ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

Об универсально равномерно стягиваемых слоениях коразмерности 1

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Доведено, що універсальне накриття повного ріманового многовиду із заданим на ньому C^2-шаруванням ковимірності 1, чиї шари мають стягувані універсальні накриття, є стягуваним.

Известная теорема Картана–Адамара утверждает, что универсальное накрытие полного риманова n-мерного многообразия неположительной секционной кривизны диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Г. Штак доказал следующую теорему, являющуюся естественным слоеным аналогом теоремы Картана–Адамара.

Теорема 1 [1]. *Пусть $(M^n, \mathcal{F})$ — C^3-слоение коразмерности 1 на полном римановом многообразии M^n, слои которого имеют неположительную секционную кривизну в индуцированной метрике. Тогда универсальное накрытие $\widetilde{M}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Оказывается, что данная теорема имеет естественное обобщение на более общий класс слоений.

Определение 1. Метрическое пространство X называется равномерно стягиваемым, если существует такая функция $R(r)$, что всякий шар $B(r)$ радиуса r, взятый в произвольной точке x, стягивается в точку внутри шара $B(R(r))$, взятого в той же точке.

Определение 2. Метрическое пространство X называется универсально равномерно стягиваемым, если универсальное накрытие $\widetilde{X}$ равномерно стягиваемо.

В случае, когда X является римановым многообразием, шаром $B(r)$ в точке $x \in X$ называется образ евклидова шара радиуса r в касательном пространстве T_xX при экспоненциальном отображении $\exp\colon T_xX \to X$.

Обратим внимание, что односвязное многообразие неположительной секционной кривизны является равномерно стягиваемым для функции $R(r) = r$.

Согласно известной теореме Уайтхеда, C^1-гладкое многообразие триангулируемо, т. е. является CW-комплексом. Другая известная теорема Уайтхеда утверждает, что стягиваемость CW-комплексов равносильна равенству нулю всех гомотопических групп. Отсюда сразу следует, что равномерно стягиваемое C^1-гладкое многообразие является стягиваемым.

Цель данной работы — доказать следующую теорему, которая в некоторой степени является топологическим аналогом предыдущей.

Теорема 2. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — C^2-слоение коразмерности 1 на полном римановом n-мерном многообразии M. Допустим, что все слои являются универсально равномерно стягиваемыми для некоторой общей функции $R(r)$. Тогда универсальное накрытие многообразия M является стягиваемым.*

Доказательство. Поскольку в теореме речь идет об универсальном накрытии, мы можем сразу предполагать, что наше многообразие ориентируемо, а слоение является трансверсально ориентируемым. Этого всегда можно добиться, переходя к ориентирующему конечнолистному накрытию.

Покажем, что погружение каждого слоя $j\colon L \to M$ индуцирует мономорфизм фундаментальных групп $j_*\colon \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(M)$.

Предположим, что это не так. Тогда по теореме 6.1 работы [3] мы найдем исчезающий цикл, т. е. C^2-гладкое вложение $i\colon S^1 \times I \to M$ такое, что для каждого $t \in I$ окружность $S^1_t = i(S^1 \times t)$ принадлежит соответствующему слою L_t, причем S^1_t стягивается в слое L_t при $t \in (0, 1]$ и представляет нетривиальный элемент фундаментальной группы слоя L_0 при $t = 0$. Заметим, что для разных t слой L_t, вообще говоря, может быть тот же самый. Вложение i можно определить с помощью экспоненциального отображения $\exp^{\perp}\colon T_{\mathcal{F}^{\perp}} \to M$, ограниченного на S^1_0. Напомним, что $\exp^{\perp}$ каждому ортогональному к $\mathcal{F}$ вектору p с началом в некоторой точке x ставит в соответствие конец отрезка ортогональной к слоению траектории длины $|p|$ с начальными данными (x, p). Если $|p|$ достаточно мал, то $\exp^{\perp}$ определено корректно.

Так как индуцированная риманова метрика g_t слоя L_t гладко зависит от t, длины окружностей S^1_t равномерно ограничены, т. е. каждая из окружностей S^1_t лежит внутри шара $B_t(r) \subset L_t$ радиуса r для всех $t \in I$. Из равномерной стягиваемости универсальных накрытий слоев следует, что каждая окружность S^1_t, $0 < t \leqslant 1$, будучи стягиваемой в слое L_t, стягивается внутри шара $B_t(R(r)) \subset L_t$.

Аналогично тому как это было сделано для нормального расслоения, можно определить экспоненциальное отображение вдоль слоения, которое каждому касательному к слоению вектору a ставит в соответствие конец геодезической длины $|a|$ в соответствующем слое, выпущенной из данной точки касательно данному вектору. Так как слоение предполагается C^2-гладким, экспоненциальное отображение $\exp_{\mathcal{F}}\colon T_{\mathcal{F}}M \to M$ также будет гладким.

Индуцированная риманова метрика $g_{\mathcal{F}}\colon T_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ определяет связность Леви-Чевита $\nabla^{\mathcal{F}}\colon \nabla_{\zeta}\colon T_{\mathcal{F}} \to T_{\mathcal{F}}$, $\zeta \in TM$. Аналогично метрике Сасаки в TM, можно определить метрику Сасаки в расслоении $T_{\mathcal{F}}$. В этой метрике касательные плоскости локально эквидистантны, т. е. проекция $T_{\mathcal{F}} \to M$ является римановой субмерсией.

Рассмотрим непрерывное отображение $F\colon D^{n-1}(R) \times I \to M$, где $D^{n-1}(R)$ — евклидов шар радиуса R, которое определяется ограничением экспоненциального отображения $\exp_{\mathcal{F}}$ на $T^R_{\mathcal{F}} I_0$ для некоторой точки $s_0 \in S^1$, где $T^R_{\mathcal{F}} A$ обозначает множество касательных к слоению $\mathcal{F}$ векторов длины не более R, ограниченное на подмножество $A \subset M$, а $I_0 = i(s_0 \times I)$, где i — отображение, определенное выше. Отметим, что F является равномерно непрерывным отображением, так как определено на компакте $D^{n-1}(R) \times I$. Так как, по построению метрики g, касательные плоскости эквидистантны и F равномерно непрерывна, то для всех достаточно малых $t \in I$ шары $B_t(R) = \exp_{\mathcal{F}}(D^{n-1}(R))$ лежат внутри некоторого наперед заданного δ-забора шара $B_0(R + \varepsilon) \supset B_0(R)$. Под δ-забором понимается множество $\Delta = \exp^{\perp}(a)$, $|a| < \delta$ с областью определения в точках шара $B_0(R + \varepsilon)$ и с однозначно определенной проекцией $pr\colon \Delta \to B_0(R+\varepsilon)$, которая ставит в соответствие точке $r \in \Delta$ начало проходящей через нее ортогональной траектории. Этого всегда можно добиться, так как шар $B_0(R+\varepsilon)$ компактен. Обратим внимание, что для тех S^1_t, которые лежат в δ-заборе, образ $\mathrm{pr}(S^1_t) = S^1_0$. Но это означает, что окружность S^1_0 заклеивается диском $\mathrm{pr} \circ g_t\colon D^2 \to B_0(R+\varepsilon) \subset L_0$, где $g_t\colon D^2 \to B_t(R)$ — диск, заклеивающий S^1_t. А это противоречит нестягиваемости S^1_0 в слое L_0 и тем самым доказывает мономорфность j_*.

Как следствие, мы немедленно получаем следующее. Если $p\colon \widetilde{M} \to M$ — универсальное накрытие, то поднятое слоеное многообразие $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ является слоением с равномерно стягиваемыми слоями. Действительно, в противном случае мы нашли бы петлю α в некотором слое $\widetilde{L} \in \widetilde{F}$, представляющую нетривиальный элемент в $\pi_1(\widetilde{L})$ и тривиальный элемент в $\pi_1(\widetilde{M})$ (так как фундаментальная группа универсального накрытия тривиальна). А так как отображение накрытия индуцирует мономорфизм фундаментальных групп и ограничение $p|_{\widetilde{F}}$ также является накрытием (отметим, что топология на слое определяется индуцированной римановой метрикой), то класс $p_*(\alpha)$ должен представлять нетривиальный элемент в $\pi_1(L)$, но тривиальный в $\pi_1(M)$. А это противоречит доказанному.

Теперь воспользуемся следующим результатом Ламуро:

Теорема 3 [(теорема 2 [4])]. *Пусть $(N, \mathcal{F})$ — гладкое многообразие с трансверсально ориентируемым C^1-слоением F коразмерности 1 на нем. Если при некотором $k \geqslant 2$ группа $\pi_k(N)$ нетривиальна, то у $\mathcal{F}$ найдется такой слой F, что для некоторого $j \in 1 \leqslant j \leqslant k$, группа $\pi_j(F)$ нетривиальна.*

Если применить этот результат к слоению $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$, то из предположения, что $\widetilde{M}$ нестягиваемо, и с учетом односвязности $\widetilde{M}$ мы найдем нетривиальный класс $\pi_k(\widetilde{M})$ для некоторого $k \geqslant 2$. Теперь из теоремы Ламуро следует, что найдется нестягиваемый слой. Это противоречит доказанному и завершает доказательство теоремы 2.

Заметим, что если M к тому же предположить компактным, то $\widetilde{M}$ будет не только стягиваемым, но и равномерно стягиваемым.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к настоящей работе, а также В. В. Круглову за полезные замечания.

1. *Stuck G.* Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan–Hadamard // C. r. Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**. – P. 519–522.
2. *Adams S., Stuck G.* Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations // Duke Math. J. – 1993. – **71**. – P. 71–92.
3. *Новиков С. П.* Топология слоений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1965. – **14**. – С. 248–278.
4. *Lamoureux C.* Groupes d'homologie et dhomologie d'ordre superieur des variétés compactes ou non compactes feuiletées en codimension 1 // C. r. Acad. Sci. Paris. – 1975. – **280**, No 7. – P. 411–414.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 28.12.2009

D. V. Bolotov

On universally uniformly contractible foliations of codimension 1

It is proved that the universal covering of a complete Riemann manifold equipped by a C^2-foliation of codimension 1, whose leaves have uniformly contractible universal coverings, is contractible.