



УДК 539.3

© 2010

В. М. Быстров, В. С. Зеленский

**О влиянии упругих характеристик покрытия  
на затухание краевого эффекта при одноосном  
продольном сжатии слоистого композитного материала**

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*Розглядається задача визначення зони крайового ефекту у шаруватому композитному матеріалі з тонким ізотропним покриттям при одноосному поздовжньому стисканні матеріалу. Досліджується залежність максимальної протяжності зони крайового ефекту від величини відношення між модулями Юнга покриття та компонент матеріалу. Розглядається випадок кусково-постійного поверхневого навантаження, період якого становить два параметри структури. Аналіз крайового ефекту здійснюється на основі чисельного розв'язку крайової задачі теорії пружності неоднорідних тіл та кількісних критеріїв згасання крайового ефекту для нормальних напружень.*

В работах [1, 2] в рамках модели кусочно-однородной среды рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистом композитном материале при наличии тонкого изотропного покрытия, расположенного перпендикулярно слоям. Упругие характеристики покрытия полагались равными упругим характеристикам наполнителя. Исследован случай одноосного продольного сжатия материала кусочно-постоянной нагрузкой при изменении ее периода. Представлены результаты вычислительного эксперимента по определению предельного элемента материала, которые учитывают структурную неоднородность материала, связанную с его микроструктурой и наличием тонкого изотропного покрытия. Показано, что наличие тонкого изотропного покрытия приводит к уменьшению длины затухания краевого эффекта для значений периода поверхностной нагрузки, превышающих параметр структуры материала. При их равенстве (равномерное сжатие слоев наполнителя) наличие покрытия практически не влияет на длину затухания краевого эффекта.

Из результатов работы [1] также следует, что основной вклад в увеличение зоны краевого эффекта при изменении периода поверхностной нагрузки вносит наличие в расчетной области одного ненагруженного слоя наполнителя, что соответствует периоду нагрузки, равному двум параметрам структуры материала. При этом максимальная протяженность

зоны краевого эффекта достигается в ненагруженном слое наполнителя. Дальнейшее увеличение периода поверхностной нагрузки приводит к незначительному увеличению протяженности зоны краевого эффекта (в пределах 5%) при ее выходе на установившееся значение. Таким образом, в качестве представительного элемента материала при исследовании краевых эффектов целесообразно использовать расчетную область, размер которой вдоль линии приложения нагрузки составляет два параметра структуры материала.

В настоящей работе для указанного представительного элемента исследуется вопрос о влиянии упругих характеристик покрытия на длину затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием. Развивается подход к определению краевых эффектов, базирующийся на использовании модели кусочно-однородной среды, уравнений линейной теории упругости и количественных критериев затухания краевых эффектов. Соответствующая краевая задача решается с применением метода сеток в рамках концепции базовых схем [3].

**Постановка задачи.** Рассматривается задача определения зоны краевого эффекта в слоистом композитном материале с покрытием для случая продольного сжатия материала поверхностной кусочно-постоянной периодической нагрузкой, период которой равен двум параметрам структуры композитного материала. Исследуется зависимость длины затухания краевого эффекта от соотношения между упругими характеристиками материала и покрытия. Длина затухания краевого эффекта рассматривается как максимальная протяженность зоны краевого эффекта, определенная с заданной точностью.

Композитному материалу соответствует полупространство слоистой структуры, которое образовано последовательным чередованием плоских слоев наполнителя и связующего. Слой покрытия размещается перпендикулярно слоям материала. Область, которую занимает слоистый композитный материал с покрытием, отнесена к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Плоскость  $x_2Ox_3$  совпадает со срединной поверхностью произвольного слоя наполнителя, плоскость  $x_1Ox_3$  — с поверхностью покрытия. Кусочно-постоянная периодическая нагрузка  $p$  прикладывается к слою покрытия и действует в плоскости размещения слоев наполнителя в направлении оси  $Ox_2$ :  $p(x_1, 0) = p^0$ ,  $|x_1| \leq 0,5h_n + kb$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Период  $b$  поверхностной нагрузки равен двум параметрам структуры:  $b = 2h$ ,  $h = h_n + h_c$ , где  $h_n$ ,  $h_c$  — соответственно толщина слоя наполнителя и связующего. Вдоль оси  $Ox_3$  нагрузка не изменяется. Расчетную область  $\bar{\Omega}$ , исходя из условий регулярности композитной структуры и периодического характера поверхностной нагрузки, можно представить следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{n=1}^2 \bar{\Omega}^{(n)} = \left\{ (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{b}{2}; 0 \leq x_2 \leq H \right\},$$

где  $\bar{\Omega}^{(n)}$  — область, занимаемая расчетным элементом  $n$  структуры материала с покрытием. Расчетный элемент образуется половинами соседних слоев наполнителя и связующего и сопряженной с ними областью покрытия. Такой элемент характеризуется размером  $h/2$  в направлении оси  $Ox_1$  и толщиной покрытия  $h_n$ . Размер расчетной области в направлении оси  $Ox_1$  равен половине периода  $b$  поверхностной нагрузки. Размер  $H$  этой области в направлении оси  $Ox_2$  определяется в рамках вычислительного эксперимента и соответствует условию установившегося вдоль оси  $Ox_2$  напряженного состояния с заданной точностью и условию независимости параметров затухания краевого эффекта от этого размера. Для геометрических параметров материала и параметров нагрузки справедливо соотношение:

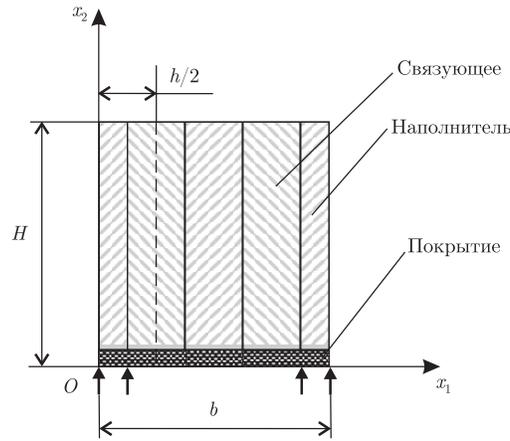


Рис. 1. Геометрия расчетной области и условия нагружения

$h_n \sim h_n < h \leq b < H$ . Расчетная область и условия нагружения материала представлены на рис. 1.

Условия определения зоны краевого эффекта и длины затухания краевого эффекта с заданной точностью  $\rho$  имеют следующий вид:

условие определения границы  $\Gamma_\rho$  зоны краевого эффекта

$$\tilde{\rho}(x_1, x_2)|_{x \in \Gamma_\rho} = \rho, \quad (1)$$

где

$$\tilde{\rho} = 100 \frac{\sigma(x) - \sigma_{уст}}{p(x_1, 0) - \sigma_{уст}}, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_\rho; \quad (2)$$

условие определения максимальной протяженности  $\lambda_\rho$  зоны краевого эффекта

$$\lambda_\rho = \max_{x_1, x_2 \in \Gamma_\rho} (x_2). \quad (3)$$

В (2)  $\sigma_{уст} = \sigma(x_1, H)$  — установившиеся нормальные напряжения  $\sigma(x) = \sigma_{22}(x)$  на границе  $x_2 = H$  расчетной области в направлении затухания краевого эффекта,  $p(x_1, 0) = \sigma(x_1, 0)$  — поверхностная нагрузка на границе  $x_2 = 0$  расчетной области  $\Omega$ .

**Анализ результатов расчета.** Расчеты проводились для следующих значений упругих и геометрических характеристик компонент материала:  $E_n/E_c = 10, 100, 1000$ ;  $E_n/E_n = 0,01 \div 100$ ;  $\nu_n = \nu_c = \nu_n = 0,3$ , где  $E_n, \nu_n, E_c, \nu_c$  и  $E_n, \nu_n$  — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона наполнителя, связующего и покрытия,  $c_n = h_n/(h_n + h_c) = 0,5$  — концентрация наполнителя,  $h_n = 0,125h$ .

На рис. 2 показано изменение максимальной протяженности зоны краевого эффекта, определенной с точностью 5%, при изменении отношения  $E_n/E_n$  в указанных выше пределах для различных значений отношения модулей Юнга наполнителя и связующего. Протяженность зоны краевого эффекта отнесена к периоду нагрузки. Максимальная протяженность зоны краевого эффекта достигается в слое наполнителя для значения  $x_1 = h$ . Штрихпунктирная прямая соответствует материалу без покрытия [1].

Анализ полученных результатов показывает, что в диапазоне  $E_n/E_n = 0,01 \div 100$  наличие тонкого изотропного покрытия приводит к уменьшению максимальной протяженности

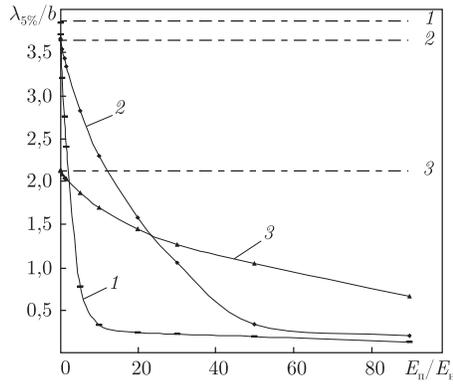


Рис. 2. Зависимость максимальной протяженности  $\lambda_{5\%}$  зоны краевого эффекта от  $E_{\text{п}}$  для  $E_{\text{п}}/E_c = 1000$  (кривая 1),  $E_{\text{п}}/E_c = 100$  (кривая 2),  $E_{\text{п}}/E_c = 10$  (кривая 3); штрихпунктирные прямые соответствуют материалу без покрытия: 1 –  $\lambda_{5\%}/b = 3,87$ ; 2 –  $\lambda_{5\%}/b = 3,65$ ; 3 –  $\lambda_{5\%}/b = 2,12$

зоны краевого эффекта по сравнению с материалом без покрытия для  $E_{\text{п}}/E_{\text{н}} \geq 0,5$  при  $E_{\text{н}}/E_c = 10$ , для  $E_{\text{п}}/E_{\text{н}} \geq 0,1$  при  $E_{\text{п}}/E_c = 100$ , для  $E_{\text{п}}/E_{\text{н}} \geq 0,01$  при  $E_{\text{п}}/E_c = 1000$ . В исследованном диапазоне такое уменьшение достигает соответственно 68,2%, 94,6%, 96,7%.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы относительно влияния упругих характеристик покрытия на протяженность зоны краевого эффекта: наличие изотропного покрытия в широком диапазоне изменения его упругих характеристик приводит к уменьшению зоны краевого эффекта. “Блокирующее” влияние покрытия на зону краевого эффекта возрастает для более высоких значений отношения модулей Юнга наполнителя и связующего.

1. Быстров В. М. О влиянии тонкого изотропного покрытия на затухание краевого эффекта при одноосном продольном сжатии слоистого композитного материала // Доп. НАН України. – 2008. – № 2. – С. 59–63.
2. Быстров В. М., Зеленский В. С. Затухание краевого эффекта в слоистом композитном материале с тонким изотропным покрытием // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 96–101.
3. Григоренко Я. М., Шевченко Ю. В., Василенко А. Т. и др. Численные методы // Механика композитов: В 12-ти т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. Т. 11. – Киев: А. С. К., 2002. – 448 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.12.2009

V. M. Bystrov, V. S. Zelensky

### About the influence of elasticity characteristics of a covering on the decay of the end effect under a uniaxial longitudinal pressing on a laminated composite

*The problem of determination of the end effect zone in a laminated composite with a thin isotropic covering under the uniaxial longitudinal pressing is considered. The dependence of the maximal extent of the end effect zone upon the relationship between Young's modulus of the covering and components of a material is investigated. The case of a piecewise constant surface load with the period equal to the double value of the structural parameter is considered. The numerical solution of a boundary-value problem of elasticity theory of inhomogeneous bodies and the quantitative criterion of the decay of the end effect for normal stresses are used to analyze the end effect.*