Доповіді Національної академії наук України

8 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. С. Борисенко

Про новий аналог інтегральної нерівності Біхарі для розривних функцій та його застосування в проблемі стійкості розв'язків імпульсних систем

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Розглянуто новий аналог леми Біхарі для розривних функцій та його застосування при дослідженні задачі стійкості розв'язків імпульсних систем диференціальних рівнянь.

У роботі розглядається новий аналог леми Гронуолла–Беллмана–Біхарі для нелінійних інтегро-сумарних нерівностей, що узагальнює результати робіт [1–6]. Поширено метод "заморожування коефіцієнтів" для імпульсних систем диференціальних рівнянь з виділеним лінійним наближенням та нелінійностями неліпшицевого типу, що входять у праву частину збуреної системи. Отримано нові достатні умови асимптотичної стійкості (рівномірної) тривіального розв'язку систем диференціальних рівнянь при параметричному та неліпшицевому типі імпульсного збурення.

Допоміжні результати.

Лема 1 [6]. *Нехай невід'ємна, кусково-неперервна на $J = [t_0, \infty[$ функція $V(t)$ з розривами першого роду в точках $\{t_i\}\colon t_1 < t_2 < \cdots$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$, задовольняє інтегро-сумарну нерівність*

$$V(t) \leqslant \psi(t) + \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)V(\tau)\,d\tau + \sum_{t_0<t_i<t} a_i V^r(t_i - 0), \tag{1}$$

де $\psi(t)$ — додатна, монотонно неспадна на J функція, $q(t) \geqslant 0$, $q(t) \in C(J)$, $a_i \geqslant 0$, $r > 0$. Тоді для $V(t)$ справедливі такі оцінки:

$$V(t) \leqslant \psi(t) \prod_{t_0<t_i<t} (1 + a_i\psi^{r-1}(t_i)) \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} q(s)\,ds\right], \qquad 0 < r < 1, \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \tag{2}$$

$$V(t) \leqslant \psi(t) \prod_{t_0<t_i<t} (1 + a_i \psi^{r-1}(t_i)) \exp\left[r \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \right], \qquad r \geqslant 1, \qquad \forall\, t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Лема 2. *Нехай невід'ємна, кусково-неперервна на $J = [t_0, \infty[$ функція $W(t)$ з розривами першого роду в точках $\{t_i\}$: $t_1 < t_2 < \cdots$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$, задовольняє інтегро-сумарну нерівність*

$$W(t) \leqslant \phi(t) + \int_{t_0}^{t} p(\tau) W^m(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0<t_i<t} \beta_i W^n(t_i - 0), \tag{4}$$

де $\phi(t) > 0$, $p(t) \geqslant 0$, $p(t) \in C(J)$, $\beta_i \geqslant 0$, m, $n > 0$, $m \neq 1$, $\phi(t)$ неспадна на J. Тоді $W(t)$ задовольняє такі оцінки:

$$W(t) \leqslant \phi(t) \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i \phi^{n-1}(t_i)) \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{t} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right]^{1/(1-m)}, \tag{5}$$

$$0 < m < 1, \qquad 0 < n \leqslant 1 \qquad \forall\, t \geqslant t_0,$$

$$W(t) \leqslant \phi(t) \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i m \phi^{n-1}(t_i)) \left[1 - (m-1) \left[\prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i m \phi^{n-1}(t_i)) \right]^{m-1} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{t_0}^{t} p(\tau) \phi^{m-1}(\tau)\, d\tau \right]^{-1/(m-1)}, \qquad m > 1, \qquad n \geqslant 1 \tag{6}$$

$$\forall\, t \geqslant t_0\colon \quad \int_{t_0}^{t} p(\tau) \phi^{m-1}(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{m}, \qquad \prod_{t_0<t_i<t} (1 + \beta_i m \phi^{n-1}(t_i)) < \left(\frac{m}{m-1} \right)^{1/(m-1)}. \tag{7}$$

Доведення. Очевидно, для $0 < m < 1$, $0 < n \leqslant 1$ (згідно зі схемою, запропонованою в [2]), що $\forall\, t \in [t_k, t_{k+1}[$:

$$u(t) \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \phi^{n-1}(t_i) \left[\prod_{j=1}^{i-1} (1 + \beta_j \phi^{n-1}(t_j)) \right]^n \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{t} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right]^{n/(1-m)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(\tau) \phi^{m-1}(\tau) \left[\prod_{j=1}^{i-1} (1 + \beta_j \phi^{n-1}(t_j)) \right]^m \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{\tau} \phi^{m-1}(\sigma) p(\sigma)\, d\sigma \right]^{n/(1-m)} d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} p(\tau) \phi^{m-1}(\tau) u^m(\tau)\, d\tau \leqslant \prod_{i=1}^{k} (1 + \beta_i \phi^{n-1}(t_i)) \times$$

$$\times \left[1 + (1-m) \int_{t_0}^{t_k} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right]^{1/(1-m)} + \int_{t_k}^{t} p(\tau) \phi^{m-1}(\tau) u^m(\tau)\, d\tau,$$

$$u(t) \leqslant \left\{ \left[\prod_{i=1}^{k} (1 + \beta_i \phi^{n-1}(t_i)) \right]^{1-m} \left[1 + (1-m) \int\limits_{t_0}^{t_k} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + (1-m) \int\limits_{t_k}^{t} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right\}^{1/(1-m)} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{k} (1 + \beta_i \phi^{n-1}(t_i)) \left[1 + (1-m) \int\limits_{t_0}^{t} \phi^{m-1}(\tau) p(\tau)\, d\tau \right]^{1/(1-m)}.$$

Тут $u(t) = W(t)/\phi(t)$.

Схема доведення для випадку $m > 1$, $n \geqslant 1$ аналогічна.

Основний результат. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(u)x, \qquad t \neq t_i, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} = Bx, \end{aligned} \tag{8}$$

де $A(u)$, B — постійні $(n \times n)$-матриці; u — деякий параметр, $u \in D \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ $(m \leqslant n)$, D — деяка обмежена область, $A(u) \in C^1(D)$, A — матриця, записана в канонічній формі.

Послідовність моментів $\{t_i\}$ така, що $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$ і

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i + 0, u) - x(t_i - 0, u) = Bx = Bx(t_i - 0, u).$$

Розв'язок $x(t,u)$ системи (8) у загальному випадку є кусково-неперервною функцією з розривами 1-го роду при $t = t_i$, причому

$$\frac{dx}{dt} = A(u)x \tag{9}$$

для всіх $t \in [t_i, t_{i+1}[$ і

$$x(t_i + 0, u) - x(t_i - 0, u) = Bx(t_i - 0, u). \tag{10}$$

Будемо припускати, що (9), (10) виконані для всіх u з області $D \subset \mathbb{R}^m$ і функція $x(t,u)$ неперервна за t зліва в точці t_i, тобто

$$x(t_i - 0, u) = \lim_{t \to t_i - 0} x(t,u), \qquad \forall\, u \in D. \tag{11}$$

Разом із системою (8) розглянемо систему збуреного руху

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(\psi(t))x, \qquad t \neq t_i, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} = Bx. \end{aligned} \tag{12}$$

Тут $\psi(t) \in C^1(J)$, $J = [t_0, \infty[$.

Нехай $\| \overset{\bullet}{\psi}(t)\| \leqslant \delta(t)$, де $\delta(t)$ — монотонно спадна функція $\forall\, t \geqslant t_0$, причому існує скінченна границя

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t-t_0} \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} \delta(\sigma)\, d\sigma ds = l = \mathrm{const} < \infty. \tag{13}$$

Припустимо, що матриця $B+E$ невироджена, а послідовність моментів часу $\{t_i\}$, в яких відбувається миттєве збурення, задовольняє умову [1]

$$\Theta_2 \geqslant t_{i+1} - t_i \geqslant \Theta_1 > 0, \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Нехай також знайдеться постійна η така, що

$$\left\| \frac{\partial A(u)}{\partial u} \right\| \leqslant \eta, \qquad \eta > 0, \qquad \forall\, u \in D. \tag{15}$$

Позначимо через $x(t,u)$ розв'язок системи (8), який при $t = t_0$ дорівнює x_0 для всіх $u \in D$. Тоді

$$x(t,u) = e^{A(u)(t-t_i)} \prod_{t_0<t_j<t} (E+B) e^{A(u)(t_j - t_{j-1})} x_0$$

при $t \in]t_i, t_{i+1}[$.

Якщо $\gamma(u) = \max\limits_k \mathrm{Re}\, \lambda_k(A(u))$, де λ_k — власні числа матриці $A(u)$, то справедлива оцінка (аналогічно з результатами [1–3])

$$\|e^{A(u)(t-\tau)}\| \leqslant e^{(\varepsilon_1 + \gamma(u))(t-\tau)}, \qquad \varepsilon_1 > 0, \qquad \forall\, u \in D, \qquad \forall\, t \geqslant \tau. \tag{16}$$

Тут ε_1 — довільне як завгодно мале число.

Тоді

$$\|x(t,u)\| \leqslant e^{(\varepsilon_1+\gamma(u))(t-t_0)} \alpha^{i(t_0,t)} \|x_0\|, \qquad \forall\, t \geqslant t_0,$$

де $\alpha^2 = \max\limits_j \lambda j[(E+B)^T(E+B)]$; $(E+B)^T$ — транспонована матриця; $i(t_0,t)$ — кількість точок $\{t_i\}$ на інтервалі $J = [t_0, t[$.

На підставі (14) отримаємо оцінку

$$\|x(t,u)\| \leqslant \exp\left(\varepsilon_1 + \gamma(u) + \frac{1}{\Theta_j} \ln\alpha\right)(t-t_0)\|x_0\|, \tag{17}$$

де

$$\frac{1}{\Theta_j} \ln\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\Theta_1} \ln\alpha, & \alpha \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{\Theta_2} \ln\alpha, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Нехай $\widetilde{x}(t)$ — розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\psi(t))x, \tag{18}$$

який обертається в $\widetilde{x}_0 = x_0$ при $t = t_0$. Тоді справедлива оцінка

$$\| \widetilde{x}(t) \| \leqslant e^{(\varepsilon_1+\gamma)(t-t_0)} e^{\eta \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} \delta(\sigma) d\sigma ds} \| \widetilde{x}_0 \| \leqslant e^{(\varepsilon_2+\gamma+\eta l)(t-t_0)} \| \widetilde{x}_0 \|, \quad \forall\, t \geqslant t_0, \quad \varepsilon_2 > 0. \quad (19)$$

Враховуючи (19), можна вважати, що для всіх $u \in D$ для матрицанту $\Omega(t, t_0)$ системи (18) виконується нерівність

$$\|\Omega(t, t_0)\| \leqslant e^{(\varepsilon+\gamma+\eta l)(t-t_0)}, \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Тоді, якщо $X(t, t_0)$ — матриця Коші системи (12), маємо

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant e^{\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j} \ln \alpha + \eta l\right)(t-t_0)}. \quad (20)$$

Оскільки будь-який розв'язок $x^*(t)$ ($x^*(t_0) = x_0^* = \widetilde{x}_0 = x_0$) системи (12) має вигляд $x^*(t) = X(t, t_0)x_0$, то з (20) отримаємо $\|x^*(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$, як тільки

$$\gamma + \frac{1}{\Theta_j} \ln \alpha + \eta l < 0. \quad (21)$$

Розглянемо систему вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(\psi(t))x + P(t, x), \quad t \neq t_i, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} = Bx + I_i(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Теорема 1. *Припустимо, що для системи* (22) *справджуються такі умови:*

1) $\left\| \dfrac{\partial A(u)}{\partial u} \right\| \leqslant \eta$, $\eta = \mathrm{const} > 0$*;*

2) $\det(B + E) \neq 0$*;*

3) $\exists\, \Theta_i = \mathrm{const} > 0 \colon \Theta_2 \geqslant t_{i+1} - t_i \geqslant \Theta_1 > 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots$*;*

4) $\| \dot{\psi}(t) \| \leqslant \delta(t)$*;*

5) $\delta(t) \colon \exists\, l \colon \ \overline{\lim_{t\to\infty}} \dfrac{1}{t - t_0} \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} \delta(\sigma)\, d\sigma ds = l = \mathrm{const} < \infty$*;*

6) $\|P(t, x)\| \leqslant p(t)\|x\|$, $p(t) \in C(\mathbb{R}^+)$, $p(t) \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $p(t) \leqslant p^*(t_0)$*;*

7) $\exists\, k_i = \mathrm{const} > 0 \colon \|I_i(x)\| \leqslant k_i\|x\|^m$, $i = 1, 2, \ldots$, $m = \mathrm{const} \geqslant 1$*;*

8) $\exists\, \pi(t_0) = \mathrm{const} > 0 \colon \displaystyle\prod_{t_0<t_i<t} \left(1 + k_i \|x_0\|^{m-1} e^{-(1-m)\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j} \ln \alpha + \eta l\right)(t_i - t_0)} \right) \leqslant \pi(t_0) < \infty$*;*

9) $\gamma + \dfrac{1}{\Theta_j} \ln \alpha + \eta l + m p^*(t_0) < 0$.

Тоді тривіальний розв'язок системи (22)*:*

i) асимптотично стійкий;

ii) рівномірно відносно t_0 *асимптотично стійкий, якщо* $\pi(t_0)$, $p^*(t_0)$ *не залежать від* t_0.

Доведення. Для довільного розв'язку системи (22) справедливе зображення [2]

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)P(\tau,x(\tau))\,d\tau + \sum_{t_0<t_i<t} X(t,t_i)I_i(x(t_i)). \tag{23}$$

На підставі леми 1 отримуємо

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| e^{\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t-t_0)} \times$$
$$\times \prod_{t_0<t_i<t}\left(1 + k_i\|x_0\|^{m-1} e^{-(1-m)\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t_i-t_0)}\right)\exp\left[m\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau\right].$$

Враховуючи умови теореми, маємо

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|\exp\left[\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l + mp^*(t_0)\right)(t-t_0)\right]\pi(t_0).$$

Теорема 2. *Припустимо, що для системи* (22) *справджуються такі умови:*
1) 1–5 теореми 1;
2) $\|P(t,x)\| \leqslant p(t)\|x\|^m$, $m = \mathrm{const} > 1$*;*
3) $p(t) \in C(\mathbb{R}^+)$, $p(t)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\forall\, t \geqslant t_0\ \exists\, p_1^*(t_0)\colon \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau \leqslant p_1^*(t_0) < \infty$*;*
4) $\exists\, k_i = \mathrm{const} > 0 : \|I_i(x)\| \leqslant k_i\|x\|^n$, $i = 1,2,\ldots, n = \mathrm{const} \geqslant 1$*;*
5) $\exists\, \pi_1(t_0) = \mathrm{const} > 0 : \prod\limits_{t_0<t_i<t}\left(1 + k_i\|x_0\|^{n-1} e^{-(1-n)\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t_i-t_0)}\right) \leqslant \pi_1(t_0) < \infty$*;*
6) $\pi_1^{m-1}(t_0)p_1^*(t_0)\|x_0\|^{m-1} \leqslant \dfrac{1}{m-1}$*;*
7) $\gamma + \dfrac{1}{\Theta_j}\ln\alpha + \eta l < 0$.
Тоді тривіальний розв'язок системи (22)*:*
k) асимптотично стійкий;
kk) рівномірно відносно t_0 *асимптотично стійкий, якщо* $\pi_1(t_0)$, $p_1^*(t_0)$ *не залежать від* t_0.

Доведення. На підставі леми 2, очевидно, що

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| e^{\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t-t_0)} \prod_{t_0<t_i<t}\left(1 + k_i m\|x_0\|^{n-1} e^{-(1-n)\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t-t_0)}\right) \times$$
$$\times \left[1 - (m-1)\left[\prod_{t_0<t_i<t}\left(1 + k_i m\|x_0\|^{n-1} e^{-(1-n)\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t_i-t_0)}\right)\right]^{m-1} \times\right.$$
$$\left.\times \int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\|x_0\|^{m-1} d\tau\right]^{-1/(m-1)}.$$

Враховуючи умови теореми, маємо

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|\pi_1(t_0)e^{\left(\varepsilon+\gamma+\frac{1}{\Theta_j}\ln\alpha+\eta l\right)(t-t_0)}\{1-(m-1)\pi_1^{m-1}(t_0)p^*(t_0)\|x_0\|^{m-1}\}^{-1/(m-1)}.$$

Таким чином, на підставі вищевикладеного можна зробити такі висновки:

1) при $n = 1$ та $\phi(t) = \mathrm{const}$ результат леми 2 збігається з відповідними результатами робіт [4, теорема 3.1.2, с. 176; 5, теорема 3.1.2, с. 176];

2) при $0 < m = n < 1$ та $m = n > 1$ з результату леми 2 випливає результат роботи [6];

3) при $P(t,x) = P(t)x$, де $P(t)$: $\|P(t)\| \leqslant C = \mathrm{const} < \infty$ та $I_i(x) = I_i$ – const($n \times \times n$)-матриці, з результату теореми 1 як наслідок отримуємо теорему 4.2.4 [4, с. 268];

4) результат теореми 2 узагальнює відповідні дослідження [1–8] імпульсних нелінійних систем за лінійним наближенням.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**. – С. 1981–1992.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980. – 80 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
4. *Самойленко А. М., Борисенко С. Д., Матараццо Дж. та ін.* Диференціальні моделі (стійкість). – Київ: Вища шк., 2000. – 330 с.
5. *Samoilenko A. M., Borysenko S. D., Cattani C. et al.* Differential models: stability, inequalities and estimates. – Kyiv: Naukova Dumka, 2001. – 328 p.
6. *Борисенко Д. С., Галло А., Тоскано Р.* Інтегральні нерівності Гронуолла–Беллмана–Біхарі для розривних функцій та оцінки розв'язків імпульсних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – № 4. – С. 60–66.
7. *Борисенко С. С.* Інтегро-функціональні нерівності типу Беллмана–Біхарі для розривних функцій та їх застосування // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 18–26.
8. *Borysenko S.* On some generalizations Bellman–Bihari result for integro-functional inequalities for discontinuous functions and their applications // Nonlinear analysis and application 2009: Materials of the Inter. Scientific Conf. (Kyiv, April 2–4, 2009). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – P. 83.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 13.01.2010*

S. S. Borysenko

About a new analog of the Bihari integral inequality for discontinuous functions and its application to the problem of stability of solutions for impulsive systems

A new analog of Bihari's lemma for discontinuous functions and its application to the problem of stability of solutions for impulsive systems of differential equations are considered.