ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

Б. В. Боярский, член-корреспондент НАН Украины **В. Я. Гутлянский,** **В. И. Рязанов**

О приведенном уравнении Бельтрами

Для виродженого зведеного рівняння Бельтрамі $\overline{\partial} f = \lambda(z)\operatorname{Re}\partial f$ доведено критерії існування регулярного гомеоморфного розв'язку $f\colon D \to \mathbb{C}$ класу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Показано, що цей розв'язок f являє собою монотонне відображення й $\operatorname{Re}\partial f$ зберігає знак майже всюди в області D.

1. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Мы изучаем *приведенное уравнение Бельтрами*

$$\overline{\partial} f = \lambda(z)\operatorname{Re}\partial f, \qquad z \in D, \qquad \partial = \partial_x - i\partial_y, \qquad \overline{\partial} = \partial_x + i\partial_y, \tag{1}$$

где λ — измеримая комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию $|\lambda(z)| < 1$ почти везде в D. Уравнение (1) получается из общего уравнения Бельтрами с двумя комплексными характеристиками μ и ν

$$\overline{\partial} f = \mu(z)\partial f + \nu(z)\overline{\partial f}, \tag{2}$$

когда $\mu(z) = \nu(z)$.

Исследование приведенного уравнения Бельтрами представляет самостоятельный интерес как для теории квазиконформных отображений, так и для приложений этой теории (см., например, [1–3]). В частности, известная теорема единственности гомеоморфных решений для уравнения (2) в случае строгой эллиптичности (см. теорему 6.8 в работе [2]) была доказана на основе аналогичного результата для уравнения (1) (см. лемму 6.2 в [2], а также теорему 6.2.2 в [1]). Приведенное уравнение Бельтрами служит основным инструментом при исследовании вопроса факторизации по Стоилову решений общих эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости (см. [3; 1, теорема 6.1.1]). Отметим также, что решения приведенного уравнения Бельтрами допускают простую геометрическую интерпретацию в терминах хорошо известных векторных полей М. А. Лаврентьева (см., например, [3–5]). Что касается приложений, то мы отметим установленную недавно в работе [6] теорему единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта теорема утверждает, что каждое гомеоморфное решение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ для уравнения (1) с коэффициентом $|\lambda(z)| \leqslant k < 1$ генерирует соболевское векторное поле такое, что задача Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{z}(t) = f(z(t))$ локально однозначно разрешима при условии, что $f(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, и $f(z) \neq i\omega z$, где ω — вещественное число. Доказательство упомянутой выше теоремы единственности, которая распространяет хорошо известный классический результат для липшицевых векторных полей на более общие соболевские векторные поля, базируется на том факте, что отображение f является строго монотонным отображением, т. е. $\langle f(z) - f(w), z - w\rangle > 0$ для любых z, $w \in \mathbb{C}$ (см. [6, теоремы 1.4 и 1.7].

Заметим, что наличие таких векторных полей для любой измеримой функции $\lambda(z)$, $|\lambda(z)| \leqslant k < 1$ следует из теоремы существования гомеоморфных решений класса Соболева $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ для общего уравнения Бельтрами в случае строгой эллиптичности, установленной в работе [2, теоремы 5.1 и 6.1] (см. также [7, гл. 3, § 17]). Если же уравнение (1) вырождается, т. е. условие строгой эллиптичности заменяется более слабым условием $|\lambda(z)| < 1$ почти всюду в D, то фундаментальная проблема существования гомеоморфных решений остается актуальной. Единственный случай, когда вырождение коэффициента λ контролируется функциями класса Джона–Ниренберга с ограниченным средним колебанием, исследован в работе [8].

В данной работе мы приводим новые эффективные достаточные условия на коэффициент λ, обеспечивающие существование гомеоморфного решения $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ для уравнения (1) в случае вырождения. Нами установлено, что этот гомеоморфизм сохраняет некоторые фундаментальные свойства квазиконформных отображений, удовлетворяющих приведенному уравнению Бельтрами. В частности, $\mathrm{Re}\,\partial f \geqslant 0$ почти везде в области D и f представляет собой монотонное отображение.

2. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Говорят, что функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |f(z) - f^*_\varepsilon(z_0)|\, dxdy < \infty, \tag{3}$$

где

$$f^*_\varepsilon(z_0) = \fint_{B(z_0,\varepsilon)} f(z)\, dxdy \;-$$

среднее значение функции $f(z)$ относительно круга $B(z_0, \varepsilon)\colon |z - z_0| < \varepsilon$ при малом значении $\varepsilon > 0$ (см. [9]). Далее, функцию $f\colon D \to \mathbb{R}$ называют функцией *конечного среднего колебания в области* D, и пишут $f \in \mathrm{FMO}(D)$, если (3) имеет место во всех точках $z_0 \in D$. Ясно, что хорошо известный класс Джона–Ниренберга $\mathrm{BMO}(D)$, состоящий из функций ограниченного среднего колебания [10], содержится в классе $\mathrm{FMO}(D)$. Имеются примеры, показывающие, что класс $\mathrm{FMO}(D)$ шире класса $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [10]). По определению, класс $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, однако $\mathrm{FMO}(D)$ не является подмножеством класса $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ при $p > 1$, в то время как класс $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $p \in [1, \infty)$.

Понятие конечного среднего колебания функции естественным образом распространяется на случай, когда $z_0 = \infty$. Именно, мы говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, заданная в области D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$, имеет *конечное среднее колебание* в ∞, если функция $\varphi^*(z) = \varphi(1/\overline{z})$ имеет конечное среднее колебание в точке $z = 0$.

3. Приведем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $\lambda\colon D \to \mathbb{C}$, $|\lambda(z)| < 1$ почти всюду в D — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$K_\lambda(z) = \frac{1+|\lambda(z)|}{1-|\lambda(z)|} \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(D). \tag{4}$$

Тогда приведенное уравнение Бельтрами (1) *имеет гомеоморфное решение $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с отличным от нуля якобианом почти всюду в области D.*

Следствие 1. *Утверждение теоремы 1 остается в силе, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint\limits_{B(z_0,\varepsilon)} \frac{1+|\lambda(z)|}{1-|\lambda(z)|} dxdy < \infty \qquad \forall\, z_0 \in D. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $\lambda\colon D \to \mathbb{C}$, $|\lambda(z)| < 1$ почти всюду в D — измеримая функция, удовлетворяющая условию $K_\lambda \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Если дополнительно*

$$\int\limits_0^{d(z_0)} \frac{dr}{r\Lambda_{z_0}(r)} = \infty \qquad \forall\, z_0 \in D, \tag{6}$$

где $d(z_0) < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и $\Lambda_{z_0}(r)$ — интегральное среднее функции $K_\lambda(z)$ на окружности $|z - z_0| = r$. Тогда приведенное уравнение Бельтрами (1) *имеет гомеоморфное решение $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с отличным от нуля якобианом почти всюду в области D.*

Следствие 2. *Утверждение теоремы 2 остается в силе, если*

$$\Lambda_{z_0}(r) = O\left(\log\frac{1}{r}\right), \qquad \textit{когда} \qquad r \to 0 \qquad \forall\, z_0 \in D. \tag{7}$$

Если $D = \overline{\mathbb{C}}$, то утверждение следствия 1 останется в силе, если дополнительно потребовать, чтобы

$$\int\limits_{|z|>R} K_\lambda(z)\frac{dxdy}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \qquad \text{когда} \qquad R \to \infty. \tag{8}$$

Это замечание касается также теоремы 2 и следствия 2. Заметим, что условие (7) в ∞ имеет вид

$$\int\limits_d^{\infty} \frac{dR}{RK(R)} = \infty \tag{9}$$

для некоторого $d > 0$. Здесь $K(R)$ — интегральное среднее функции $K_\lambda(z)$ на окружности $|z| = R$. Что касается условия (7) в ∞, то оно приобретает вид

$$K(R) = O(\log R), \qquad \text{когда} \qquad R \to \infty. \tag{10}$$

4. Доказательство приведенных выше теорем существования для вырожденного приведенного уравнения Бельтрами (1) основано на следующем утверждении, которое можно рассматривать как аналог известной для аналитических функций и квазиконформных отображений теоремы сходимости Гурвица–Берса–Боярского (см. [12, следствие 3.8]).

Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность квазиконформных отображений, удовлетворяющих уравнению $\overline{\partial} f_n = \mu_n \partial f_n + \nu_n \overline{\partial f_n}$ с $|\mu_n(z)| + |\nu_n(z)| < 1$ почти всюду в D, и $K_{\mu_n,\nu_n}(z) \leqslant Q(z) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, где $K_{\mu,\nu}(z) = (1+|\mu(z)|+|\nu(z)|)/(1-|\mu(z)|-|\nu(z)|)$. Если $f_n \to f$ локально равномерно относительно сферической метрики, тогда либо f постоянна, либо f является гомеоморфизмом класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ и $\partial f_n \to \partial f$, $\overline{\partial} f_n \to \overline{\partial} f$ слабо в $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Более того, если дополнительно $\mu_n \to \mu$ и $\nu_n \to \nu$ почти везде в D, то $\overline{\partial} f = \mu \partial f + \nu \overline{\partial f}$ почти везде в D.

Взяв надлежащую последовательность λ_n срезок коэффициента λ такую, что $\lambda_n(z) \to \lambda(z)$ почти всюду в области D при $n \to \infty$, и воспользовавшись условием $K_\lambda(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(D)$, мы можем получить аппроксимирующую последовательность нормированных квазиконформных отображений f_n, удовлетворяющих уравнению (1), которая будет сходиться локально равномерно в D к требуемому гомеоморфизму $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Если $D = \overline{\mathbb{C}}$, то гомеоморфизм f следует нормировать условием $f(\infty) = \infty$.

Секвенциальный подход к построению гомеоморфизма f позволяет нам исследовать некоторые его свойства. В частности, так как, в силу теоремы 6.3.2 из [1], $\operatorname{Re} \partial f_n(z) \geqslant 0$ почти всюду в области D для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $\overline{\partial} f_n \to \overline{\partial} f$ слабо в пространстве $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, то и наше решение f вырожденного приведенного уравнения Бельтрами удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} \partial f(z) \geqslant 0 \tag{11}$$

почти всюду в D.

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется монотонным, если

$$\langle f(z) - f(w), z - w \rangle \geqslant 0 \tag{12}$$

для любой пары точек z, $w \in D$. Если равенство достигается только при $z = w$, то отображение называется строго монотонным.

В силу предложения 1.6 работы [6], каждое отличное от константы решение приведенного уравнения Бельтрами класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ с коэффициентом $|\lambda(z)| \leqslant k < 1$ является монотонным отображением. Следовательно, аппроксимирующая последовательность f_n удовлетворяет неравенству (12). Отсюда следует, что предельное отображение также удовлетворяет этому неравенству и, значит, является монотонным.

Предложение 1. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{C}$ — соболевское векторное поле из теоремы 1, а $z = z(t)$ и $w = w(t)$ — решения обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(z(t)) \tag{13}$$

в D. Тогда расстояние между этими решениями $|z(t) - w(t)|$ не убывает с ростом t. В частности, если $z(t_0) = w(t_0)$, то $z(t) = w(t)$ для всех значений $t \leqslant t_0$ в области существования решений $z(t)$ и $w(t)$.

Действительно, так как

$$\frac{d}{dt} |z(t) - w(t)|^2 = 2\langle f(z) - f(w), z - w \rangle \geqslant 0, \tag{14}$$

то для всех $t \leqslant t_0$ следует, что $|z(t) - w(t)| \leqslant |z(t_0) - w(t_0)| = 0$.

5. В заключение мы приведем явную формулу

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \exp\left\{ \int_1^{|z|} \frac{1+k(s)}{1-k(s)} \frac{ds}{s} \right\} \tag{15}$$

нормированных гомеоморфных решений приведенного уравнения Бельтрами (1) с коэффициентом $\lambda(z) = k(|z|)z/\overline{z}$, где $k\colon \mathbb{R}^+ \to (-1,1)$ — произвольная измеримая функция. В частности, если $\lambda(z) = -(1/3)z/\overline{z}$, то $f(z) = z/\sqrt{|z|}$. Это пример из работы [6], который показывает, что условие $f(z_0) \neq 0$ является существенным для единственности решения задачи Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Отображение f является δ-монотонным (см. определение 1.3 в работе [6]), однако уравнение $dz/dt = f(z)$ имеет бесконечно много решений, проходящих через начало координат при $t \geqslant 0 : z(t) = t^2 e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. С другой стороны, так как отображение f является монотонным, то, в силу предложения 1, существует только одно решение $z(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Положим, далее $\lambda(z) = (1-|z|)z/\overline{z}$, $|z| < 1$. Мы видим, что $|\lambda(z)| \to 1$ при $z \to 0$ и вырожденное приведенное уравнение Бельтрами имеет следующее гомеоморфное решение в единичном круге:

$$f(z) = \frac{z}{|z|^2} e^{2(1-1/|z|)}. \tag{16}$$

Легко проверить, что это отображение является монотонным в точке $z = 0$.

Исследование Б. В. Боярского было частично поддержано Министерством науки Польши, грант № NN 201397837.

1. *Astala K., Iwaniec T., Martin G. J.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane // Princeton Math. Ser. – Vol. 48. – Princeton: Princeton University Press, 2009. – 677 p.
2. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1957. – **43 (85)**. – С. 451–503.
3. *Bojarski B. V.* Primary solutions of general Beltrami equations // Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. – 2007. – **32**. – P. 549–557.
4. *Lavrent'ev M. A.* Sur une classe de representations continues // Mat. Sbornik. – 1935. – **42**. – P. 407–424.
5. *Волковыский Л. И.* Квазиконформные отображения. – Львов: Львов. ун-т, 1954. – 155 с.
6. *Iwaniece T., Kovalev L. V., Onninen J.* Dynamics of quasiconformal fields // arXiv:0811.4217vl[math.CA]. – 2008.
7. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
8. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**. – P. 305–326.
9. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory // Ibid. – 2005. – **2**. – P. 403–424.
10. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs. Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415–426.
11. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Finite mean oscillation and the Beltrami equation // Israel J. Math. – 2006. – **153**. – P. 247–266.
12. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – **54**, No 10. – P. 935–950.

Институт математики АН Польши, Варшава
Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 27.11.2009

B. V. Bojarski, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. Ya. Gutlyanskii,**
V. I. Ryazanov

On the reduced Beltrami equation

For the degenerate reduced Beltrami equation $\overline{\partial} f = \lambda(z)\,\mathrm{Re}\,\partial f$*, criteria for the existence of a homeomorphic* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ *regular solution* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *are proven. It is shown that such* f *is a monotone mapping, and* $\mathrm{Re}\,\partial f$ *preserves the sign almost everywhere in* D*.*