науково-технічної конференції „Моделювання”, 15-16 січня 2009 р.: тези допов. – К.: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2009. – С. 48–50.
5. *Каменева І.П.* База даних еколого-енергетичного моніторингу: проектування та створення / І.П. Каменева, В.О. Артемчук // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. – К.: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2009. – № 50. – С. 66-72.
6. *Попов О.О.* Математичне та комп’ютерне моделювання техногенних навантажень на атмосферу міста від стаціонарних точкових джерел забруднення : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 01.05.02 „Математичне моделювання та обчислювальні методи” / О.О. Попов. – К., 2010. – 20 с.
7. *Яцишин А.В.* Формування вибірки з бази даних еколого-енергетичного моніторингу / А.В. Яцишин, В.О. Артемчук // Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту : Матеріали Міжнародної наукової конференції, 18-22 травня 2009 р. - Херсон: ХНТУ, 2009. – Т.2. – Ч.2. – С. 114–117.

Поступила 20.01.2011р.

УДК 004.942

И.А. Пилькевич, д.т.н., заведующий кафедрой мониторинга ОПС,
А.В.Маевский, соискатель Житомирского национального агроэкологического университета, г. Житомир

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ЖИВОТНОГО МИРА

Рассмотрена методология формирования динамической системы, справедливой для адекватного описания объектов разной природы. Разработана обобщенная логистическая модель динамики популяций. Предлагаемая математическая модель получена теоретическим путем на основе положений системологии.
Ключевые слова: обобщенная логистическая модель, динамика популяций.

The paper considers the methodology of forming up the dynamic model of the system which is veritable for the adequate description of the objects different by nature. It develops the generalized logistic model of population dynamics. The proposed mathematical model has been obtained theoretically on the basis of systemathology principles. Refs: 8 titles.
Key words: generalized logistic model, the dynamics of population.

Введение

Для понимания механизмов функционирования и решения вопросов использования популяций большое значение имеют сведения об их структуре. Закономерное изменение числа особей в популяции данного вида на протяжении года (сезонная) или ряда лет (многолетняя) определяется изменениями рождаемости (плодовитости) и смертности особей, а также их перемещением (эмиграцией или иммиграцией).

Оценить интегральное влияние первичных и вторичных радиоэкологических эффектов в условиях естественных популяций тяжело, так как они многовекторные и неоднозначные. Единственным показателем состояния популяций в таких условиях может быть общее состояние их численности.

Изучение закономерностей динамики численности животных необходимо для создания научных основ рационального использования полезных животных и борьбы с вредными насекомыми. При этом используются математические методы, в частности, моделирование. Среди моделей динамики популяций в математической экологии наибольшее распространение получила логистическая функция Ферхюльста (1838 г.), которая используется для описания как поведения популяций, так и их взаимодействия, например, в модели Лотки-Вольтерра [1]. К недостаткам логистической функции можно отнести ее эвристическое происхождение и неполное отображение потерь.

Поэтому в работе предлагается методология построения математических моделей динамики популяций, справедливая для математического описания объектов различной природы. Теоретической базой построения математических моделей выступает системология.

1. Теоретический подход к построению математической модели динамики популяций

При формировании теоретического подхода к математическому моделированию динамики популяций предлагается использовать основы конструктивной теории, которая требует применения общего теоретического ядра. В качестве такого ядра целесообразно использовать теоретические основы теории систем, которые отображают „единое знание" [2]. Однако до настоящего времени единые знания в теории систем формировались в качественной форме категории „свойства", что усложняло переход к количественным параметрам [3]. Использование энергетической оценки „свойств" позволило в количественной форме построить теоретическую основу математической модели динамики популяций.

1.1. Методология построения математической модели динамики популяций

При создании математической модели динамики популяций необходимо придерживаться основных этапов, которые включают:

1) формирование энергетического подхода к аксиоматике системы;

2) составление энергетического уравнения системы;

3) составление уравнения энергетического потенциала системы.

Энергетический подход к аксиоматике систем заключается в формировании базиса независимых переменных, который должен обеспечивать абстрактную форму поведения объектов разной природы. Поведение объектов рассматривается с позиций движения субстанции в поле данной субстанции. При описании динамики популяций абстрактная форма движения рассматривается как поток энергии в энергетическом поле. Поэтому базис переменных должен включать [4]:

– фундаментальные переменные пространства l и времени t;

– фазовые переменные, которые описывают движение субстанции в поле этой субстанции.

Базис независимых фазовых переменных должен состоять из двух величин, одна из которых характеризует субстанцию ω, а другая – потенциал поля субстанции. При этом произведение независимых фазовых переменных должен иметь размерность энергии $\left[\upsilon\omega\right] = Дж$.

В связи с этим энергетический потенциал, в первую очередь, заключается в выборе независимых переменных. Заметим, что если фазовая переменная субстанции имеет размерность энергии, то переменная энергетического потенциала будет безразмерной величиной.

Энергетическое уравнение системы отображает энергетический обмен системы со средой на основе законов функционирования системы [5]. В замкнутой относительно энергетического обмена совокупности систем должен выполняться закон сохранения энергии. Энергетическое уравнение системы должно быть основано на таких положениях:

1. Полная энергия состоит из основной и дополнительной энергии

$$X\left(t\right) = V\left(t\right) + Y\left(t\right), \qquad (1)$$

где $X\left(t\right)$, $V\left(t\right)$, $Y\left(t\right)$ – соответственно, полная, основная и дополнительная энергии системы.

2. Система обладает способностью увеличивать полную энергию за счет дополнительной энергии среды. Поток дополнительной энергии пропорционален произведению полной энергии и энергетическому потенциалу:

$$\frac{dY\left(t\right)}{dt} = \varphi\left(t\right) X\left(t\right), \qquad (2)$$

где $\varphi\left(t\right)$ – энергетический потенциал системы.

Используя (1) и (2) получим энергетическое уравнение системы, которое в форме „переменных состояния” описываются дифференциальным уравнением состояния и уравнением алгебры „выход-состояние-вход”:

$$\begin{aligned} &\frac{dX\left(t\right)}{dt} = \varphi\left(t\right) X\left(t\right) + \frac{dV\left(t\right)}{dt}, \\ &Y\left(t\right) = X\left(t\right) - V\left(t\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

Фазовые переменные системы независимы, однако их изменения могут быть взаимосвязанными. Поэтому уравнение энергетического потенциала описывается суммой величин, которые отображают разные виды зависимости фазовых переменных. Ограничимся основными видами взаимной зависимости энергетического потенциала и энергии:

1) потенциал не зависит от энергии $\varphi_1(t) = \varphi$;

2) потенциал пропорционален энергии $\varphi_2(t) = \frac{1}{a_0} X(t)$;

3) потенциал пропорционален скорости изменения энергии $\varphi_3(t) = a_1 \frac{dX(t)}{dt}$,

где a_0, a_1 – параметры системы, характеризующие соответствующие зависимости потенциала при изменении энергии.

Тогда уравнение суммарного потенциала описывается алгебраической суммой:

$$\varphi(t) = \varphi - a_1 \frac{dX(t)}{dt} - \frac{1}{a_0} X(t). \tag{4}$$

Как известно [3], условие линейности и неоднородности общего дифференциального уравнения физических объектов отображает равенство нулю дополнительной энергии $Y(t) \equiv 0$. Поэтому полная энергия равна основной $X(t) \equiv V(t)$. Подставляя выражение для суммарного энергетического потенциала системы (4) в уравнение системы (3), получим общее дифференциальное уравнение системы:

$$\left(a_1 + \frac{1}{X(t)}\right) \frac{dX(t)}{dt} + \frac{1}{a_0} X(t) - \varphi = 0. \tag{5}$$

1.2. Математическое моделирование динамики популяций

Для экологических систем в качестве фазовых переменных используются энергетические величины – объем биомассы и численность популяций (в энергетическом эквиваленте), а энергетический потенциал – скорости роста популяций.

Переход от энергетических величин уравнения (5) к количественным переменным дает общее нелинейное дифференциальное уравнение экологической системы для численности популяций:

$$\left(a_1 + \frac{1}{N(t)}\right) \frac{dN(t)}{dt} + \frac{1}{a_0} N(t) - \varphi = 0, \tag{6}$$

где $N(t)$ – количество особей в популяции; a_0, a_1, φ – параметры экологической системы, которые связывают изменения скорости роста популяции с изменениями численности популяций.

2. Обобщенная логистическая модель динамики популяций

Общее логистическое уравнение динамики популяций описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\left(1+a_1 N\right)\frac{dN}{dt}=\varphi N-\frac{N^2}{a_0}, \qquad (7)$$

где N – количество особей в популяции; φ – потенциал экспоненциального роста; a_0, a_1 – параметры потерь, которые сдерживают экспоненциальный рост популяций.

Уравнение (7) отличается от уравнения Ферхюльста $\frac{dN}{dt}=\varphi^0 N-\frac{N^2}{a_0}$ наличием нелинейного элемента $a_1 N\frac{dN}{dt}$.

2.1. Общее решение уравнения динамики популяций

При решении уравнения динамики популяций используем подстановку $b_0=a_0\varphi$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\left(1+a_1 N\right)\frac{dN}{dt}=\varphi N\left(1-\frac{N}{b_0}\right). \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет аналитическое решение в виде трансцендентного уравнения [6]

$$N\left(t\right)=c\left(b_0-N\left(t\right)\right)^{1+G}\mathrm{e}^{\varphi t}. \qquad (9)$$

где c – параметр начального значения; $G=a_1 b_0=a_1 a_0\varphi$ – интегральный показатель потерь, который равен произведению всех параметров уравнения (7).

Выражение (9) в неявном виде описывает обобщенную логистическую функцию роста, которая при $t\to\infty$ асимптотически стремится к пороговому значению $b_0=a_0\varphi$. Обобщение проявляется в том, что при $a_1=0$ уравнение (8) сводится к уравнению Ферхюльста, а его решение (9) – к простой логистической функции $N\left(t\right)=b_0 c\mathrm{e}^{\varphi t}/\left(1+c\mathrm{e}^{\varphi t}\right)$. Это дает основание считать уравнение (8) – обобщенным логистическим уравнением, а его решение (9) – обобщенной логистической функцией. С другой стороны, расширение логистической модели обеспечивается за счет включения в уравнение Ферхюльста дополнительного элемента $a_1 N\frac{dN}{dt}$.

Для интерпретации параметров потерь перепишем уравнение (8) в виде $\frac{dN}{dt}=\varphi N-n^-$, где $n^-=n_1^-+n_0^-=a_1 N\frac{dN}{dt}+N^2/a_0$ – поток потерь численности популяции. Элемент $n_0^-=N^2/a_0$, представленный в виде

$n_0^- = \varphi_0^- N$ (где $\varphi_0^- = \frac{1}{a_0}\int_0^T n dt$ – потенциал емкостных потерь, $n = \frac{dN}{dt}$), описывает потери, пропорциональные количеству популяции в экологической нише, а параметр a_0 – емкость ниши, которая ограничивает возможность накопления популяции асимптотическим порогом $b_0 = a_0\varphi$. Элемент $n_1^- = a_1 N \frac{dN}{dt}$ представим в виде $n_1^- = \varphi_1^- N$, где $\varphi_1^- = a_1 n$ – потенциал резистивных потерь. Этот элемент описывает потери, пропорциональные скорости изменения популяции, а параметр a_1 – сопротивление среды, сдерживающее рост популяции.

При больших значениях емкости ниши $a_0 \to \infty$ емкостные потери $n_0^- = N^2 / a_0$ стремятся к нулю и обобщенное логистическое уравнение вырождается в экспоненциальное уравнение вида:

$$\left(1 + a_1 N\right)\frac{dN}{dt} = \varphi N . \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет аналитическое решение в виде трансцендентного уравнения [7]:

$$N\left(t\right)e^{a_1 N(t)} = ce^{\varphi t} . \tag{11}$$

Выражение (11) в неявном виде описывает обобщенную экспоненциальную функцию роста, которая учитывает потери, связанные с торможением роста. Обобщение проявляется в том, что при $a_1 = 0$ уравнение (10) сводится к простому экспоненциальному уравнению $\frac{dN}{dt} = \varphi N$, а его решение (11) – к простой экспоненциальной функции $N\left(t\right) = N\left(0\right)\mathrm{e}^{\varphi t}$.

С другой стороны, расширение экспоненциальной модели обеспечивается за счет включения дополнительного элемента $a_1 N \frac{dN}{dt}$. При значениях $a_1 N >> 1$ уравнение (10) вырождается в уравнение $\frac{dN}{dt} \approx \varphi^0 / a_1$, которое задает асимптоту в виде линейной функции $N = \left(\varphi^0 / a_1\right)t$. Из этого следует, что при больших значениях сопротивления среды $a_1 >> 0$ функция (11) асимптотически стремится к прямой, а линеаризация экспоненциальной функции отражает эффект больших резистивных потерь.

Явную форму обобщенной логистической функции (9) можно получить, решая соответствующее (7) конечно-разностное уравнение. Дискретная обобщенная логистическая функция в рекуррентной форме имеет вид:

$$N_{k+1} = \left[1 + \varphi_0 \left(\frac{1}{1 + a_1 N_k} - \frac{N_k / b_0}{1 + a_1 N_k} \right)\right] N_k . \qquad (12)$$

При больших значениях емкости $a_0 \to \infty$ логистическая функция (12) вырождается в дискретную экспоненциальную функцию

$$N_{k+1} = \left(1 + \varphi_0 \frac{1}{1 + a_1 N_k}\right) N_k . \qquad (13)$$

При больших значениях $a_1 N >> 1$ экспоненциальная функция (13) вырождается в линейную функцию вида $N_{k+1} = N_k + \varphi_0 / a_1$.

2.2. Частное решение уравнения динамики популяций

Анализ (12) показывает, что для построения математической модели динамики популяции конкретного вида необходимо экспериментально определить параметры модели φ_0, a_1 и b_0. Аналитическое решение системы уравнений, основанных на модели (12), относительно искомых параметров модели дает результат:

$$\varphi_0 = \frac{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43})N_2 - (1-n_{32})N_3\right] - N_1\left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}) - (N_3 \Delta N_{32} - N_2 \Delta N_{43})} -$$

$$- \frac{(1-n_{21})\left[N_3 \Delta N_{32} - N_2 \Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}) - (N_3 \Delta N_{32} - N_2 \Delta N_{43})};$$

$$a_1 = \frac{(1-n_{21})\Delta N_{32} - N_1\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - \left[N_3(1-n_{32}) - N_2(1-n_{43})\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}) - (N_3 \Delta N_{32} - N_2 \Delta N_{43})};$$

(14)

$$b_0 = \frac{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43})N_2 - (1-n_{32})N_3\right] - N_1\left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - (1-n_{21})\left[\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right] - \left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\right]\Delta N_{43}} -$$

$$- \frac{(1-n_{21})\left[N_3 \Delta N_{32} - N_2 \Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\left[(1-n_{43}) - (1-n_{32})\right] - (1-n_{21})\left[\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right] - \left[(1-n_{43})\Delta N_{32} - (1-n_{32})\right]\Delta N_{43}},$$

где $\Delta N_{mk} = N_m - N_k$, $n_{mk} = \dfrac{N_m}{N_k}$, $m, k = 1, 2, 3.$

Таким образом, для математического моделирования динамики популяции конкретного вида животного мира (растений или микроорганизмов) необходимо, используя (14), определить постоянные параметры обобщенной логистической модели, воспользовавшись данными мониторинга соответствующего вида популяций (N_1, N_2, N_3, N_4).

3. Мониторинг динамики численности основных видов охотничьих животных

Мониторинг динамики популяций основных видов охотничьих животных проводился на территории Житомирской области государственным управлением лесного и охотничьего хозяйства с целью охраны, использования и возобновления животного мира. Учет численности охотничьих животных проводился два раза в год с использованием специалистов государственного управления охраны окружающей природной среды в Житомирской области. Мониторинг позволил определить пропускную способность охотничьих хозяйств Житомирского региона.

Данные общего количества диких животных, обитающих в охотничьих угодьях Украины приведены в табл. 1 [8].

Таблица 1

Динамика численности основных видов диких животных, голов

Вид копытного животного	***Год***					
	2003	***2004***	***2005***	***2006***	***2007***	***2008***
Олень	16734	16992	17606	17899	18480	19610
Кабан	38796	40351	43119	44808	48982	53084
Косуля	121666	122476	126267	126556	131831	136441
Лань	2217	2268	2692	2664	3143	3183

Анализ динамики численности основных видов охотничьих животных за последние три года свидетельствует о том, что численность парнокопытных стабилизировалась, а количество таких видов как: олень благородный, олень пятнистый, косуля и кабан растет с каждым годом. Численность лося в 2007 году составила 1461 особь, что говорит об увеличении популяции на 5 особей. Главной причиной такого незначительного прироста ценного охотничьего зверя является его миграция, которая повторяется через каждые 8-10 лет. Стабильный рост особей дикого кабана является следствием того, что большинство охотничьих хозяйств области в последние годы начали специализацию с введения охотничьего хозяйства на кабана, как наиболее потребляемого среди копытных охотничьего вида, а также высокой восстановительной способностью его вида.

Воспользовавшись данными табл. 1 с помощью (14) рассчитаем рабочие параметры логистической модели (12) для популяций оленя, кабана, косули и лани. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблиця 2

Значения рабочих параметров моделей динамики популяций основных видов охотничьих животных

Вид копытного животного	***Параметр***		
	a_1	φ_0	b_0
Олень	$-5{,}88 \cdot 10^{-5}$	$1{,}628 \cdot 10^{-2}$	16981,903
Кабан	$-2{,}47 \cdot 10^{-5}$	$3{,}95 \cdot 10^{-2}$	40454,979
Косуля	$-8{,}15 \cdot 10^{-6}$	$3{,}192 \cdot 10^{-3}$	123657,8
Лань	$-4{,}41 \cdot 10^{-4}$	$2{,}62 \cdot 10^{-2}$	2260,729

Анализ данных табл. 2 показывает, что произведение $a_1 N << 1$. Это позволяет обобщенное логистическое уравнение динамики популяций (7) записать в виде:

$$\frac{dN}{dt} \approx \varphi N - \frac{N^2}{a_0}. \quad (15)$$

Ошибка, которая появляется при таком упрощении, не превышает ошибку округления результатов, полученных во время расчетов (округления до целого числа особей).

Таким образом, идентификация теоретически обоснованной обобщенной логистической модели динамики популяций позволила свести уравнение (7) к уравнению Ферхюльста.

Выводы и практические рекомендации

1.Среди моделей динамики популяций в математической экологии наибольшее распространение получила логистическая функция Ферхюльста (1838 г.), которая используется для описания, как поведения популяций, так и их взаимодействия, например, в модели Лотки-Вольтерра. К недостаткам логистической функции можно отнести ее эвристическое происхождение и неполное отображение потерь.

2.Развитие логистической модели динамики популяций достигается за счет дополнения нелинейным элементом, который описывает потери, связанные с сопротивлением среды росту популяции. Обобщенная логистическая функция, полученная теоретическим путем, отражает емкостные и резистивные потери и может использоваться для описания, как роста популяций, так и их взаимодействия.

3.Для идентификации обобщенной математической модели динамики популяций необходимо, воспользовавшись данными мониторинга соответствующего вида популяции, с помощью системы (14) оценить рабочие параметры модели. Полученная математическая модель динамики популяций будет адекватно описывать все факторы, влияющие на динамику развития изучаемой популяции.

1. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підруч.] / *В.В.Богобоящий, К.Р.Чурбанов, П.Б.Палій, В.М.Шмандій.* – К.: Центр навч. л-ри, 2004. – 216 с.

2. *Добровольський В.В.* Основи теорії екологічних систем: [навч. підр.] / *В.В.Добровольський.* – К.: ВД „Професіонал”, 2005. – 272 с.

3. *Грабар І.Г.* Універсальна модель систем: методологічний аспект / *І.Г.Грабар, Ю.О.Тимонін, Ю.Б.Бродський* // Вісн. ЖНАЕУ: наук.-теорет. зб. – 2009. – №1. – С. 358-366.

4. *Тимонін Ю.О.* Концептуальний базис інженерії бізнесу / *Ю.О.Тимонін* // Економіка і управління. – 1999. – №1(2). – С. 74-79.

5. *Тимонін Ю.О.* Принципи енергетичної взаємодії систем / *Ю.О.Тимонін* // Вісн. ЖІТІ. – 1999. – №9. – С. 150-155.

6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление /

Л.Э.Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин*. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 544 с.
8. *Пилькевич И.А.* Мониторинг копытных животных, обитающих в охотничьих хозяйствах Украины / *И.А.Пилькевич, А.В.Маевский* // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/4 (47). – С. 35-40.

Поступила 27.01.2011р.

УДК 621.317

Л.Б.Ліщинська, к.т.н., доц., ВНТУ, м. Вінниця

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДВОХЗАТВОРНОГО ПОЛЬОВОГО ТРАНЗИСТОРА В РЕЖИМІ ПРЯМОГО ЗМІЩЕННЯ НА ЗАТВОРАХ

The mathematical model of two breech-block field transistor is grounded in the mode of direct displacement on breech-blocks as an indefinite matrix of conductivity of 4th orders. Analytical dependences of parameters of this model are got on the parameters of semiconductor structure.

Вступ. У цифровій техніці широке використання отримали багатоемітерні і багатоколекторні транзистори [1]. В аналоговій техніці у генераторах, підсилювачах, перетворювачах, фазообертачах, атенюаторах використовуються багатозатворні транзистори з *p-n* переходом (ПТ2) і переходом Шотткі (ПТШ2) [2]. Ефективними виявилися ПТ, що мають не більш 2-х переходів, які працюють при зворотному зміщенні. Математичні моделі ПТ2 для такого режиму відомі [3]. Розгляд математичних моделей однозатворних ПТ показав, що вони можуть працювати і при прямому зміщенні на затворі в інжекційно-пролітному режимі [4]. Це розширює функціональні можливості ПТ2, але вимагає розробки математичних моделей ПТ2 у цьому режимі.

Обґрунтування математичної моделі. Двозатворний польовий транзистор (рис. 1) є незалежним чотириелектродним багатополюсником, зв'язок між струмами $\left(i_{31},\, i_{32},\, i_B,\, i_C\right)$ і напругами $\left(U_{31},\, U_{32},\, U_B,\, U_C\right)$ якого описується рівнянням

$$\begin{bmatrix} i_{31} \\ i_{32} \\ i_C \\ i_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{31} \\ U_{32} \\ U_C \\ U_B \end{bmatrix}. \qquad (1)$$