УДК 517.5

А. Ю. Иванов

О гипотезе Борсука для некоторых множеств с негладкой границей

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Узагальнено теореми В. Г. Болтянського та Р. Д. Андерсона, В. Л. Клі про класи множин, на яких гіпотеза Борсука підтверджується.

Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для непустого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ величина $\operatorname{diam} M = \sup\limits_{x,y\in M} |x-y|$ называется диаметром M.

Одной из центральных задач комбинаторной геометрии является задача о разбиении фигуры на части меньшего диаметра. Данная проблематика появилась после того, как в 1933 г. польский математик К. Борсук выдвинул гипотезу [1] о том, что любую фигуру $M \subset \mathbb{R}^n$ с конечным диаметром d можно разбить на $n+1$ частей, диаметр каждой из которых строго меньше d.

Несмотря на активное изучение данной проблематики, значимых результатов в этом направлении получено достаточно мало. Гипотеза была подтверждена в $\mathbb{R}^2$ самим К. Борсуком в 1933 г. [1], в $\mathbb{R}^3$ ее удалось решить Г. Г. Эглстону в 1955 г., а затем Б. Грюнбаум и А. Хеппеш повторили его результат в 1957 г. [2]. При $n > 3$ решение ее столкнулось с такими трудностями, что преодолеть их не удалось до сих пор. В 1993 г. Дж. Канн и Г. Калаи построили первый контрпример к гипотезе в размерности $n = 2015$ [3]. К настоящему моменту А. М. Райгородским показано, что такие контрпримеры существуют во всех размерностях, больших 135 [4].

Таким образом, на первый план выходит вопрос описания множеств, для которых гипотеза все-таки имеет место. В 1946 г. Г. Хадвигер показал, что любое множество с гладкой границей может быть разбито на $n+1$ частей меньшего диаметра [5]. Затем в 1952 г. Р. Д. Андерсон и В. Л. Кли распространили этот результат на некоторый подкласс множества фигур постоянной ширины с нерегулярными точками на границе [6], а в 1960 г. В. Г. Болтянский доказал, что если граница тела $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет не более n нерегулярных точек, то его можно разбить на $n+1$ подмножеств меньшего диаметра [7].

В данной работе обобщаются указанные выше результаты В. Г. Болтянского [7] и Р. Д. Андерсона и В. Л. Кли [6].

Определим функцию $\chi\colon G \to \mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $G \subset \mathbb{R}^n$, следующим образом. Для $x \in G$, положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров фигуры G, проходящих через точку x. Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$. Введем также функцию

$$\varsigma\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \partial F,$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — сфера в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1, $F \subset \mathbb{R}^n$ — фигура постоянной ширины [2], следующим образом. Для $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ положим

$$\varsigma(\theta) = x,$$

где x, $y \in \partial F$, $|x - y| = \operatorname{diam} F$ и $x - y = \theta \operatorname{diam} F$, т. е. x, y — диаметральные точки F в направлении θ.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — фигура постоянной ширины, $EP = \{x \mid x \in \partial G\colon \chi(x) = \infty\}$, X — множество всех компонент связности множества $\Theta = \{\theta \mid \varsigma(\theta) \in EP\}$. Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in X$

$$\sup_{\alpha,\beta \in U} |\alpha - \beta| < \sqrt{2} - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, не зависящем от U;

(ii) если $U \setminus \widetilde{V} \neq \varnothing$ и $\widetilde{V} \setminus U \neq \varnothing$, где $\widetilde{V} = \{-\beta | \beta \in V\}$, то $\operatorname{int}(\widetilde{V}) \bigcap U = \varnothing$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n \subset G$ такие, что $\operatorname{diam} Y_i < \operatorname{diam} G$, $i = \overline{0, n}$ и $\bigcup\limits_{i=0}^{n} Y_i = G$.

Простым следствием данной теоремы является следующее утверждение, которое непосредственно обобщает результат В. Г. Болтянского.

Следствие 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — фигура постоянной ширины, $EP = \{x \mid x \in \partial G\colon \chi(x) = \infty\}$. Тогда если всякая точка из EP является изолированной, то существуют Y_0, $Y_1, \ldots, Y_n \subset G$ такие, что $\operatorname{diam} Y_i < \operatorname{diam} G$, $i = \overline{0, n}$ и $\bigcup\limits_{i=0}^{n} Y_i = G$.*

Заметим, что несмотря на поставленное в условии теоремы 1, на первый взгляд, сильное ограничение класса исходных множеств классом фигур постоянной ширины фактически это ограничение несущественно. Это легко видно из хорошо известного факта о том, что всякое ограниченное множество содержится в фигуре постоянной ширины такого же диаметра (см., например, [2]). Тем не менее данное условие значительно усложняет применение теоремы 1 на практике, так как требует построения мажорирующей фигуры постоянной ширины для каждого множества из $\mathbb{R}^n$. Однако из теоремы Г. Хадвигера 1946 г. [5] видно, что в смысле проблемы Борсука особое значение имеют точки нерегулярности на границе исходного множества G, т. е. в терминах теоремы 1 множество EP. Таким образом, разбить G на $n+1$ частей меньшего диаметра означает покрыть EP $n+1$ множествами с диаметрами, меньшими $\operatorname{diam} G$. Эти соображения позволяют обобщить теорему 1 на класс произвольного (вообще говоря, необязательно даже выпуклого) множества из $\mathbb{R}^n$.

1. *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Разбиение фигур на меньшие части. – Москва: Наука, 1971. – 88 с.
2. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. – Кишинев: Штиинца, 1978. – 280 с.
3. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.). – 1993. – **29**, No 1. – P. 60–62.
4. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. – Москва: МЦМНО, 2007. – 136 с.
5. *Hadwiger H.* Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. – 1945/46. – **18**. – P. 73–75.

6. *Anderson R. D., Klee V. L.* Convex functions and upper semi-continuous collections // Duke Math. J. – 1952. – **190**, No 2. – P. 349–357.
7. *Болтянский В. Г.* Задача об освещении границы выпуклого тела // Изв. АН МолдССР. – 1960. – **10 (76)**. – С. 77–84.

Донецкий национальный университет
Поступило в редакцию 27.10.2009

A. Yu. Ivanov

On Borsuk's conjecture for some sets with nonsmooth boundary

A generalization of the theorems by V. G. Boltyanski and by R. D. Anderson and V. L. Klee on classes of sets, on which Borsuk's conjecture is confirmed, has been obtained.