ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2010

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 552.323



**О. В. Арясова, Я. М. Хазан**

# Взаимодействие просачивания и неупругой деформации пористости при сегрегации расплава в частично расплавленных системах

*(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)*

*Тиск у розплаві, що заповнює пористість у частково розплавленій системі, визначається конкуренцією просочування, яке наближає градієнт тиску в розплаві до гідростатичного, збільшуючи різницю тисків між розплавом і матрицею, і непружною деформацією пор, що призводить до зменшення цієї різниці тисків. Отримано загальне рівняння, що описує взаємодію просочування і непружної деформації і замикає систему визначаючих рівнянь динаміки двофазного середовища.*

Неизбежным этапом эволюции частично расплавленной системы является фильтрационная сегрегация расплавов, которая происходит за счет фильтрации расплава, сопровождающейся одновременной перестройкой порового пространства, и приводит к формированию областей, в которых содержание расплава в десятки раз превышает степень плавления.

Движущей силой локального изменения объемного содержания расплава $\varphi$ (пористости) является разность давлений в расплаве $p$ и матрице $p_m$:

$$\Delta P = p - p_m, \qquad (1)$$

впервые включенная в систему определяющих уравнений Bercovici et al. [1].

Скорость изменения пористости под действием перепада давлений $\Delta P$ между расплавом и матрицей зависит от реологии последней и геометрии пористости. Мы примем, что реология — линейная (вязкость или диффузионная ползучесть) и характеризуется реологическим параметром $\eta$, который будем называть вязкостью. В этом случае

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{\mathrm{def}} = A(\varphi)\varphi\frac{\Delta P}{\eta}, \qquad (2)$$

где коэффициент $A(\varphi)$ зависит от содержания расплава и геометрии пор.

При малых степенях плавления жидкость сосредоточена на ребрах зерен кристаллической структуры (например, [2]) и образует тубулы, поперечный размер которых мал по сравнению с их длиной, т. е. размером зерен. Если тубулы считать изолированными круговыми цилиндрами, радиус которых мал по сравнению как с их длиной, так и с расстоянием между ними, то $A(\varphi) \equiv 1$ [1]. Для цилиндрических включений расплава, расположенных по ребрам зерен кубической решетки, $A(\varphi) \approx (1 - 4\varphi/3\pi)^{-1}$.

С математической точки зрения учет перепада давлений между расплавом и матрицей увеличивает количество неизвестных. Поэтому в систему определяющих уравнений необходимо добавить еще одно уравнение. Уравнение (2) не может быть использовано для этой цели, поскольку оно представляет собой альтернативную стандартной (например, [3]) запись уравнения сохранения массы расплава.

В то же время очевидно, что распределение давления в расплаве в каждый момент времени устанавливается за счет конкуренции двух процессов — просачивания и вязкой деформации матрицы. Первый из них приближает градиент давления в расплаве к гидростатическому и одновременно увеличивает разность давлений между расплавом и матрицей, вызывая изменение пористости. Второй — уменьшает разность давлений между расплавом и матрицей, приближая градиент давления в расплаве к литостатическому и стимулируя фильтрацию. Если “выключить” вязкую деформацию, то вследствие просачивания в связной части расплава установится гидростатический градиент давления. Если, наоборот, “остановить” просачивание, то давления в матрице и расплаве выровняются и вязкая деформация матрицы прекратится.

В общем случае эволюция системы определяется более медленным процессом. Если характерное время $\tau_{\text{flow}}$ установления гидростатического градиента мало по сравнению со временем вязкой деформации матрицы, $\tau_{\text{flow}} \ll \tau_{\text{def}}$, то объем пористости медленно изменяется, а фильтрация поддерживает градиент давления, близкий к гидростатическому. В противоположном случае, т. е. при $\tau_{\text{flow}} \gg \tau_{\text{def}}$, происходит медленная фильтрация расплава в поле литостатического градиента давления, а матрица подстраивается под фильтрацию, “компенсируя” приток или отток расплава. В обоих случаях решающую роль играет упругость расплава и матрицы.

В настоящей работе получено общее уравнение, которое описывает взаимодействия просачивания и неупругой деформации и замыкает систему определяющих уравнений динамики двухфазной среды.

**Метод осреднения.** Будем считать пористую среду двухфазной. Пусть $f(\mathbf{r}, t) = 1$ в области, занятой фазой $m$, и $f(\mathbf{r}, t) = 0$ в области, занятой другой фазой. Для произвольного $\Delta V$ объемное содержание расплава

$$\varphi_V = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} f(\mathbf{r}, t)\, dV. \tag{3}$$

Пусть $a$ — характерный масштаб пористости (порядка размера зерен кристаллической структуры), а $L \gg a$ — характерный масштаб крупномасштабной переменности. Следуя Р. И. Нигматулину [4], предположим, что существует некоторый минимальный масштаб $l_V \gg a$ такой, что при интегрировании по объему размера $L \gg l \geqslant l_V$ результат осреднения (в частности, $\varphi_V$) не зависит от выбора объема $\Delta V$. В противном случае осреднение не является осмысленной процедурой.

Рассмотрим теперь произвольный объем $\Delta V$, размера порядка $l_V$. Среднее значение произвольной величины $\psi(\mathbf{r}, t)$ по области, занятой в $\Delta V$ расплавом, определим обычным образом:

$$\varphi_V \langle\psi\rangle_V \equiv \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} f(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)\, dV. \tag{4}$$

Теперь интегрирование по некоторому произвольному объему $V$ можно выполнить, представив его в виде объединения областей $\Delta V_j$, размер которых $\sim l_V$. Это позволяет перейти от интегрирования быстро флуктуирующих величин, заданных микроскопически, к интегрированию плавно меняющихся осредненных функций:

$$\int\limits_V f(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)\, dV = \sum_j \int\limits_{\Delta V_j} f(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)\, dV = \sum_j \varphi_{Vj} \langle\psi\rangle_{Vj} \Delta V_j \tag{5}$$

(угловые скобки означают осреднение).

Последнее выражение можно интерпретировать как интегральную сумму. Поэтому окончательно

$$\int\limits_V f(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t) dV = \int\limits_V \varphi\langle\psi\rangle_V dV. \tag{6}$$

Абсолютно аналогичным образом можно ввести осреднение по поверхности. Для некоторого участка $\Delta S$, размер которого $l_S$ удовлетворяет тем же условиям, что и размер $l_V$ при осреднении по объему,

$$\varphi_S = \frac{1}{\Delta S} \int\limits_{\Delta S} f(\mathbf{r},t)\, dS \tag{7}$$

и

$$\varphi_S \langle\psi\rangle_S = \frac{1}{\Delta S} \int\limits_{\Delta S} f(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)\, dS. \tag{8}$$

Выберем теперь $\Delta V$ таким образом, чтобы его размер $l$ удовлетворял неравенствам $L \gg$ $\gg l = \max(l_V, l_S)$. Тогда определение $\varphi_V$ можно записать в виде

$$\varphi_V = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} f(\mathbf{r},t)\, dV = \frac{1}{\Delta V} \int dz \int\limits_{\Delta S(z)} f(\mathbf{r},t)\, dS, \tag{9}$$

где $\Delta S(z)$ — площади сечений, перпендикулярных оси $Z$.

Внутренний интеграл в правой части (9) равен $\varphi_S \Delta S(z)$. Поскольку масштаб $l \geqslant l_S^*$, то $\varphi_S$ не зависит от выбора поверхности, одинаково для всех сечений и, следовательно, может быть вынесено из-под знака интеграла, откуда немедленно следует, что $\varphi_V = \varphi_S =$ $= \varphi$. Аналогичное рассуждение приводит к заключению, что для произвольной функции $\psi(\mathbf{r},t)$ $\varphi_V\langle\psi_V\rangle = \varphi_S\langle\psi_S\rangle$, т. е. $\langle\psi_V\rangle = \langle\psi_S\rangle = \langle\psi\rangle$. Таким образом, объемное и поверхностное осреднения приводят к одинаковым результатам.

Нам понадобится также осреднение по межфазной поверхности. Будем считать известной площадь $\Delta S^*$ границ между расплавом и матрицей в $\Delta V$ и обозначим $s^*$ площадь межфазных границ в единице объема пористой среды $s^* = \Delta S^*/\Delta V$ [1, 4]. В отличие от пористости $s^*$ является размерной величиной. Теперь можно в полной аналогии с осреднением по объему разбить произвольный $V$ на области $\Delta V_j$ с размерами порядка $l = \max(l_V, l_S)$ и записать

$$\int\limits_{S^*} \psi(\mathbf{r}, t)\, dS = \sum_j \int\limits_{\Delta S_j^*} \psi(\mathbf{r}, t)\, dS = \sum_j \langle\psi\rangle_j \Delta S_j^* = \sum_j s_j^* \langle\psi\rangle_j \Delta V_j = \int\limits_V s^* \langle\psi\rangle\, dV, \qquad (10)$$

где $\Delta S_j$ — площадь межфазных поверхностей в $\Delta V_j$.

**Эквивалентные варианты записи осредненного уравнения сохранения массы расплава.** Скорость изменения массы в некотором произвольном $V$

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \rho_l f dV = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \varphi\langle\rho_l\rangle\, dV. \qquad (11)$$

Здесь первый интеграл вычисляется по микроскопически описанной среде, а во втором — интегрируются осредненные функции.

Далее можно рассуждать двумя различными, но эквивалентными способами. Обычно утверждается, что масса расплава в объеме может измениться только вследствие потока массы через поверхность и фазового превращения внутри. Тогда

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = -\int\limits_S f \rho_l \mathbf{v}_l dS + \int\limits_V \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} dV, \qquad (12)$$

где $S$ — граница объема $V$; $\mathbf{v}_l$ — скорость расплава; $\partial M/\partial t$ — масса расплава, образующегося в единице объема в единицу времени.

Если теперь в первом интеграле в правой части (12) перейти к интегрированию осредненных величин, а затем воспользоваться теоремой Остроградского–Гаусса и сравнить со вторым интегралом в правой части (11), то возникает каноническое уравнение сохранения массы расплава, которое в предположении несжимаемости имеет вид (например, [3]):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\varphi\langle\mathbf{v}_l\rangle = \frac{1}{\rho_l}\frac{d\mathrm{M}}{dt}. \qquad (13)$$

С другой стороны, из уравнения (11) следует

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = \int\limits_V \left[ f\frac{\partial\rho_l}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial f}{\partial t} \right] dV. \qquad (14)$$

Разность $\Delta f = f(\mathbf{r}, t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)$ значений функции $f$ в близкие моменты времени $t + \Delta t$ и $t$ отлична от нуля только в слое толщиной $u_n \Delta t$, примыкающем к межфазной границе, где $u_n$ — скорость перемещения межфазной границы в направлении внешней нормали к области, занятой расплавом. При этом $\Delta f$ равно объему единицы площади этого слоя, так что

$$\frac{\partial M_l}{\partial t} = \int\limits_V f\frac{\partial\rho_l}{\partial t} dV + \int\limits_{S^*} \rho_l u_n dS = \int\limits_V \varphi\left\langle\frac{\partial\rho_l}{\partial t}\right\rangle dV + \int\limits_V s^* \langle\rho_l u_n\rangle dV. \qquad (15)$$

В последнем равенстве (15) мы перешли к интегрированию осредненных величин, воспользовавшись уравнением (10).

Сравнивая выражение (15) с последним интегралом в правой части (11), окончательно получаем в предположении несжимаемости расплава:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = s^* \langle u_n \rangle. \tag{16}$$

Уравнение (16) выражает очевидный факт, что при фиксированном объеме изменение массы расплава можно полностью рассчитать, зная перемещение внутренних межфазных границ. Поэтому соотношение представляет собой альтернативную запись осредненного уравнения сохранения массы расплава. Оно отличается по виду от канонического варианта (13), но полностью ему эквивалентно.

В силу малости пор (включений расплава) по сравнению с масштабом осреднения почти все поры полностью содержатся в объеме, по которому вычисляется средняя скорость межфазной границы $\langle u_n \rangle$. Процедура осреднения исключает "переносную" скорость этих пор, а также скорость границ, связанную с изменением их формы без изменения объема. При этом $s^* \langle u_n \rangle$ описывает полное изменение объема пористости вследствие как деформации матрицы под действием порового давления, так и фазовых превращений.

Процедура осреднения не исключает полностью переносную скорость для пор, пересекающих границу объема, по которому выполняется осреднение. Соответствующее слагаемое равно $\mathrm{div}(\varphi \mathbf{v}_m)$, где $\mathbf{v}_m$ — осредненная скорость матрицы, и описывает адвективный перенос расплава в процессе течения матрицы. Если эта величина не является малой по сравнению с изменением пористости вследствие деформации пор, то адвекция является более эффективной, чем просачивание. В этой работе нас интересуют механизмы эволюции пористости за счет фильтрации расплава относительно матрицы. Поэтому будем считать, что $\mathbf{v}_m = 0$, тогда правая часть уравнения (16) полностью сводится к изменению объема пористости вследствие совместного действия фильтрации и вязкой релаксации матрицы, а также изменению фазовых превращений.

Из уравнения (16) очевидно, что невозможно рассчитать изменение пористости, не конкретизируя модели строения среды и механизмы ее деформации в масштабе отдельных включений расплава. Если принять, что поры представляют собой изолированные круговые цилиндры в среде с линейной реологией, объем которых изменяется под действием разности $\Delta P$ внутреннего и внешнего давлений, то уравнение (16) приводится к виду (2). Таким образом, добавление уравнения (2) в систему уравнений, описывающих эволюцию вязкой пористой среды, не увеличивает количество линейно независимых уравнений.

**Эволюция давления в пористой среде.** Предположим, что расплав в пору не поступает. Пусть ее объем $\Delta V$ вследствие вязкой релаксации изменился на $\delta V$, а давление расплава изменилось при этом на $\delta p$. Реальное изменение объема жидкости в поре $\delta V_l$ складывается из его изменения $\delta V$ вследствие вязкой деформации поры и упругой реакции $\delta V_{el}$ матрицы на изменение давления:

$$\delta V_l = \delta V + \delta V_{el}. \tag{17}$$

При этом

$$\frac{\delta V_l}{\Delta V} = -\frac{\delta p}{K}, \tag{18}$$

$$\frac{\delta V_{el}}{\Delta V} = \beta \frac{\delta p}{E}, \tag{19}$$

где $1/K$ — сжимаемость расплава; $E$ — модуль Юнга материала матрицы; $\beta$ — численный коэффициент, зависящий от формы поры и свойств материала матрицы (для круговых цилиндров $\beta = 1 + \nu$; $\nu$ — коэффициент Пуассона [5]).

Подставляя $\delta p$ из равенства (4) в формулу (5) и затем $\delta V_{el}$ в (3), находим:

$$\frac{\delta V_l}{\Delta V} = \frac{\delta V}{\Delta V} \frac{1}{1 + (\beta K/E)}. \tag{20}$$

Учитывая теперь, что $\delta V_l/\Delta V = \delta\varphi/\varphi$, получаем из (3):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K_{\text{eff}} \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\bigg|_{\text{def}}, \tag{21}$$

где правая часть описывает изменение пористости вследствие деформации матрицы, рассчитываемое без учета упругости, а $1/K_{\text{eff}}$ — эффективная сжимаемость:

$$\frac{1}{K_{\text{eff}}} = \frac{1}{K} + \frac{\beta}{E}. \tag{22}$$

Справа в уравнении (21) стоит скорость изменения пористости вследствие деформации матрицы, рассчитываемая без учета упругости.

Если, наоборот, зафиксировать объем пор, то скорость изменения давления, связанная с фильтрацией, находится аналогичным образом. Пусть в некоторый участок среды, объем пористости в котором равен $\varphi V$, поступил вследствие фильтрации объем $\delta V$ расплава, что привело к увеличению давления на $\delta p$. Объем пор изменился при этом на $\varphi V \beta \delta p/E$ из-за упругой деформации матрицы, а с другой стороны, объем жидкости, заполняющей пористость, изменился на $\delta V - \varphi V \delta p/K$ из-за фильтрации и сжимаемости расплава. Приравнивая эти выражения, получаем уравнение, связывающее изменение давления и скорость притока жидкости вследствие фильтрации:

$$\delta p = K_{\text{eff}} \frac{\delta V}{\varphi V}\bigg|_{\text{flow}}. \tag{23}$$

Учитывая, что $(\delta V/\varphi V)_{\text{flow}} = (\delta\varphi/\varphi)_{\text{flow}}$, находим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K_{\text{eff}} \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\bigg|_{\text{flow}}. \tag{24}$$

Таким образом, общее уравнение, описывающее эволюцию давления жидкости, заполняющей связную часть пористости, имеет вид

$$\frac{1}{K_{\text{eff}}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\bigg|_{\text{flow}} - \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\bigg|_{\text{def}}. \tag{25}$$

Выражения в правой части последнего уравнения описывают скорость изменения пористости вследствие просачивания расплава и вязкой деформации матрицы, рассчитываемые без учета упругости.

В приближении несжимаемых расплава и матрицы $1/K_{\text{eff}} \to 0$ мы приходим к уравнению

$$\left.\frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\right|_{\text{flow}} = \left.\frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}\right|_{\text{def}}. \tag{26}$$

Уравнение (26) выражает условие согласованности просачивания и неупругой деформации в процессе эволюции частично расплавленного агрегата. При этом, как демонстрирует уравнение (25), рассогласование объемов фильтрации и деформации матрицы возможно только вследствие конечной сжимаемости жидкости и матрицы, причем разность этих объемов тем меньше, чем меньше сжимаемость расплава и твердых пород. Вместе с уравнениями, определяющими эти скорости, уравнение (26) позволяет полностью решить задачу о миграции несжимаемого расплава относительно несжимаемой матрицы.


1. *Bercovici D., Ricard Y., Schubert G.* A two-phase model of compaction and damage. General theory // J. Geophys. Res. – 2001. – **106**. – P. 8887–8906.
2. *Laporte D., Provost A.* The grain size distribution of silicate, carbonate and metallosulfide melts: a review of theory and experiments // Physics and chemistry of partially molten rocks / Ed. by N. Bagdassarov, D. Laporte and A. B. Thompson. – Dordrecht: Kluwer, 2000. – P. 93–140.
3. *McKenzie D.* The generation and compaction of partially molten rock // J. Petrol. – 1984. – **25**. – P. 713–765.
4. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. I. – Москва: Наука, 1987. – 464 с.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1986. – 736 с.



*Институт геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 05.08.2009*



**O. V. Aryasova, Ya. M. Khazan**


## Interrelation between the percolation and an inelastic deformation changing the porosity at the segregation of a melt in partially molten systems


*The melt pressure inside a partially molten aggregate is dictated by a competition of the melt percolation and the inelastic deformation of pores. The percolation brings the pressure gradient in the melt closer to the hydrostatic one increasing the pressure jump between the melt and the solid, while an inelastic deformation decreases this pressure difference. We suggest a general equation, which expresses the condition that the melt percolation and the porosity change are related to each other and closes the system of equations governing the two-phase system dynamics.*