УДК 517.988



Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

# Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана

*Досліджено просторову задачу Стефана з урахуванням конвективних рухів і домішок у рідинній фазі. Доведено рівняння вільної границі.*

**1.** Работа посвящена изучению процессов кристаллизации двухкомпонентных сред в случае, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, присутствующим в жидкой фазе вещества. Рассматриваемая задача включает в себя как двухфазную задачу Стефана, так и начально-краевую задачу для системы Навье–Стокса, описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости в нецилиндрической области. При изучении задачи учитывается скачок плотности вещества на границе раздела фаз.

Пусть $\Omega_0$ — заданная область в $R^3$, граница которой состоит из двух замкнутых связанных гладких поверхностей $\Gamma_0^+$ и $\Gamma_0^-$, не имеющих самопересечений. Пусть далее $\Gamma_0$ — гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри $\Omega_0$, такая, что $\Gamma_0^-$ лежит внутри ограниченной области, границей которой является $\Gamma_0$. Поверхность $\Gamma_0$ разбивает $\Omega_0$ на две подобласти $\Omega_0^+$ и $\Omega_0^-$, которые в начальный момент $t = 0$ заняты жидкой и твердой фазами соответственно. Будем обозначать через $\Omega_t^\pm$ область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени $t$. Заметим, что в процессе кристаллизации проходит изменение границы $\Gamma_0^+$ (это связано с тем, что жидкая и твердая фазы имеют разные плотности), а граница $\Gamma_0^-$ остается неизменной. Задача состоит в определении областей $\Omega_t^+$ и $\Omega_t^-$ (т. е. границ $\Gamma_t^+$ и $\Gamma_t$), занимаемых твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени $t \in [0, T]$, вектора скорости $\overrightarrow{V}(x,t) = (V_1(x,t), V_2(x,t), V_3(x,t))$, давления $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, распределений температур жидкой $u^+(x,t)$ и твердой $u^-(x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_T^+;\\
&\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_T^-,\\
&\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \nu\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+, c),\\
&\nabla\vec{V}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D_T^+, \qquad \overrightarrow{V}(x,0) = \overrightarrow{C}(x);\\
&T(\overrightarrow{V}, p)\overrightarrow{n} = -q(x,t)\overrightarrow{n}, \qquad (x,t) \in \Gamma_t^+; \qquad V_n = -\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right)W_n;\\
&V_\tau = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_t, \qquad u^\pm(x,t) = B^\pm(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_t^+ \bigcup \Gamma_0^-;\\
&u^\pm(x,0) = A^\pm(x); \quad u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, \quad k_-\frac{\partial u^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u^+}{\partial n} = \chi\rho^+ W_n, \quad (x,t) \in \Gamma_t,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + (\overrightarrow{V}\Delta)c(x,t) - \gamma\Delta^2 c(x,t), \qquad (x,t)\in D_T^+;$$

$$c(x,0) = g_0(x), \qquad c(x,t) = g(x,t), \qquad (x,t)\in \Gamma_t^+;$$

$$-\alpha\frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, (x,t)\in\Gamma_t.$$

Здесь $D_T^{\pm} = \{(x,t)\colon x \in {\Omega^{\pm}}_t,\ t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, ${\Omega^{\pm}}_t$ — области соответственно жидкой и твердой фаз, $\partial\Omega^+ = \Gamma_t\bigcup\Gamma_t^+$, $\partial\Omega^- = \Gamma_0^-\bigcup\Gamma_t$; $\overrightarrow{n}$ — нормаль к $\Gamma_t$, направленная в сторону $\Omega_t^+$; $T^*$, $\nu$, $\varepsilon$, $\chi$, $\rho^+$, $\rho^-$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\kappa_-$, $\kappa_+$ — положительные постоянные, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $T(\overrightarrow{V},p)$ — тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i)$; $W_n$ — скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\overrightarrow{n}$; $V_n$ и $V_\tau$ — нормальная и тангенциальная составляющие $\overrightarrow{V}$. Если $\Phi(x,t) = u^{\pm}(x,t) + \varepsilon c(x,t) - T^* = 0$ — уравнение поверхности $\Gamma_t$, тогда $W_n = -\Phi_t/|\nabla\Phi|$, $\overrightarrow{n} = \nabla(u^{\pm}+\varepsilon c)/|\nabla(u\pm\varepsilon c)|$.

Укажем, что условие Стефана можно представить также в виде $\kappa_-^2|\nabla u^-|^2 - \kappa_+^2|\nabla u^+|^2 + 2\varepsilon\kappa_-^2(\nabla u^-,\nabla c) - 2\varepsilon\kappa_+^2(\nabla u^+,\nabla c) = \chi\rho^+(\kappa_- u_t^- + \kappa_+ u_t^+)$, $(x,t)\in\Gamma_t$.

Предполагается, что $A(x)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_0^+)$, $C(x)\in H^{2+\alpha}(\Omega_0^+)$, $B^{\pm}(x,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_t^+\bigcup\bigcup\Gamma_0^-\times[0,T])$, $\overrightarrow{f}(u^+,c)\in C^1(R^2)$, $g(x,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_t^+\times[0,T])$, $g_0(x)\in H^{4+\alpha}(\overrightarrow{\Omega}_0^+)$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(R^3\times[0,T])$. Предполагается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые следуют из предположения существования гладкого решения и формулируются аналогично [1, с. 363, с. 268].

Отметим, что при малых значениях $t$ задача (1) разрешима в классе гладких функций $u^{\pm}\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, $\overrightarrow{V}\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, $C\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, $\nabla p\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D_T^{\pm}})$, а границы $\Gamma_t^+$ и $\Gamma_t$ описываются функциями, принадлежащими классам $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ [2].

Решение задачи (1) моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом переноса примеси в жидкой фазе. При этом последнее условие в (1) следует из закона Нернста, а $\overrightarrow{f}(u^+,c)$ описывает влияние неравномерного распределения температуры и концентрации примеси на движение жидкости.

**2.** Известно, что свободные границы $\Gamma_t$ и $\Gamma_t^+$ можно представить в виде $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,t)\}$, $\Gamma_t^+ = \{x = x(\omega^*) + \eta(\omega^*,t)\overrightarrow{n}(\omega^*)\}$, где $\omega = (\omega_1,\omega_2)$, $\omega^* = ({\omega^*}_1, {\omega^*}_2)$, $x(\omega)\in\Gamma_0$, $x(\omega^*)\in\Gamma_0^+$, $\rho(\omega,t)$ и $\eta(\omega^*,t)$ — некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0\times[0,T])$ и $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0^+\times[0,T])$, $\rho(\omega,0)=0$ и $\eta(\omega^*,0)=0$ [2].

Предложен метод решения задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малых чисел $\varepsilon$:

$$u^{\pm}(x,t;\varepsilon) = {u^{\pm}}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k {u^{\pm}}_k(x,t), \qquad p(x,t;\varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\varepsilon) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_{ik}(x,t), \qquad i=1,2,3; \tag{2}$$

$$\rho(\omega,t;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\rho_k(\omega,t), \qquad c(x,t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k c_k(x,t).$$

Для нулевого приближения $u^{\pm}{}_0(x)$, $\overrightarrow{V_0}(x) = (V_{10}(x), V_{20}(x), V_{30}(x))$, $\Gamma_0$ и $c_0(x)$ из условий (1) и разложения (2) вытекает следующая задача:

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_0}(x) + \nabla p_0(x) = \nu\nabla^2\overrightarrow{V_0}(x) + \overrightarrow{f}(u_0, c_0), \qquad x \in \Omega_0^+,\\
&\nabla\overrightarrow{V_0}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0^+, \qquad T(\overrightarrow{V_0}, p_0)\overrightarrow{n} = -q(x)\overrightarrow{n}, \qquad x \in \Gamma_0^+,\\
&V_n = -\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right)W_n, \qquad V_\tau = 0, \qquad x \in \Gamma_0;\\
&(\overrightarrow{V_0}\nabla)u_0^+ - a_+^2\nabla u_0^+ = 0, \qquad x \in \Omega_0^+,\\
&u_0^{\pm}(x) = B^{\pm}(x), \qquad x \in \Gamma_0^+ \bigcup \Gamma_0^-, \qquad u_0^-(x) = u_0^+(x) = T^*, \qquad x \in \Gamma_0;\\
&k_-\frac{\partial u_0^-}{\partial n} - k_+\frac{\partial u_0^+}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma_0, \qquad \nabla^2 u_0^- = 0, \qquad x \in \Omega_0^-,\\
&(\overrightarrow{V_0}\nabla)c_0 - \gamma\nabla^2 c_0 = 0, \qquad x \in \Omega_0^+, \qquad c_0(x) = g_0(x), \qquad x \in \Gamma_0^+;\\
&-\alpha\frac{\partial c_0}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma_0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь ради простоты предполагается, что функции $B^{\pm}$ и $q$ зависят только от переменной $x$.

**Лемма 1.** *Пусть функции* $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $\overrightarrow{V_0}(x) = \overrightarrow{C}(x)$, $c_0(x) = g_0(x)$ *являются решением задачи* (3) *в областях* $\Omega_0^{\pm}$ *и* $\Omega_0^+$ *соответственно. Тогда эти функции можно взять в качестве нулевого приближения задачи* (1).

**3.** Далее, пусть $Q_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0, T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T]$.

Рассмотрим первое приближение $(\overrightarrow{V_1}, u_1^{\pm}, p_1, \rho_1, c_1)$ задачи (1) для малых чисел $\varepsilon$. Имеем:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\overrightarrow{V_1}}{\partial t} + (\overrightarrow{V_1}\nabla)\overrightarrow{V_0} + (\overrightarrow{V_0}\nabla)\overrightarrow{V_1} + \nabla p_1 =\\
\qquad = \nu\nabla^2\overrightarrow{V_1} + f_u'(u_0^+, c_0)u_1^+ + \overrightarrow{f_C'}(u_0^+, c_0)c_1, \qquad (x,t) \in Q_T^+;\\
\nabla\overrightarrow{V_1} = 0, \qquad (x,t) \in Q_T^+;\\
T(\overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_1}, p_1)\overrightarrow{n} = 0, \qquad x \in \Gamma_0^+, \qquad \overrightarrow{V_1}(x, 0) = 0,\\
V_{1n} = \left(1 - \dfrac{\rho^-}{\rho^+}\right)\dfrac{u_{1t}^+}{|\nabla u_0^+|}, \qquad V_{1\tau} = 0, \qquad x \in \Gamma_0;
\end{cases}
\tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1^+}{\partial t} + (\overrightarrow{V_1}\nabla)u_0^+ + (\overrightarrow{V_0}\nabla)u_1^+ - a_+^2\nabla^2 u_1^+ = 0, \qquad (x,t) \in Q_T^+;\\
\dfrac{\partial u_1^-}{\partial t} + a_-^2\nabla^2 u_1^- = 0, \qquad (x,t) \in Q_T^-,\\
u^{\pm}(x, 0) = 0; \qquad u_1^{\pm}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_{0T}^- \bigcup \Gamma_{0T}^+,\\
u^{\pm}{}_1 = u_1^-, \qquad k_-\dfrac{\partial u_1^-}{\partial n} - 2k_+\dfrac{\partial u_1^+}{\partial n} + k_-\dfrac{\partial c}{\partial n} + f_1(x,t) = \chi\rho^+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}, \qquad (x,t) \in \Gamma_{0T};
\end{cases}
\tag{5}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial c_1}{\partial t} + (\overrightarrow{V_1}\nabla)c_0 + (\overrightarrow{V_0}\nabla)c_1 - \gamma\nabla^2 c_1 = 0, \qquad (x,t)\in Q_T^+,\\
c_1(x,0) = 0, \qquad c_1(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in\Gamma_{0T}^+,\\
-\alpha\dfrac{\partial c_1}{\partial n} = f_2(x,t), \qquad (x,t)\in\Gamma_{0T},\\
f_2(x,t) = c_0\dfrac{u_t^+}{|\nabla u_0^+|},\\
\dfrac{\partial c_0(x)}{\partial n}\eta_1(\omega,t) + c_1(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in\Gamma_{0T}^+.
\end{cases} \tag{6}
$$

Зададим теперь $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1(x,t)$. Решим задачу (5), (6) и найдем $u^{\pm}$, $c$, $\rho$, после чего заменим $u^{\pm}$, $c$, $\rho$ решением задачи (5), (6) и решим задачу (4), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье–Стокса. Затем, используя новое значение $V(x,t)$, снова решаем задачу (5) и (6) и т. д. Таким образом, получим процесс последовательных приближений. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в работе [3]. При этом при заданном $\rho_1(\omega,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u^{\pm}{}_1(x,t;\rho)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q^{\pm}{}_T})$, $c_1(x,t;\rho)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{Q^{\pm}{}_T})$, как единственное решение задачи (5), (6) [1], причем $\rho_1(\omega,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора $M_1$:

$$
M_1\rho_1 = \frac{1}{\chi\rho^+}\int\limits_0^t \Bigl(k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n} - 2k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n} + k_-\frac{\partial C}{\partial n} + f_1(x,t)\Bigr)\,dt, \qquad x(\omega)\in\Gamma_{0T}.
$$

Имеют место следующие утверждения.

**Лемма 2.** *Пусть выполнено условие $|\nabla A^+(x)| = \partial g_0(x)/\partial n$ на $\Gamma_0$. Тогда оператор $M_1$, действующий из $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.*

**Лемма 3.** *В качестве первого приближения задачи* (1) *можно взять решение задачи* (4)–(6)*: $u_1^{\pm}(x,t), c_1(x,t), \overrightarrow{V_1}(x,t), p_1(x,t), \rho_1(x,t)$.*

**Теорема.** *Пусть $\dfrac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на $\Gamma_0^+$. Тогда при малых числах $\varepsilon$ и достаточно малых значениях $t$ справедливы формулы*

$$
\Gamma_t : x = x(\omega) - \varepsilon\overrightarrow{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))|} + o(\varepsilon), \qquad (x,t)\in\Gamma_{0T},
$$

$$
\Gamma_t^+ : x = x(\omega^*) - \varepsilon\overrightarrow{n}\frac{c_1(x(\omega),t) + g_0(x(\omega)) - g(x(\omega),t)}{\dfrac{\partial g_0(x(\omega))}{\partial n}} + o(\varepsilon), \qquad (x,t)\in\Gamma_{0T}^+,
$$

*где $u_1^{\pm}(x,t)$, $c_1(x,t)$, $\rho_1(\omega,t)$, $\eta_1(\omega,t)$ — функции класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$, являющиеся решением задачи* (4)–(6).


1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 756 с.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.

3. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1388–1424.

*Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк*

*Поступило в редакцию 05.03.2010*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

## Approximation analysis of a three-dimensional Stefan problem with convection

*A three-dimensional convection Stefan problem for the liquid phase is investigated. The equation for a free boundary is obtained.*