УДК 517.983

Я. В. Горбатенко

Ергодичність розв'язків абстрактних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в банаховому просторі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Отримано ряд необхідних та достатніх умов ергодичності розв'язків абстрактних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в банаховому просторі.

Нехай X — банахів простір. Розглянемо задачу Коші для абстрактного лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{1}$$

де A, B — замкнені, щільно визначені лінійні оператори.

Задача (1) називається коректною, якщо:

1) у вихідному просторі X містяться щільні підпростори D_0, D_1 такі, що для кожних початкових умов $u_0 \in D_0$, $u_1 \in D_1$ задача (1) має розв'язок;

2) існує додатна неспадна функція $N(t)$, визначена на R^+, така, що для кожного розв'язку $u(t)$ виконується $\|u(t)\| \leqslant N(t)(\|u(0)\| + \|u'(0)\|)$, $t \geqslant 0$.

Якщо задача (1) коректна, то існують обмежені оператори $C(t)$ та $S(t)$, що називаються операторами-розв'язками, визначені таким чином: $u(t) = C(t)u_0$ є розв'язком задачі (1) при $u(0) = u_0 \in D_0$, $u'(0) = 0$, а $v(t) = C(t)u_1$ — при $v(0) = 0$, $v'(0) = u_1 \in D_1$. Ці оператори є обмеженими, завдяки чому їх можна продовжити на весь простір X.

Згідно з [1, с. 271], розв'язок коректної задачі з довільними початковими умовами $u_0 \in D_0$, $u_1 \in D_1$ визначається формулою $u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1$.

Функція $f(t)\colon \mathrm{R}^+ \to X$ (або $\mathrm{R}^+ \to L(X)$) називається сильно (слабо) ергодичною, якщо існує сильна (слабка) границя $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t f(s)\,ds$.

Предметом нашого дослідження є ергодичність розв'язків задачі (1).

Теорія ергодичності розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку викладена в роботах Хілле та Філліпса [2], Голдстейна [3]. У випадку $B = 0$ ергодичність функції $C(t)$ розглядалася в роботі [4] (див. також [5]). Ергодичність розв'язків повного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі розглядалася в роботах [6, 7].

У даній роботі побудовано ряд необхідних та достатніх умов ергодичності функції $C(t)$, тобто розв'язків задачі (1) при $u'(0) = 0$, та деякі достатні умови ергодичності $S(t)$.

1. Неповне рівняння $u''(t) + Au(t) = 0$**.** При $B = 0$ коректність задачі (1) означає, що A — генератор сильно неперервної косинус-функції $C(t)$, синус-функції $S(t)$ та аналітичної півгрупи $T(t)$. Будемо розглядати випадок $\|C(t)\| \leqslant M$ при $t \geqslant 0$. Із цього випливає також $\|T(t)\| \leqslant M$, бо

$$T(t)x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-s^2/4t} C(s)x\,ds$$

[3, с. 178].

Резольвенту оператора A позначимо $R(\lambda)$.

Відмітимо важливу властивість: $\forall\, x \in D(A)$: $C'(t)x = -S(t)Ax$ [1, с. 279, лема 3.4].

Ергодичність $C(t)$.

Лема 1 [3, с. 92, п. 8.22]. *Нехай функція* $f(t)\colon \mathrm{R}^+ \to X$ *неперервна та обмежена. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(s)\,ds = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} f(s)\,ds$$

у тому сенсі, що одна границя існує тоді і тільки тоді, коли існує інша, і вони однакові.

Теорема 1. *Еквівалентними є такі твердження:*

1. Косинус-функція $C(t)$ *сильно ергодична.*

2. Косинус-функція $C(t)$ *слабо ергодична.*

3. Півгрупа $T(t)$ *сильно ергодична.*

4. $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$.

Причому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t T(s)x\,ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t C(s)x\,ds = \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} x.$$

Зауважимо, що *4* $\Rightarrow$ *1* доведено в роботі [4], а *3* $\Leftrightarrow$ *4* є відомим результатом теорії ергодичності C_0-півгруп.

Доведення. Враховуючи, що при $\lambda > 0$: $\int\limits_0^\infty e^{\lambda s} T(s)xds = R(\lambda)x$ [2, с. 342, п. 11.5.1] та $\int\limits_0^\infty e^{\lambda s} C(s)xds = \lambda R(\lambda^2)x$ [1, с. 28, теорема 2.1], і, застосовуючи лему 1, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t T(s)xds = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int\limits_0^\infty e^{\lambda s} T(s)xds = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda R(\lambda)x = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda^2 R(\lambda^2)x =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+} \lambda(\lambda R(\lambda^2))x = \lim_{\lambda\to 0+} \lambda \int\limits_0^\infty e^{\lambda s} C(s)xds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t C(s)xds.$$

Ці рівності виконуються також, якщо всі границі розуміти як слабкі.

Тепер перейдемо до доведення тверджень теореми. З наведених вище рівностей виходить *3* $\Rightarrow$ *1*. *1* $\Rightarrow$ *2* очевидно. *2* $\Rightarrow$ *3*, тому що з *2* випливає слабка ергодичність $T(t)$, яка еквівалентна сильній ергодичності $T(t)$ [2, с. 514, п. 18.5.2].

3 $\Leftrightarrow$ *4* доведено в [2, с. 516, п. 18.6.2 та с. 520, п. 18.7.3].

Для завершення доведення відзначимо, що $\int\limits_0^t C(s)xds = S(t)x$.

Лема 2. *Нерухомі точки косинус-функції:* $C(t)x = x \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} A$.

Доведення. Нехай $C(t)x = x$. Тоді $0 = C''(t)x = AC(t)x = Ax$ і $x \in \operatorname{Ker} A$. З іншого боку, якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, то $C'(t)x = -S(t)Ax = 0$, тому $C(t)x = x$.

Ергодичність $S(t)$.

Теорема 2. *1. Якщо* $x \in \operatorname{Im} A$, *то* $P_S x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)xds = 0$.

2. Якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, *то* $S(t)x = tx$.

Доведення. *1.* Нехай $x \in \operatorname{Im} A$, $x = Ay$, тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)xds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)Ayds = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t C'(s)yds = -\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)-I}{t}y = 0.$$

2. $x \in \operatorname{Ker} A$, тоді $S(t)x = \int\limits_0^t C(s)xds = \int\limits_0^t xds = tx$.

Єдиною нерухомою точкою $S(t)$ є нуль (бо $S(t)x$ — неперервна функція, але $S(0) = 0$).

Наслідок 1. *Якщо* $\|S(t)\| \leqslant M$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t C(s)xds = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)xds = 0$.

Доведення. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t C(s)xds = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{S(t)}{t}x = 0$. Таким чином, $C(t)$ ергодична, і $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$ (теорема 1). Крім того, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, бо інакше ергодична границя $C(t)$ не може бути нульовою. Якщо $x \in \operatorname{Im} A$, то $P_S x = 0$ (теорема 2). Оскільки $\|P_S\| \leqslant M$, то $P_S x = 0$ і для усіх $x \in X = \overline{\operatorname{Im} A}$.

2. Повне рівняння $u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0$**.** Повернемось до задачі (1) із $B \neq 0$.

Задача (1) називається сильно коректною, якщо:

1) вона коректна;

2) $S(\cdot)u \in C^1(\mathrm{R}^+, X)$, $\forall t \geqslant 0$: $S(t)X \subset D(B)$ та $BS(t)u \in C(\mathrm{R}^+, X)$.

Далі будемо розглядати тільки сильно коректні задачі Коші.

Якщо задача сильно коректна, то існує таке $\omega \geqslant 0$, що при $\lambda > \omega$ оператор $R(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}$ визначений та обмежений [8, с. 177], і $\operatorname{Im} R(\lambda) \subset D(A) \bigcap D(B)$ (див. [1, с. 283, (3.28)]. Будемо розглядати випадок $\omega = 0$ і $\|C(t)\| \leqslant M$ при $t > 0$.

Із [1, с. 279, (3.11), (3.12) та (3.16)] отримуємо такі важливі властивості:

1) якщо $x \in D(A)$, то $C'(t)x = -S(t)Ax$;

2) якщо $x \in D(B)$, то $S'(t)x = C(t)x - S(t)Bx$.

Ергодичність $C(t)$, *достатні умови.* Введемо такі оператори: $P(t)x = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t C(s)xds$, $P_S(t)x = \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)xds$; $Px = \lim\limits_{t\to\infty} P(t)x$, $P_S x = \lim\limits_{t\to\infty} P_S(t)x$ (визначені на тих $x \in X$, для яких відповідні границі існують). Оператори $P(t)$ та P обмежені (нагадаємо, що $\|C(t)\| \leqslant M$ при

$t > 0$). Функція $C(t)$ (відповідно $S(t)$) ергодична, якщо лінійний оператор P (відповідно P_S) визначений на всьому просторі.

При розгляді ергодичності $C(t)$ можна поставити дві задачі:

1) дослідити умови ергодичності $C(t)$ в загальному випадку (теорема 3, наслідок 2, теорема 5 та наслідок 5 нижче);

2) дослідити умови на оператор B, за яких ергодичність $C(t)$ пов'язана із ергодичністю косинус-функції з генератором A (наслідок 3, теорема 4, наслідок 4).

Теорема 3. *1. Якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, то $Px = x$.*

2. Якщо $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$, $Bx \subset \overline{\operatorname{Im} A}$ та $\dfrac{S(t)}{t}x \to 0$, то $Px = 0$.

Доведення. *1.* $x \in \operatorname{Ker} A$, $C(t)x = x$ (аналогічно лемі 2).

2. $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t C(\tau)x d\tau = \dfrac{S(t)}{t}x - \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t S(\tau)Bx d\tau \to 0$, бо $Bx \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, а $P_S y = 0$ при $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$ (при $y \in \operatorname{Im} A$ доведення аналогічне теоремі 2, а $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$).

Наслідок 2. *Якщо $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$ та існує лінійний підпростір Z із властивостями $X = \overline{\operatorname{Ker} A + Z}$, $B(Z) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, $\dfrac{S(t)}{t}x \to 0$ на Z, то $C(t)$ ергодична.*

Зауважимо, що якщо $B(Z) \subset \operatorname{Im} A$, то можна виключити умову рівномірної обмеженості $S(t)$ на $\operatorname{Im} A$.

Наслідок 3. *Якщо $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$, $X = \overline{\operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \bigcap D(B))}$, $B(\overline{\operatorname{Im} A} \bigcap D(B)) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, то $C(t)$ ергодична. Також із $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$ та $\operatorname{Ker} A \subset D(B)$ випливає $X = \overline{\operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \bigcap D(B))}$.*

Теорема 4. *Якщо $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$, $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$, $B(\operatorname{Ker} A) \subset$ $\subset \overline{\operatorname{Im} A}$, то $C(t)$ ергодична.*

Доведення. $B(\operatorname{Ker} A) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, тому при $x \in \operatorname{Ker} A$: $S(t)x = tx - \displaystyle\int_0^t S(s)Bx ds$, і також $\left\|\dfrac{S(t)}{t}x\right\| \leqslant \operatorname{const}(x)$ при достатньо великих t, бо $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{S(t)}{t}x = x$.

Тепер нехай $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \bigcap D(B)$, $Bx = z_{\operatorname{Ker} A} + z_{\overline{\operatorname{Im} A}}$, $z_{\operatorname{Ker} A} \in \operatorname{Ker} A$, $z_{\overline{\operatorname{Im} A}} \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Тоді

$$P(t)x - \frac{S(t)}{t}x + \frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\overline{\operatorname{Im} A}} ds = -\frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\operatorname{Ker} A} ds.$$

У лівій частині $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t S(s)z_{\overline{\operatorname{Im} A}} ds \to 0$ (див. доведення теореми 3, п. 2), а інші доданки обмежені за t. Доведемо, що права частина необмежена за t при $z_{\operatorname{Ker} A} \neq 0$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\operatorname{Ker} A} ds = \frac{t}{2}z_{\operatorname{Ker} A} - \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^\tau S(s)Bz_{\operatorname{Ker} A} ds d\tau.$$

Покажемо, що $\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau S(s)Bz_{\operatorname{Ker}A}dsd\tau = o(t)$, тоді $\frac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)z_{\operatorname{Ker}A}ds \sim t$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left\|\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau S(s)Bz_{\operatorname{Ker},A}dsd\tau\right\| \leqslant \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\frac{1}{t}\left\|\int\limits_0^\tau S(s)Bz_{\operatorname{Ker},A}ds\right\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau S(s)Bz_{\operatorname{Ker},A}ds\right\|d\tau = 0,$$

тому що $Bz_{\operatorname{Ker}A} \in \overline{\operatorname{Im}A}$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t S(s)Bz_{\operatorname{Ker}A}ds = 0$.

Отже, $z_{\operatorname{Ker}A} = 0$, тому $B(\overline{\operatorname{Im}A}\bigcap D(B)) \subset \overline{\operatorname{Im}A}$.

Тепер можна застосувати наслідок 3 для доведення твердження теореми.

Ергодичність $C(t)$, необхідні умови.

Лема 3. *Нехай $C(t)$ ергодична. Тоді $\forall\, x \in D(A)$: $Px = \lim\limits_{\lambda\to 0}(I - R(\lambda)A)x$.*

Доведення. $\frac{1}{\lambda}(I - R(\lambda)A)x$ є перетворенням Лапласа функції $C(t)x$ [8, с. 189]. Далі застосовуємо лему 1.

Теорема 5. *Якщо $C(t)$ ергодична, то ергодична границя — оператор P — має такі властивості:*

1. $\forall\, s \geqslant 0$: $C(s)P = P$.

2. $P^2 = P$, $X = \operatorname{Ker}P \oplus \operatorname{Im}P$.

3. $APx = 0$, $\operatorname{Im}P = \operatorname{Ker}A$.

4. $\operatorname{Ker}P \subset \overline{\operatorname{Im}A + \operatorname{Im}B}$, *а тому* $X = \operatorname{Ker}A + \overline{\operatorname{Im}A + \operatorname{Im}B}$.

5. Якщо B обмежений відносно A, то $B(\operatorname{Ker}P\bigcap D(A)) \subset \overline{\operatorname{Im}A}$.

Нагадаємо, що B називається обмеженим відносно A, якщо $D(A) \subset D(B)$ та існують b_1, $b_2 > 0$ такі, що $\forall\, x \in D(A)$: $\|Bx\| \leqslant b_1\|x\| + b_2\|Ax\|$.

Доведення. *1.* Нехай $x \in D(A)$,

$$C(s)Px = C(s)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t C(\tau)xd\tau = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t C(s)C(\tau)xd\tau.$$

Використовуючи формулу (1.6) з роботи [1, с. 271], отримуємо

$$C(s)Px = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t (C(s+\tau) - S(s)C'(\tau))xd\tau =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t C(s+\tau)xd\tau - S(s)\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)-I}{t}x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_s^{t+s} C(\tau)xd\tau =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t+s}{t}\frac{1}{t+s}\int\limits_0^{t+s} C(\tau)xd\tau - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^s C(\tau)xd\tau = Px.$$

Оператор $C(s)P - P$ дорівнює нулю на $D(A)$ та є обмеженим, отже, він дорівнює нулю і на всьому просторі.

2. $P^2x = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t C(\tau)Pxd\tau = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t Pxd\tau = Px$, P — проектор.

3. $APx = -C''(0)Px = -\lim\limits_{h_1\to 0}\lim\limits_{h_2\to 0} \dfrac{C(h_2+h_1)Px - C(h_1)Px}{h_2h_1} = -\lim\limits_{h_1\to 0}\lim\limits_{h_2\to 0}\dfrac{Px-Px}{h_2h_1} = 0$. Отже, $APx = 0$, тому $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Ker} A$.

Нехай тепер $x \in \operatorname{Ker} A$. $Px = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int\limits_0^t C(\tau)xd\tau = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t xd\tau = x$, отже, $x \in \operatorname{Im} P$.

4. Нехай $x \in \operatorname{Ker} P \bigcap D(A)$. Тоді за лемою 3

$$x = (I-P)x = \lim_{\lambda\to 0} R(\lambda)Ax = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^2 R(\lambda)\frac{A}{\lambda^2}x = \lim_{\lambda\to 0}(I - \lambda BR(\lambda) - AR(\lambda))\frac{A}{\lambda^2}x =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(A\left(\frac{I}{\lambda^2} - \frac{R(\lambda)}{\lambda^2}\right)x - B\frac{R(\lambda)}{\lambda}Ax\right) \in \overline{\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B}.$$

Отже, $\operatorname{Ker} P\bigcap D(A) \subset \overline{\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B}$.

Тепер доведемо, що $\overline{\operatorname{Ker} P\bigcap D(A)} = \operatorname{Ker} P$. Візьмемо довільний $x \in \operatorname{Ker} P$ і послідовність $\{x_n\} \subset D(A)$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Застосувавши P до обох частин останньої рівності, побачимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} Px_n = 0$. Тому $x = \lim\limits_{n\to\infty}(Px_n + (I-P)x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(I-P)x_n$. Очевидно, що $(I - P)x_n \in \operatorname{Ker} P$, а на підставі п. 3 також $(I-P)x_n \in D(A)$. Отже, для довільного елемента $x \in \operatorname{Ker} P$ знайдено збіжну до нього послідовність $\{(I-P)x_n\} \subset \operatorname{Ker} P\bigcap D(A)$.

Таким чином, $\operatorname{Ker} P \subset \overline{\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B}$,

$$X = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A + \overline{\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B}.$$

5. Нехай B обмежений відносно A, $\|Bx\| \leqslant b_1\|x\| + b_2\|Ax\|$, і $x \in \operatorname{Ker} P\bigcap D(A)$.

Спочатку доведемо, що $\lim\limits_{\lambda\to 0} BR(\lambda)Ax = Bx$:

$$\|BR(\lambda)Ax - Bx\| \leqslant b_1\|R(\lambda)Ax - x\| + b_2\|AR(\lambda)Ax - Ax\|.$$

Розглянемо окремо другий доданок:

$$\|AR(\lambda)Ax - Ax\| = \|(AR(\lambda) - I)Ax\| = \|(\lambda^2R(\lambda) + \lambda BR(\lambda))Ax\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\lambda^2R(\lambda)Ax\| + \lambda\|BR(\lambda)Ax - Bx\| + \|\lambda Bx\|.$$

Отже,

$$\|BR(\lambda)Ax - Bx\| \leqslant b_1\|R(\lambda)Ax - x\| + b_2(\|\lambda^2R(\lambda)Ax\| + \|\lambda Bx\| + \lambda\|BR(\lambda)Ax - Bx\|).$$

Для достатньо малих λ:

$$(1 - b_2\lambda)\|BR(\lambda)Ax - Bx\| \leqslant b_1\|R(\lambda)Ax - x\| + b_2(\|\lambda^2R(\lambda)Ax\| + \|\lambda Bx\|).$$

Таким чином,

$$\|BR(\lambda)Ax - Bx\| \leqslant b_1\|R(\lambda)Ax - x\| + b_2(\|\lambda^2R(\lambda)Ax\| + \|\lambda Bx\|) \underset{\lambda\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

З іншого боку,

$$\lim_{\lambda\to 0} BR(\lambda)Ax = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda+B)R(\lambda)Ax = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}(I-AR(\lambda))Ax = \lim_{\lambda\to 0} A\frac{1}{\lambda}(I-R(\lambda)A)x \subset \overline{\operatorname{Im} A}.$$

Доведено, що $B(\operatorname{Ker} P \bigcap D(A)) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$.

Тепер можна довести два критерії ергодичності.

Наслідок 4. *Нехай $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A \subset D(B)$. $C(t)$ ергодична та $\operatorname{Im} B \subset \overline{\operatorname{Im} A}$ тоді і тільки тоді, коли $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$, $B(\operatorname{Ker} A) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$.*

Доведення. *Необхідність.* З п. *4* теореми 5 отримуємо $X = \operatorname{Ker} A + \overline{\operatorname{Im} A}$. Далі, якщо $x \in \operatorname{Ker} A \bigcap \overline{\operatorname{Im} A}$, то $x = 0$, бо

$$x = \frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)x d\tau = \frac{S(t)}{t}x - \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)Bx d\tau \to 0.$$

Достатність. Теорема 4.

Наслідок 5. *Нехай B обмежений відносно A. Щоб $C(t)$ була ергодичною, необхідно, а за умови рівномірної обмеженості $S(t)$ на $\operatorname{Im} A$ і достатньо, щоб існував лінійний підпростір Z з такими властивостями: $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{Z}$, $B(Z) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, $\dfrac{S(t)}{t}x \to 0$ на Z.*

Доведення. *Необхідність.* П. *2* та п. *5* теореми 5, як Z беремо $\operatorname{Ker} P \bigcap D(A)$.

Достатність. Наслідок 2.

Ергодичність $S(t)$.

Теорема 6. *1. Якщо $x \in \operatorname{Im} A$, то $P_S x = 0$.*

2. Якщо $x \in \operatorname{Ker} A \bigcap \operatorname{Ker} B$, то $S(t)x = tx$.

Доведення аналогічне випадку неповного рівняння (теорема 2).

Наслідок 6. *Якщо $\|S(t)\| \leqslant M$ та $\operatorname{Im} B \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, то*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C(s)x ds = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)x ds = 0.$$

Доведення. Застосовуючи наслідок 2 із $Z = X$ і теорему 5, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C(s)x ds = 0.$$

З ергодичності $C(t)$ випливає $X = \overline{\operatorname{Im} A}$ (теорема 5, наслідок 4), тому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)x ds = 0.$$

1. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. – Amsterdam: Elsevier, 1985. – 313 p.
2. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semi-groups. – Providence: Amer. Math. Soc., 1957. – 808 p.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Выща шк., 1989. – 347 с.

4. *Goldstein J. A., Radin C., Schowalter R. E.* Convergence rates of ergodic limits for semigroups and cosine functions // Semigroup Forum. – 1978. – **16**. – P. 89–95.
5. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1990. – Т. 28. – С. 87–202.
6. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Шкляр А. Я.* О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН. – 1995. – **341**, № 6. – С. 734–736.
7. *Горбачук М. Л., Шкляр А. Я.* О поведении на бесконечности решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1996. – Вып. 19. – С. 174–201.
8. *Xiao T. J., Liang J.* On complete second order linear differential equations in Banach spaces // Pacific J. Math. – 1990. – **142**, No 1. – C. 175–195.

Навчально-науковий комплекс
"Інститут прикладного системного аналізу"
НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 18.01.2010

Ya. V. Gorbatenko

Ergodicity of solutions of second-order abstract linear differential equations in a Banach space

A number of necessary and sufficient conditions of ergodicity of solutions of second-order abstract linear differential equations in a Banach space is obtained.