), \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$). Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії та початкових і граничних умов маємо:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0, & \vec{v} &= \bar{k} \cdot \text{grad } \varphi, & \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi_*, & \varphi|_{L^*} &= \varphi^*, & \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{L_0} &= 0, & s|_{L_*} &= s_*, \\ s(x, y, t)|_{t=0} &= \tilde{s}(x, y), & \varphi(x, y, t)|_{t=0} &= \tilde{\varphi}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}, \quad f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)},$$

$\tilde{s}(x, y), \tilde{\varphi}(x, y)$ — задані, достатньо гладкі функції, такі, що: $\tilde{s}|_{L_*} = s_*, \tilde{\varphi}|_{L_*} = \varphi_*, \tilde{\varphi}|_{L^*} = \varphi^*, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \Big|_{L_0} = 0$.

Аналогічно [2], ввівши функцію течії ψ (квазікомплексно спряжену до φ) та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії (через \underline{AA} та \underline{BB} , \underline{CC} та \underline{DD} на рис. 1 позначено відповідно верхній та нижній береги цих розрізів, де $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*), \underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0)$ — точки “призупинки” течії, $A = B = (x_*, y_*) \in L_*, C = D = (x^*, y^*) \in L^*$), приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [3] утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомими параметрами Q (повна витрата); $(x_0^*, y_0^*), (x_*^0, y_*^0); (x_*, y_*), (x^*, y^*)$; $\varphi, \tilde{\varphi}$ (потенціали в шуканих точках “призупинки” — відповідно “розходження” та “сходження” течії):

$$\bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2)$$

$$\varphi(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x, y), \quad v(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad v(x_*^0, y_*^0) = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_*} = s_*, \quad s(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (3)$$

де

$$Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy, \quad v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}.$$

Обернена до (2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізах із врахуванням їх “роздвоєння” при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії при невідомих $Q, \underline{\varphi}, \overline{\varphi}, \Gamma_*, \Gamma^*$ запишеться у вигляді:

$$\overline{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \overline{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (4)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (5)$$

$$f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \underline{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (6)$$

$$v(x(\underline{\varphi}, \psi), y(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, \quad v(x(\overline{\varphi}, \psi), y(\overline{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \psi = \{0, Q\}, \quad (7)$$

$$\varphi(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\overline{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\overline{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\overline{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\overline{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (8)$$

Використавши відповідні формули переходу

$$J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

умови (4) та формули для обчислення компонент сумарної швидкості

$$v_x = \frac{\overline{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\overline{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

задачу для насиченості (3) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \overline{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (9)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (10)$$

де рівняння (9) є фактично просторово-одновимірним (адже змінні t та ψ тут фігурують як параметри). Останнє дозволяє істотно спростити загальну стратегію (розцепити алгоритм розв’язання вихідної задачі, а саме: а) за відомим з попереднього часового кроку ітерації розподілом насиченості s розв’язуємо на наступному кроці задачу на квазіконформне відображення (4)–(8) (зокрема, будуємо динамічну сітку, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); б) за знайденим розподілом квазіпотенціалу і крайовими умовами для насиченості та розподілу s з попереднього кроку ітерації знаходимо розподіл насиченості на наступному кроці, розв’язуючи (9), (10); в) перевіряємо умову зупинки алгоритму (однією із таких умов може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини), при невиконанні якої переходимо до пункту *a* алгоритму.

Рівняння (8) для внутрішніх вузлів (φ_i, ψ_j) відповідної G_ω сіткової області $G_\omega^l = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:
 $\varphi_i = \varphi_* + i\Delta_i\varphi$, $\Delta_i\varphi = \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}$ при $i = \overline{0, n_1}$; $\varphi_i = \varphi + (i - n_1 - 1)\Delta_i\varphi$, $\Delta_i\varphi = \Delta\varphi_2 = \frac{\overline{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}$ при $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$; $\varphi_i = \overline{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta_i\varphi$, $\Delta_i\varphi = \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi_* - \overline{\varphi}}{n_3 + 1}$ при $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}$; $\psi_j = j\Delta\psi$, $\Delta\psi = \frac{Q}{m}$, $j = \overline{0, m}$; $\gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi}$, $l = \overline{1, 3}$, $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$, m – параметри розбиття області квазікомплексного потенціалу, γ_l – квазіконформні інваріанти } та граничних вузлів, що є образами “берегів” розрізів Γ_* , Γ^* , крайові умови, умови періодичності та умови ортогональності для граничних і приграничних вузлів апроксимуємо так [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_l^2 (\overline{k}_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \overline{k}_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\overline{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\overline{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma_l^2 (\overline{k}_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \overline{k}_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\overline{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\overline{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ \overline{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{\overline{k}_{i,j\pm 1} + \overline{k}_{i,j}}{2}, \quad \overline{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{\overline{k}_{i\pm 1,j} + \overline{k}_{i,j}}{2}, \\ i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ l = 2, \quad j = \overline{1, m - 1}, \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, \quad l = 3; \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad f(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ & \quad j = \overline{0, m - 1}, \\ & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ & \quad \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m - 1}, \\ & (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ & \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ & (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ & \quad \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Невідому витрату Q , параметри φ , $\overline{\varphi}$ в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi\gamma_1, \quad \overline{\varphi} = \varphi_* - (n_3 + 1)\Delta\psi\gamma_3, \quad Q = m\Delta\psi,$$

де $\Delta\psi = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta\varphi_l}{\gamma_l}$; γ_l одержуємо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1+1)} \sum_{i,j=0}^{n_1,m-1} \gamma_{i,j}, & \gamma_2 &= \frac{1}{m(n_2-1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1,m-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m(n-n_1-n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1,m-1} \gamma_{i,j}, & \gamma_{i,j} &= \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2,j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (9) апроксимуємо різницевою схемою “проти потоку” [5] таким чином:

$$\begin{aligned} \widehat{s}_{i,j} &= s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta\varphi_l} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), & s_{i-1/2,j} &= \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \\ j &= \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3, \end{aligned} \quad (15)$$

де τ — крок за часом; $s_{i,j}$, $\widehat{s}_{i,j}$ — насиченості у відповідних вузлах (i, j) на попередньому та наступному кроці ітерації за часом, формули для розрахунку швидкості записуються аналогічно роботі [2], а граничну умову для насиченості — $s_{0,j} = s_*$, $j = \overline{1, m}$.

Крім часового кроку τ , параметрів розбиття n_1 , n_2 , n_3 , m області G_ω , задаємо також параметри точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , δ_* , δ^* . Початкове наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$ та $y_{i,j}^{(0)}$ задаємо так, щоб виконувалися умови (12). Уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(\kappa)}, y_{i,j}^{(\kappa)})$ динамічної сітки одержуємо в результаті розв’язання (11) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (а саме, “нові” координати даного вузла шукаємо як узагальнено середні навколишніх “старих”) з урахуванням періодичності шуканих функцій. Як і в [2], уточнення координат даного граничного вузла проводимо за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи різницеві аналоги (13) (умови ортогональності). Наступні наближення величин Q , φ , $\bar{\varphi}$ знаходимо, використовуючи відповідне значення квазіконформного інваріанту, згідно з (14). Серед умов завершення алгоритму побудови динамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема поля швидкості) на даному часовому етапі — стабілізація витрати Q ($|Q^{(\kappa+1)} - Q^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів (i, j) ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов, відзначаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності, використовуючи співвідношення $\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \geq \delta^*$, де δ_1 , δ_2 — нев’язки апроксимацій рівнянь (4)

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l \bar{k}_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 &= \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l \bar{k}_{i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \end{aligned}$$

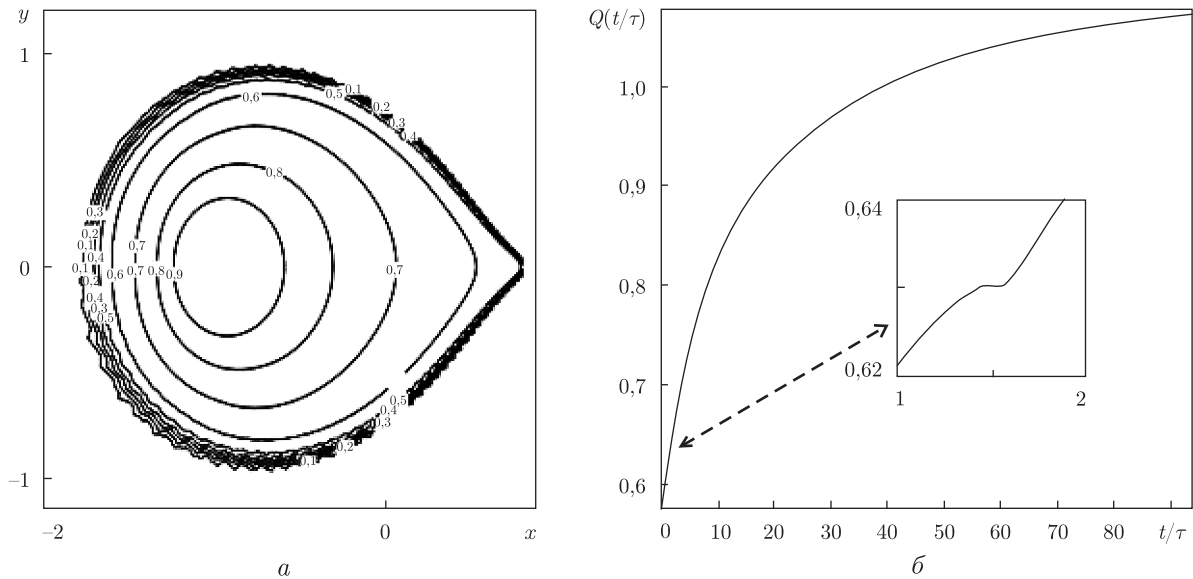


Рис. 2. Поле насиченості (а) та розподіл сумарної витрати (б)

$$i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1; \quad i = \overline{n_1 + 2, n_1 + n_2 - 1}, \quad l = 2;$$

$$i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}, \quad l = 3; \quad j = \overline{1, m - 1}.$$

Зауважимо, якщо $\delta \geq \delta_*$, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сіткової області G_ω^l (при цьому намагаємося вибрати співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m , аналогічно [2, 3]).

Використовуючи побудоване поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку (з урахуванням граничної умови), знаходимо розподіл насиченості у пласті на даному часовому етапі та повторюємо кроки алгоритму.

На рис. 1, а, 2 а, відповідно, наведені динамічна сітка в момент часу $t = 0$ у випадку $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 20 \times 80 \times 20 \times 87$ та розподіл насиченості в момент часу $t = 1,5062$ (час прориву) при $x_*(\tilde{t}) = 0,2 \cos(\tilde{t}) - 1, y_*(\tilde{t}) = 0,2 \sin(\tilde{t}), x^*(\tilde{t}) = 0,2 \cos(\tilde{t}) + 1, y^*(\tilde{t}) = 0,2 \sin(\tilde{t}), x_0(\tilde{t}) = 3 \cos(\tilde{t}), y_0(\tilde{t}) = 2 \sin(\tilde{t}), 0 \leq \tilde{t} < 2\pi, \varphi_* = 0, \varphi^* = 1, k = 1, k_1 = (1 - s)^2, k_2 = s^2, \sigma = 0,5, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1, s_* = 1, \tilde{s}(x, y) = 0, \tau = 0,0001$. Залежність сумарної фільтраційної витрати $Q = Q(t/\tau)$ від часу, яка змінюється від $Q = 0,583$ до $Q = 1,165$, подано на рис. 2, б. Як і слід було очікувати, величина Q змінюється, зростаючи від $Q(0) = 0,583$ (що відповідає наявності у пласті лише нафти) до $Q(T/\tau) = 1,165$ (де T — час повного заводнення пласта), причому “комп’ютерний” перегин відповідного графіка відповідає околу часу прориву.

Підкреслимо, що запропонований нами підхід введення спеціального типу фіктивного комплексного квазіпотенціалу (для далеко не квазіпотенціальних фізичних полів) з подальшим використанням ідей методу квазіконформних відображень і процедури поетапного “замороження” (фіксації) різних характеристик середовища та процесу дозволяє вихідну нелінійну задачу розділити на послідовність більш простих задач: крайових задач на квазіконформні відображення та нелінійних задач для просторово-одновимірних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з параметрами тощо.

1. Бомба А. Я., Пригорницький Д. О. Крайові задачі на конформні відображення для трив’язних областей з потенціалом керування // Доп. НАН України. – 2004. – № 4. – С. 57–63.

2. *Бомба А. Я., Ярошак С. В.* Метод конформних відображень математичного моделювання процесів витіснення у нафтогазових пластах: прогнозування динаміки руху лінії розділу різнокольорових рідин // Волин. математ. вісн. Сер. прикл. мат. – 2009. – Вип. 6 (15). – С. 20–35.
3. *Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
4. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – Москва: Недра, 1972. – 288 с.
5. *Каневская Р. Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. – 140 с.
6. *Zhangxin C., Guanren H., Yuanle M.* Computational methods for multiphase flows in porous media. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. – 531 p.
7. *Versteeg H. K., Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. – New York: Longman, 1995. – 267 с.

Рівненський державний гуманітарний університет

Надійшло до редакції 11.03.2010

A. Ya. Bomba, S. V. Yaroschak

The method of quasiconformal mappings for the solution of two-phase filtration model problems

On the basis of ideas of the methods of quasiconformal mappings and the step-by-step fixation of characteristics of the process and the environment, an algorithm of numerical solution of two-phase filtration Buckley–Leverett type model problems is developed.