УДК 517.5

Е. А. Севостьянов, Р. Р. Салимов

О теореме Лаврентьева–Зорича для отображений, более общих, чем квазиконформные

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Для деякого достатньо широкого класу відображень, що є більш загальними, ніж локально квазіконформні, отримано аналог добре відомої теореми Лаврентьева–Зоріча про глобальний гомеоморфізм. Доведено, що локальні гомеоморфізми класу Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, $n \geqslant 3$, зовнішня дилатація $K_O(x,f)$ яких є локально інтегрованою в $\mathbb{R}^n$ у ступені $n-1$, є ін'єктивними в $\mathbb{R}^n$ за умови, що $K_O^{n-1}(x,f) \leqslant Q(x)$ м. в. для деякої вимірної функції $Q(x)$, яка має скінченне середнє коливання (FMO) в околі нескінченно віддаленої точки, або якщо виконано умову розбіжності деякого інтеграла. Більш того, зазначений вище результат є вірним навіть для деякого більш широкого класу відображень.

В 1938 г. М. А. Лаврентьевым было сделано предположение о том, что локально квазиконформные отображения пространства $\mathbb{R}^3$ являются гомеоморфизмами. В. А. Зоричем было получено следующее решение проблемы М. А. Лаврентьева (см. [1]):

Если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — локально гомеоморфное квазирегулярное отображение $\mathbb{R}^n$, то f является гомеоморфизмом, причем на все пространство $\mathbb{R}^n$.

Доказанную В. А. Зоричем в [1] гипотезу М. А. Лаврентьева о глобальном гомеоморфизме мы хотим перенести на более общие классы отображений с конечным искажением. В настоящей работе показано, что отображения, удовлетворяющие некоторым относительно общим геометрическим соотношениям в окрестности бесконечно удаленной точки и которые являются локальными гомеоморфизмами пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, инъективны. В. А. Зоричем ранее были получены другие аналоги теоремы о глобальном гомеоморфизме (см., напр., [2, 3]). Отметим также недавнюю работу М. Кристи [3].

Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leqslant K M(\Gamma) \tag{1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определенная на семействах кривых *в* $\mathbb{R}^n$), а $K \geqslant 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений вместо соотношения (1) лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\cdot\rho^n(x)\,dm(x), \tag{2}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция такая, что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, т. е. $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$ $\forall \gamma \in \Gamma$, а $Q\colon D \to [1,\infty]$ — некоторая (заданная) вещественнозначная функция (см., напр., [5]). Неравенство вида (2) установлено В. Я. Гутлянским совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Вуориненом в работе [6] для квазиконформных отображений, где Q было равно $K_I(x,f)$, $K_I(x,f)$ — *внутренняя дилатация* f, $K_I(x,f) = \dfrac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}$, если *якобиан* $J(x,f) := \det f'(x) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных случаях. В формуле выше, как обычно, $l(f'(x)) = \min\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. Последнее обстоятельство положило начало рассмотрению семейств отображений, удовлетворяющих соотношению (2) уже при неограниченных Q. В. М. Миклюков в этом контексте также исследовал некоторые подобные классы (см., напр., [7]). Отметим также, что неравенство вида (2) было установлено в работе [8] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. В случае, когда $Q(x) \leqslant K$ п. в., из (2) мы снова приходим к неравенству (1). В общем случае неравенство (2) означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leqslant M_{Q(x)}(\Gamma)$ (см. [9, 10]).

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Запись $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно. Приведенные выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, где $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < 1\}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r\}$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ запись $|A|$ означает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$\fint_A f(x)\, dm(x) := \frac{1}{|A|} \int_A f(x)\, dm(x),$$

$\mathrm{dist}(A,B)$ — евклидово расстояние между множествами A, $B \subset \mathbb{R}^n$. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \mathrm{adm}\Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\Gamma} \int_D \rho^n(x)\, dm(x).$$

Пусть E, $F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a,b)$.

Следующее понятие мотивировано одним из важнейших определений квазиконформности по Ф. Герингу [11]. Пусть $r_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция,

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$S_i = S(x_0, r_i)$.

Говорят, что $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leqslant \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{4}$$

Заметим, что если f является K-квазиконформным, то f удовлетворяет соотношению (3) при $Q(x) \equiv K \in [1, \infty)$. Поэтому для нас главным образом представляет интерес случай неограниченных Q.

Пусть $x_0 \in D$. По аналогии, будем говорить, что $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-отображением в точке $x_0 \in D$*, если выполнено соотношение (3). При этом само отображение определено лишь в проколотой окрестности точки x_0.

Для отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду, пусть $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $\|f'(x)\| = \max\limits_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{|f'(x)h|}{|h|}$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Некоторые важные замечания.

Предложение 1. *Предположим, что область D содержит начало координат, $f\colon D \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, — кольцевое Q-отображение в нуле. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(0, \partial D)$ и $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)) \tag{5}$$

для функции $\psi(t)\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \tag{6}$$

для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Пусть Γ — семейство открытых кривых $\gamma(t)\colon (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\gamma(t_k) \to 0$ при некоторой последовательности $t_k \to 0$ и $\gamma(t) \not\equiv 0$. Тогда $M(f(\Gamma)) = 0$.

Следуя работе [12], введем следующее определение, обобщающее понятие функций ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу [13]. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Например, функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если в точке $x_0 \in D$ выполнено: $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x)|\, dm(x) < \infty$.

Предложение 2. *Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \partial D$ — изолированная точка границы D такие, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $Q \in FMO(x_0)$*;*

2)* $Q(x) \leqslant C \cdot \left(\log \dfrac{1}{|x-x_0|}\right)^{n-1}$*;*

2) $q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$*;*

3) при некотором $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ *и произвольных* $\varepsilon \in (0, \delta(x_0))$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} < \infty \tag{7}$$

и

$$\int\limits_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty. \tag{8}$$

Тогда можно указать $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и функцию* $\psi(t) > 0$ *такие, что в точке* x_0 *выполнены условия* (5) *и* (6) *предложения 1.*

Разумеется, *2** является просто частным случаем *2*. Отметим, что если f является K-квазирегулярным отображением, т. е. $Q(x) \equiv K$ в (3) для некоторой постоянной $K > 0$, то каждое из условий *1–3* предложения 2 автоматически выполнено. Отметим также, что соотношение (7) выражает собой интегральное условие расходимости типа Б. Шабата–В. Зорича–О. Лехто (см. [14, 2, 15]).

Замечание 1. Нетрудно показать, что для локальных гомеоморфизмов, удовлетворяющих условиям типа (3), интеграл вида $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}$ всегда конечен для произвольных сколь угодно малых ε.

Основной результат. Будем говорить, что отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке* $x_0 = \infty$, если отображение $\widetilde{f} = f(x/|x|^2)$ является кольцевым Q'-отображением в точке $x_0 = 0$ с $Q' = Q(x/|x|^2)$.

Иначе говоря, отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ будем называть *кольцевым Q-отображением в точке* $x_0 = \infty$, если соотношение

$$M(f\Gamma(S(R_1), S(R_2), A(R_1, R_2, 0))) \leqslant \int\limits_{A(R_1,R_2,0)} Q(y) \cdot \eta^n(|y|)\, dm(y) \tag{9}$$

выполнено для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta\colon (R_1, R_2) \to [0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1. \tag{10}$$

Будем говорить, что функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi(x/|x|^2)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Заметим, что отображение $\psi(x) = x/|x|^2$ подобно отображает сферу $S(0,r)$ на сферу $S(0,1/r)$, откуда следует, что $|J(x,\psi)| = (1/|x|)^{2n}$. Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, пишем $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \to \infty$

$$\int\limits_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\left(\frac{1}{R^n}\right), \tag{11}$$

где

$$\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \int\limits_{|x|>R} \varphi(x) \frac{dm(x)}{|x|^{2n}},$$

а Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Аналогично для бесконечности можно переформулировать условия вида *2*, *2** и *3* предложения 2 соответственно:

$$\fint\limits_{S(0,R)} Q(x)\, dS = O([\log R]^{n-1}), \tag{12}$$

$$Q(x) = O([\log |x|]^{n-1}) \qquad \text{при} \qquad x \to \infty, \tag{13}$$

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} = \infty \tag{14}$$

для некоторого $\delta_0 > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что локальный гомеоморфизм $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, является кольцевым Q-отображением на бесконечности, т. е. отображение f удовлетворяет условию вида* (9) *для произвольных $0 < R_1 < R_2 < \infty$ и любой неотрицательной измеримой по Лебегу функции η, для которой выполнено соотношение вида* (10). *Предположим, что функция $Q(x)$ либо имеет конечное среднее колебание на бесконечности, см.* (11), *либо удовлетворяет хотя бы одному из соотношений вида* (12)–(14). *Тогда f является гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Следствие 1. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — локальный гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которого $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что функция $Q = K_O^{n-1}(x,f)$ имеет конечное среднее колебание на бесконечности, см.* (11), *либо удовлетворяет хотя бы одному из соотношений* (12)–(14). *Тогда f является гомеоморфизмом в $\mathbb{R}^n$, причем $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Замечание 2. Элементарный пример отображения $f(z) = e^z$, действующего из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ и являющегося локально квазиконформным ($Q(z) = 1$) показывает, что при $n = 2$ теорема 1 и следствие 1 не имеют места.

1. *Зорич В. А.* Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. – 1967. – **116**, № 3. – С. 415–433.
2. *Зорич В. А.* О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. – 1968. – **181**, № 3. – С. 530–533.
3. *Zorich V. A.* The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems // Quasiconformal Space Mappings – A collection of Surveys 1960–1990. – Berlin: Springer, 1992. – P. 132–148. – (Lecture Notes in Math.; Vol. 1508).

4. *Cristea M.* Mappings of finite distortion: Zorich's theorem, and equicontinuity results // Rev. roum. math. pures and appl. – 2007. – **52**, No 5. – P. 539–554.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009. – 367 p.
6. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
7. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005. – 273 с.
8. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859–861.
9. *Andreian Cazacu C.* On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. – 2005. – **50**, No 7–11. – P. 765–776.
10. *Cristea M.* Local homeomorphisms having local ACL^n inverses // Compl. Var. and Ellipt. Equat. – 2008. – **53**, No 1. – P. 77–99.
11. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
12. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395–417.
13. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs. Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.
14. *Шабат Б. В.* К теории квазиконформных отображений в пространстве // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 5. – С. 1045–1048.
15. *Lehto O.* Homeomorphisms with a prescribed dilatation // Lecture Notes in Math. — Vol. 118. – Berlin: Springer, 1968. – P. 58–73.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 18.11.2009

E. A. Sevost'yanov, R. R. Salimov

Analog of the Lavrent'ev–Zorich theorem for mappings which are more general than quasiconformal ones

For some class of mappings which are more general than quasiconformal ones, an analog of the well-known Lavrent'ev–Zorich theorem about the global homeomorphism is proved. It is shown that the local homeomorphisms of the class $W^{1,n}_{\rm loc}$ are injective in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, provided that the so-called outer dilatation $K_O(x, f)$ is locally integrable in $\mathbb{R}^n$ in the degree $n-1$, and $K_O^{n-1}(x, f) \leqslant Q(x)$ for some function $Q(x)$ having a finite mean oscillation in the neighborhood of the infinity or satisfying some condition of integral divergence. Moreover, the above result is even true for some class of mappings which is more wide than the Sobolev class $W^{1,n}_{\rm loc}$.