УДК 531.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Экспоненциальная устойчивость движения на временной шкале при структурных возмущениях

Вказано спосіб застосування прямого методу Ляпунова для дослідження експоненційної стійкості руху на часовій шкалі динамічних рівнянь при структурних збуреннях.

В монографии [1] изложены способы анализа устойчивости движения непрерывных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Обобщение прямого метода Ляпунова для динамических уравнений предложено в работе [2].

Целью этой работы является постановка задачи об устойчивости движения при структурных возмущениях на временной шкале и получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости. Все необходимые сведения из математического анализа на временной шкале, которые здесь используются, приведены в работах [2–4].

1. Описание структурных возмущений для динамических уравнений. Предположим, что временная шкала $\mathbb{T}$ неограничена сверху и имеет ограниченную зернистость $\mu(t)$, т. е. $0 < \mu(t) < \mu_M$ ($\mu_M = \mathrm{const} < \infty$) при всех $t \in \mathbb{T}$.

Объектом исследования является система динамических уравнений на временной шкале при структурных и параметрических возмущениях.

Обозначим класс исследуемых систем $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ и $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$ обозначает i-ю подсистему, совокупность которых составляет систему $\mathcal{D}(\mathbb{T})$.

О системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ (соответственно о подсистемах $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$) примем следующие предположения:

H_1. Подсистемы $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$ с вектором состояния $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$, имеют единственное состояние равновесия $x_i(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и при всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

H_2. Параметрические и/или внешние возмущения в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ характеризуются матрицей $P = (p_1^{\mathrm{T}}, p_2^{\mathrm{T}}, \ldots, p_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Множество всех допустимых матриц P обозначим

$$\mathcal{P} = \{P\colon P_1 \leqslant P(\tau) \leqslant P_s, \tau \in \mathbb{T}\}, \tag{1}$$

где P_1 и P_2 — наперед заданные постоянные матрицы. Множество $\mathcal{P}$ может быть нулевым, т. е. $\mathcal{P} = \{0\}$. В этом случае параметрические и/или внешние возмущения в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ отсутствуют.

H_3. Семейство векторных отображений $\mathcal{F} = \{f^1, f^2, \ldots, f^N\}$ имеет своими элементами вектор-функции $f^k\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{s\times q} \to \mathbb{R}^n$, где $k = 1, 2, \ldots, N$, так что $f_i \in \mathcal{F}_i$, где $\mathcal{F}_i = \{f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^N\}$ и $f_i^k \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times q}, \mathbb{R}^{n_i})$ при всех $k \in \{1, N\}$ и $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

H_4. Динамика i-й взаимодействующей подсистемы $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$ в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ описывается конечномерной системой динамических уравнений

$$x_i^{\Delta}(t) = f_i(t, x(t), p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ и символ Δ обозначает Δ-производную вектора состояния $x_i(t)$ подсистемы $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$, $f_i(t, 0, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Число N в определении семейств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и параметр $k = k(t)$, изменяющийся на множестве $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ при всех $t \in \mathbb{T}$, описывают структурные изменения системы $\mathcal{D}(\mathbb{T})$. Число N является числом всех возможных структур системы $\mathcal{D}(\mathbb{T})$.

H_5. Динамика i-й изолированной подсистемы в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ описывается динамическими уравнениями

$$x_i^{\Delta}(t) = g_i(t, x_i(t)), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, вектор-функция $g_i \colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ и определяется соотношением

$$g_i(t, x_i(t)) = f_i(t, x^i, 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $x^i = (0^{\mathrm{T}}, \ldots, 0^{\mathrm{T}}, x_i^{\mathrm{T}}, 0^{\mathrm{T}}, \ldots, 0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Очевидно, что функции φ_i, определяемые выражением

$$\varphi_i(t, x, p_i) = f_i(t, x, p_i) - g_i(t, x_i), \qquad t \in \mathbb{T},$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, m$ описывают действие всей системы $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ на подсистему $\mathcal{D}_i(\mathbb{T})$. Это может быть описано уравнениями

$$x_i^{\Delta}(t) = g_i(t, x(t)) + \varphi_i(t, x(t), p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Обозначим Φ_i множество всех возможных φ_i, $\Phi_i = \{\varphi_i^1, \varphi_i^2, \ldots, \varphi_i^N\}$, где $\varphi_i^j(t, x, p_i) = f_i^j(t, x, p_i) - g_i(t, x_i)$, $j = 1, 2, \ldots, N$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Для описания структурных изменений в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ введем структурный параметр $e_{ij} \colon \mathbb{T} \to [0, 1]$, являющийся (i, j)-элементом структурной матрицы $E_i \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n_i \times N n_i}$, соответствующей i-й взаимодействующей подсистеме (2). В общем случае матрицы E_i имеют вид

$$E_i = [e_{i1} I_i, e_{i2} I_i, \ldots, e_{iN} I_i], \qquad I_i = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}.$$

Заметим, что возможно, но не обязательно, что если $e_{ij}(t) = 1$ при всех $t \in \mathbb{T}$, то $e_{ik}(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и $k \neq j$.

Функции $\Phi_i \colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{1 \times q} \to \mathbb{R}^{N n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, описывают все возможные взаимодействия подсистемы (4) в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ и это описывается системой динамических уравнений

$$x_i^{\Delta}(t) = g_i(t, x_i(t)) + E_i(t) \varphi_i(t, x(t), p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Пусть $E_i \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n \times N_n}$ определяется формулой

$$E(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) & 0_{12} & 0_{13} & \ldots & 0_{1m} \\ 0_{21} & E_2(t) & 0_{23} & \ldots & 0_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & 0_{m3} & \ldots & E_m(t) \end{pmatrix}, \qquad 0_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j},$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Матрица $E(t)$ описывает возможные структурные изменения в системе $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ и называется структурной матрицей системы $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ на временной шкале. Множество всех возможных матриц $E(t)$ обозначим $E_s(t)$ и будем называть структурой системы $\mathcal{D}(\mathbb{T})$:

$$E_s(t) = \left\{ E(t) \colon \begin{pmatrix} E_1(t) & 0_{12} & \ldots & 0_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \ldots & E_m(t) \end{pmatrix}, \; E_i(t) = (e_{i1} I_i, e_{i2} I_i, \ldots, e_{iN} I_i), e_{ij} \in [0, 1] \right\}.$$

Таким образом, система динамических уравнений со структурными возмущениями на временной шкале имеет вид

$$x^{\Delta}(t) = g(t, x(t)) + E(t)\Phi(t, x, P), \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $g(t, x(t)) = (g_1^{\mathrm{T}}, g_2^{\mathrm{T}}, \ldots, g_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\Phi(t, x, P) = (\Phi_1^{\mathrm{T}}, \Phi_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \Phi_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $P \in \mathcal{P}$ и $E(t) \in$ $\in E_s(t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, зернистость $\mu(t) = 0$. Тогда $x^{\Delta}(t) = dx/dt$ и система (6) принимает вид (см. [1])

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x) + E(t)\Phi(t, x, P), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{7}$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то зернистость $\mu(t) = 1$, $x^{\Delta}(t) = \Delta x$ (первая разность вектора состояния $x(t)$) и система (6) принимает вид

$$x(n+1) - x(n) = g(n, x(n)) + E(n)\Phi(n, x, P), \qquad x(n_0) = x_0, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Заметим, что имеет смысл исследовать систему (6) при определенных предположениях о вектор-функции $g(t, x(t))$, характеризующей динамику изолированных подсистем. А именно:

(А) $g(t, x) = Ax$, где A — $n \times n$-постоянная матрица (здесь и ниже $x \in \mathbb{R}^n$);

(Б) $g(t, x) = A(t)x$, где A — $n \times n$-матрица с rd-непрерывными на $\mathbb{T}$ элементами;

(В) $g(t, x) = B(t)x$, где $B(t)$ — $n \times n$-p-периодическая матрица на $\mathbb{T}$;

(Г) $g(t, x) = R(t, x)x$, где $R(t, x)$ — $n \times n$-матрица, элементы которой — rd-непрерывные на $\mathbb{T}$ функции, т.е. $r_{ij} \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{\mathrm{n \times n}})$.

Ясно, что исследование устойчивости системы (6) при любом из предположений (А)–(Г) упрощается, так как при этом упрощается способ построения подходящей функции Ляпунова для системы динамических уравнений (3).

2. Достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (6). Приведем вначале следующее определение.

Определение 1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (6) является:

(а) *экспоненциально устойчивым на* $\mathcal{P} \times E_s(t)$, если и только если оно экспоненциально устойчиво для любой пары $(P, S) \in \mathcal{P} \times E_s(t)$, т.е. существуют постоянные $\beta > 0$, $C \in \mathbb{R}_+$ и $M > 0$ такие, что любое решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (6) при $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет оценке

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leqslant C(\|x_0\|, t_0)(e_{\ominus M}(t, t_0))^{\beta} \tag{9}$$

при всех $t \geqslant t_0 \in \mathbb{T}$;

(б) *равномерно экспоненциально устойчивым на* $\mathcal{P} \times E_s(t)$, если в определении 1(а) постоянная C не зависит от $t_0 \in \mathbb{T}$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что для системы динамических уравнений*

$$x^{\Delta}(t) = g(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

построена функция $V(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i) = V_1(x_1) + \cdots + V_n(x_n), \tag{11}$$

где $V_i(0) = 0$ *и* $V_i(x)$ *— непрерывно дифференцируемые в открытой области* $S(H) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < H, H = \text{const} > 0\}$. *Тогда вдоль любого решения* $x(t; t_0, x_0)$ *системы* (10) Δ*-производная функции* $V(x)$ *вычисляется по формуле*

$$V^{\Delta}(x(t)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i(x_i + \mu(t) g_i(t,x)) - V_i(x_i)}{\mu(t)} & \text{при} \quad \mu(t) \neq 0, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} g(t,x) & \text{при} \quad \mu(t) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

в открытой области $S(H) \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство см. в работе [4].

Функцию $V(t)$ вида (11) будем называть функцией Ляпунова класса А, если она вместе с Δ-производной (12) разрешает задаче об устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (10).

Теорема 1. *Предположим, что для динамических уравнений* (6) *выполняются следующие условия:*

1) существуют функция $V(x)$ *класса А,* $V \colon S(H) \to \mathbb{R}_+$ *и функции* W_1, W_2 *— K-класса Хана такие, что*

$$W_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant W_2(\|x\|)$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times S(H)$;

2) для любой пары $(P, E) \in \mathcal{P} \times E_s(t)$ *существуют постоянные* $L > 0$, $M > 0$, $\delta > M$ *и невозрастающая функция* $W_3 \colon \mathbb{R}_+ \to (-\infty, 0]$ *такие, что*

$$V^{\Delta}(x(t))\Big|_{(6)} \leqslant \frac{W_3(\|x\|) - L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, t_0)}{1 + \mu(t) M}$$

при всех $E \in E_s(t)$ *и* $P \in \mathcal{P}$;

3) при всех $(t, x) \in \mathbb{T} \times S(H)$ *выполняется неравенство*

$$W_3(W_2^{-1}(V(x))) + MV(x) \leqslant 0.$$

Тогда при любых $(P, E) \in \mathcal{P} \times E_s(t)$ *движения системы* (6) *в открытой области* $S(H)$ *оцениваются неравенством*

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leqslant W_1^{-1}[(V(x_0) + L) e_{\ominus M}(t, t_0)] \tag{13}$$

при всех $t \geqslant t_0 \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Для решения $x(t; t_0, x_0)$ системы (6), которое остается в области $S(H)$ при всех $t \geqslant t_0 \in \mathbb{T}$, вычислим Δ-производную функции $V(x) e_M(t, 0)$, учитывая правило вычисления Δ-производной для произведения двух функций на $\mathbb{T}$. Нетрудно видеть, что при выполнении условий теоремы 1 верны оценки

$$\begin{aligned} [V(x(t)) e_M(t,0)]^{\Delta} &= V^{\Delta}(x(t)) e_M(\sigma(t), 0) + V(x(t)) e_M^{\Delta}(t, 0) \leqslant \\ &\leqslant [W_3(\|x(t)\|) - L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, 0)] e_M(t, 0) + MV(x(t)) e_M(t, 0) = \\ &= [W_3(\|x(t)\|) - L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, 0) + MV(x(t))] e_M(t, 0) \leqslant \\ &\leqslant [W_3(W_2^{-1}(V(x(t)))) + MV(x(t)) - L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, 0)] e_M(t, 0) \leqslant \\ &\leqslant -L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, 0) e_M(t, 0) = L(M \ominus \delta)(t) e_{\ominus\delta}(t, 0). \end{aligned} \tag{14}$$

Интегрируя неравенство (14) от t_0 до $t \in \mathbb{T}$ при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in \mathbb{T}$, получаем оценку

$$V(x(t))e_M(t,0) \leqslant V(x_0)e_M(t_0,0) - Le_{M\ominus\delta}(t,0) + Le_{M\ominus\delta}(t,0) \leqslant \\ \leqslant V(x_0)e_M(t_0,0) + Le_{M\ominus\delta}(t,0) \leqslant (V(x_0) + L)e_M(t_0,0), \tag{15}$$

которая выполняется при всех $t \geqslant t_0$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Из оценки (15) следует, что

$$V(x(t)) \leqslant (V(x_0) + L)e_M(t_0,0)e_{\ominus M}(t,0) = (V(x_0) + L)e_{\ominus M}(t,t_0).$$

Отсюда, согласно условию *1* теоремы 1, имеем оценку

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \leqslant W_1^{-1}[(V(x_0) + L)e_{\ominus M}(t,t_0)],$$

которая выполняется при всех $P \in \mathcal{P}$, $E \in E_s(t)$ и $t \geqslant t_0$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что для динамических уравнений* (6) *выполняются следующие условия:*

1) существуют функция $V(x)$ класса A, $V\colon S(H) \to \mathbb{R}_+$ и положительные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, $\lambda_1(t)$ — неубывающая функция на $\mathbb{T}$, и положительные постоянные p, q такие, что

$$\lambda_1(t)\|x\|^p \leqslant V(x) \leqslant \lambda_2(t)\|x\|^q$$

при всех $(t,x) \in \mathbb{T} \times S(H)$;

2) для любой пары $(P,E) \in \mathcal{P} \times E_s(t)$ существуют положительная функция $\lambda_3(t)$ при всех $t \in \mathbb{T}$, положительные постоянные r, L, $\delta > M$, где $M = \inf\limits_{t\geqslant 0} \lambda_3(t)/[\lambda_2(t)]^{r/q} > 0$, такие, что

$$V^\Delta(x(t)) \leqslant \frac{-\lambda_3(t)\|x\|^r - L(M\ominus\delta)(t)e_{\ominus\delta}(t,0)}{1+\mu(t)M}$$

при всех $P \in \mathcal{P}$ и $E \in E_s(t)$;

3) при всех $(t,x) \in \mathbb{T} \times S(H)$ выполняется неравенство

$$V(x) - V^{r/q}(x) \leqslant 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (6) *экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$ при структурных возмущениях.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 рассмотрим Δ-производную функции $V(x)e_M(t,0)$, где величина M определена в условии *2* теоремы 2. Учитывая условия *1–3* теоремы 2, получаем

$$[V(x)e_M(t,0)]^\Delta \leqslant [-\lambda_3(t)\|x\|^r - L(M\ominus\delta)(t)e_{\ominus\delta}(t,0)], e_M(t,0) + MV(x(t))e_M(t,0) \leqslant \\ \leqslant \left\{-\frac{\lambda_3(t)}{[\lambda_2(t)]^{r/q}}V^{r/q}(x(t)) + MV(x(t)) - L(M\ominus\delta)(t)e_{\ominus\delta}(t,0)\right\}e_M(t,0) \leqslant \\ \leqslant [M(V(x(t)) - V^{r/q}(x(t))) - L(M\ominus\delta)(t)e_{\ominus\delta}(t,0)]e_M(t,0) \leqslant \\ \leqslant -L(M\ominus\delta)(t)e_{M\ominus\delta}(t,0). \tag{16}$$

Интегрируя обе стороны неравенства (16) от t_0 до $t \in \mathbb{T}$ при начальных условиях $x(t_0) = x_0$, получаем

$$V(x(t))e_M(t,0) \leqslant (V(x_0) + L)e_M(t_0,0). \tag{17}$$

Из условия *1* теоремы 2 следует, что

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \leqslant \lambda_1^{-1/p}(t)V^{1/p}(x(t)) \leqslant \lambda_1^{-1/p}(t_0)V^{1/p}(x(t)).$$

Отсюда с учетом неравенства (17) получим оценку

$$\|x(t;t_0,x_0)\| \leqslant \lambda_1^{-1/p}(t_0)[(V(x_0) + L)e_{\ominus M}(t,t_0)]^{1/p},$$

которая выполняется при всех $t \geqslant t_0$, $t_0 \in \mathbb{T}$. Этим теорема 2 доказана.

Замечание 1. Если в теореме 2 функции $\lambda_i(t) = \lambda_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1,2,3$, тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (6) равномерно экспоненциально устойчиво на $\mathbb{T}$ при структурных возмущениях.

3. Заключительные замечания. Применение функций $V(x)$ класса A упрощает процедуру вычисления Δ-производной функции $V(x)$ вдоль решений системы (6). В частности, если $V(x) = \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$V^{\Delta}(x(t))|_{(6)} = 2x^{\mathrm{T}}[g(t,x) + E(t)\Phi(t,x,P)] + \mu(t)\|g(t,x) + E(t)\Phi(t,x,P)\|^2.$$

Условия *2* в теоремах 1, 2 являются весьма грубыми, но они позволяют показать способ применения прямого метода Ляпунова для системы динамических уравнений (6).

Если в системе (6) структурные возмущения отсутствуют, то слагаемое $E(t)\Phi(t,x,P) \equiv 0$ при всех $t \in \mathbb{T}$ и утверждения теорем 1, 2 совпадают с утверждениями теорем 3.4 и 3.5 из статьи [3] для системы динамических уравнений (10).

1. *Grujić Lj. T., Martynyuk A. A., Ribbens-Pavella M.* Large scale systems stability under structural and singular perturbations. – Berlin: Springer, 1987. – 366 p.
2. *Bohner M., Martynyuk A. A.* Elements of stability theory by A. M. Lyapunov for dynamic equations on time scales // Nonlinear Dynamics and System Theory. – 2007. – **7.** – P. 225–251.
3. *Peterson A. C., Raffoul Y. N.* Exponential stability of dynamic equations on time scales // Adv. Difference Equations. – 2005. – No 2. – P. 133–144.
4. *Peterson A. C., Tisdell C. C.* Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales // J. Difference Eqns. Appl. – 2004. – **10.** – P. 1295–1306.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.02.2010

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

Exponential stability of motion on time scales under structural perturbations

A means to use the direct Lyapunov's method to establish sufficient conditions for the exponential stability of the trivial solution of a system of dynamic equations on a time scale under structural perturbations is indicated.