УДК 517.988

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана

Досліджено багатовимірну задачу Стефана з урахуванням конвективних рухів у рідинній фазі. Доведено формулу залежності рівняння вільної границі від числа Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Работа посвящена изучению процессов кристаллизации, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, реально присутствующим в жидкой фазе.

Пусть в пространстве R^3 задана область Ω, граница которой состоит из двух замкнутых, связных, гладких, непересекающихся поверхностей Γ^+ и Γ^- класса $H^{4+\alpha}$. Пусть далее Γ_t, где $t \in [0,T]$, — гладкие поверхности, лежащие внутри Ω, и такие, что Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_t, и Γ_t в момент времени t разбивает Ω на две связные подобласти Ω_t^+ и Ω_t^-. Двухфазная задача Стефана, при наличии конвективных движений в жидкой фазе, состоит в нахождении скорости жидкости $\vec{V}(x,t)$, давления $p(x,t)$, распределения температур $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$ соответственно в жидкой и твердой фазах и свободной поверхности Γ_t по следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2\nabla^2 u^+(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in D_T^+,\\
&\frac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a_-^2\nabla^2 u^-(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in D_T^-,\\
&\frac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+),\\
&\nabla\vec{V}(x,t) = 0, \qquad (x,t)\in D_T^+,\\
&u^\pm(x,t)|_{t=0} = A^\pm(x), \qquad u^\pm(x,t)|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma^-} = B^\pm(x,t),\\
&\vec{V}(x,t)|_{t=0} = \vec{C}(x), \qquad \vec{V}(x,t)|_{x\in\Gamma^+\cup\Gamma^-} = 0,\\
&u^\pm(x,t)|_{x\in\Gamma_t} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left[k_-\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - k_+\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right]\cos(n,x_i) + \kappa\cos(n,t) = 0, \qquad x\in\Gamma_t,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $D_T^\pm = \{(x,t)\colon x\in\Omega_t^\pm, t\in(0,T)\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\Omega_t^\pm$ — области жидкой и твердой фазы, на которые разбивает область Ω граница Γ_t, причем $\partial\Omega^\pm = \Gamma_t\bigcup\Gamma^\pm$, $\vec{n}$ — нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω_t^+. Предполагается, что

$$
\begin{aligned}
&B^\pm(x,t)\in H^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}(\Gamma^\pm\times[0,T]), \qquad \vec{C}(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+}), \qquad A^\pm(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_0^+}),\\
&\vec{f}(u^+)\in C^2(R^1), \qquad \pm B^\pm(x,t)\geqslant\varepsilon_0>0, \qquad (x,t)\in\Gamma^\pm\times[0,T],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $0<\beta<\alpha$, $\Omega_0^\pm$ — области, на которые разбивает Ω граница раздела фаз Γ_0, а параметры $a_\pm$, $k_\pm$, κ, Re, ε_0 считаются положительными постоянными. Относительно функции $\vec{f}(u^+)$

всегда можно считать, что $\vec{f}(1) = 0$, так как общий случай сводится к указанному после замены $p(x,t) = \widetilde{p}(x,t) + (\vec{f}(1), x)$, $\widetilde{\vec{f}}(u) = \vec{f}(u) - \vec{f}(1)$.

2. Приближенное решение задачи (1). Для точек поверхности Γ_0 введем координаты $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Через $x(\omega) \in \Gamma_0$ или через ω будем обозначать также соответствующие точки в R^3. Известно, что $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega) \cdot \rho(\omega,t)\}$, где $\rho(\omega,t)$ — функция класса $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0,T])$, $\rho(\omega,0) = 0$, а $\vec{n}(\omega)$ — нормаль к Γ_0, направленная внутрь Ω_0^+ [1]. Предложен метод решения задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малых чисел Рейнольдса Re [2]:

$$u^{\pm}(x,t;\mathrm{Re}) = u_0^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k u_k^{\pm}(x,t), \qquad p(x,t;\mathrm{Re}) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\mathrm{Re}) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k V_{ik}(x,t), \qquad i = 1,2,3, \tag{3}$$

$$\rho(\omega,t;\mathrm{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re})^k \rho_k(\omega,t).$$

Далее, если предположить выполненными следующие условия:

$$\begin{gathered} \nabla^2 A^{\pm}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_0^{\pm}, \qquad A^{\pm}(x)|_{\Gamma^{\pm}} = B^{\pm}(x,0), \qquad A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} = 0, \\ \vec{C}(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}_0^{\pm}, \quad k_-|\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} = k_+|\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}, \quad |\nabla A^{\pm}(x)|_{\Gamma_0} \geqslant \widetilde{\varepsilon} > 0, \end{gathered} \tag{4}$$

то в качестве нулевого приближения можно взять функции $A^{\pm}(x)$, т.е. $u_0^{\pm}(x) = A^{\pm}(x)$, $x \in \overline{\Omega}^{\pm}$. Причем из последнего условия (4), в предположении звездности поверхностей $\Gamma^{\pm}$, следует, что поверхность Γ_0 принадлежит классу C^{∞}, не имеет самопересечений и расположена относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t в задаче (1) [1].

3. Построение первого приближения. Пусть $\widetilde{D}_T^{\pm} = \Omega_0^{\pm} \times (0,T)$, $\Gamma_T^{\pm} = \Gamma^{\pm} \times [0,T]$, $\widetilde{\Gamma}_T = \Gamma_0 \times [0,T]$. Тогда для первого приближения $u_1^{\pm}(x,t)$, $\vec{V}_1(x,t) = (V_{11}(x,t), V_{21}(x,t), V_{31}(x,t))$, $\rho_1(\omega,t)$ из условий (1) и разложения (3) вытекает следующая задача:

$$\nabla p_0(x) = \nabla^2 \vec{V}_1(x,t) + \vec{f}(u_0^+), \qquad (x,t) \in \widetilde{D}_T^+, \tag{5}$$

$$\nabla \vec{V}_1(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \widetilde{D}_T^+; \qquad \vec{V}_1(x,t)|_{\Gamma_T^+ \cup \widetilde{\Gamma}_T} = 0, \qquad \vec{V}_1(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial t}(x,t) - a_{\pm}^2 \nabla^2 u_1^{\pm}(x,t) = F_1^{\pm}(x,t), \qquad (x,t) \in \widetilde{D}_T^{\pm}, \qquad u_1^{\pm}(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

$$u_1^{\pm}(x,t)|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0, \qquad [|\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))| \rho_1(\omega,t) + u_1^{\pm}(x,(\omega),t)]|_{\Gamma_0} = 0, \tag{8}$$

$$k_+ \frac{\partial u_1^+(x,t)}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_1^-(x,t)}{\partial n} = \kappa \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \qquad x \in \Gamma_0, \tag{9}$$

где $F_1^+ = -(\vec{V}_1(x,t)\nabla) u_0^+(x)$ при $(x,t) \in \widetilde{D}_T^+$ и $F_1^-(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \widetilde{D}_T^-$. Задача (5), (6) фактически изучена в [3, см. теорему 3], причем $\vec{V}_1(x,t) \in H^{2+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{\widetilde{D}_T^+})$, $\nabla p_0(x) \in H^{\beta,\beta/2}(\overline{\widetilde{D}_T^+})$. Тогда $F_1^{\pm}(x,t) \in H^{1+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{\widetilde{D}_T^+})$.

Предполагаются также выполненными условия согласования до первого порядка включительно, которые вытекают как необходимые из предположения о существовании гладкого решения и формулируются аналогично [2, с. 363]. В частности, достаточно предположить:

$$\nabla p_0(x) = 0, \qquad x \in \Gamma_0, \tag{10}$$

так как $[a_\pm^2 \nabla^2 u_1^\pm(x,0) + F_1^\pm(x,0) + |\nabla u_0^\pm(x)| \rho'_{1t}(x,0)]|_{\Gamma_0} = 0$.

Далее, при заданном $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{\Gamma}_T})$ найдем функцию $u_1^\pm(x,t;\rho_1) \in \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{D}_T^\pm})$ как единственное решение задачи (7), (8) [2, см. теорему 5.3]. Построим затем оператор M_1, который действует из $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$ в $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$, следующим образом:

$$M_1\rho_1 = \frac{1}{k}\int\limits_0^t \left(k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n}(x(\omega),t;\rho_1) - k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n}(x(\omega),t;\rho_1)\right) dt, \qquad x(\omega) \in \Gamma_0.$$

Для решения $u_1^\pm(x,t;\rho_1)$ справедливы оценки $|u_1^\pm|_{\widetilde{D}_T^\pm}^{(\alpha+2)} \leqslant c(|F_1^\pm|_{\widetilde{D}_T^\pm}^{\alpha} + |\rho_1|_{\widetilde{\Gamma}_T}^{(\alpha+2)})$, где c — некоторая постоянная [2, с. 364].

Рассмотрим функцию $\widetilde{\rho}_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$ и построим соответствующее решение $\widetilde{u}_1^\pm = u_1^\pm(x,t;\widetilde{\rho}_1)$. Тогда получим

$$|u_1^\pm - \widetilde{u}_1^\pm|_{\widetilde{D}_T^\pm}^{(\alpha+2)} \leqslant c|\rho_1 - \widetilde{\rho}_1|_{\widetilde{\Gamma}_T}^{(\alpha+2)}.$$

Отсюда с учетом того, что

$$M_1\rho_1 - M_1\widetilde{\rho}_1 = \frac{1}{k}\int\limits_0^t \left[k_+ \frac{\partial(u_1^+ - \widetilde{u}_1^+)}{\partial n} - k_- \frac{\partial(u_1^- - \widetilde{u}_1^-)}{\partial n}\right] dt,$$

следует, что

$$|M_1\rho_1 - M_1\widetilde{\rho}_1|_{\widetilde{\Gamma}_T}^{(\alpha+2)} \leqslant \widetilde{c}|\rho_1 - \widetilde{\rho}_1|_{\widetilde{\Gamma}_T}^{(\alpha+2)},$$

где $\widetilde{c} = c(k_+ + k_-)T/k$.

Итак, оператор M_1 сжимающий, если выполняется условие

$$\frac{c(k_+ + k_-)T}{k} < 1. \tag{11}$$

Это неравенство всегда выполнимо, например, при малых значениях T. Поэтому оператор M_1 имеет неподвижную точку в $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$, т. е. $M_1\rho_1 = \rho_1$.

Лемма 1. *Пусть выполнимо условие* (11). *Тогда оператор M_1, действующий из $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$ в $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$, имеет там неподвижную точку.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2), (4) *и* (10) *тогда существует единственное решение $u_1^\pm(x,t)$, $\vec{V}_1(x,t)$, $\rho_1(\omega,t)$ задачи* (5)–(9), *причем $u_1^\pm(x,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{D}_T})$, $\vec{V}_1(x,t) \in H^{2+\beta,(2+\beta)/2}(\overline{\widetilde{D}_T^+})$ и $\rho_1(\omega,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\widetilde{\Gamma}_T})$.*

4. Построение второго приближения. Рассмотрим второе приближение $\vec{V}_2(x,t)$, $u_2^{\pm}(x,t)$, $\rho_2(\omega,t)$ задачи (1) для малых чисел Re. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\nabla p_1(x,t) = \nabla^2 \vec{V}_2(x,t) + \vec{f}'(u_0^+)u_1^+,\\
&\vec{V}_2(x,t)|_{t=0} = 0; \qquad \frac{\partial u_2^{\pm}}{\partial t} - a_{\pm}^2 \nabla^2 u_2^{\pm} = F_2^{\pm}(x,t) \qquad \text{в} \qquad \widetilde{D}_T^{\pm}, \qquad u_2^{\pm}(x,t)|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0,\\
&[\nabla u_0^{\pm}(x(\omega))\rho_2(\omega,t) + u_2^{\pm}(x(\omega),t)] = f_1^{\pm}(x,t), \qquad x \in \Gamma_0, \qquad u_2^{\pm}(x,t)|_{t=0} = 0,\\
&k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n} - k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} = k\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + f_2(x,t), \qquad x \in \Gamma_0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_2^+(x,t) = -(\vec{V}_1\nabla)u_1^+ - (\vec{V}_2\nabla)u_0^+ \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \widetilde{D}_T^+,\\
&F_2^-(x,t) = 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \widetilde{D}_T^-,\\
&f_1^{\pm}(x,t) = -\frac{\partial u_1^{\pm}}{\partial n}(x(\omega),t)\rho_1(\omega,t) - \frac{1}{2}\frac{d^2 u_0^{\pm}(x(\omega) + \tau n(\omega)\rho_1(\omega,t))}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=0}, \qquad x \in \Gamma_0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим оператор M_2:

$$M_2\rho_2 = \frac{1}{k}\int_0^t \left[k_+ \frac{\partial u_2^+}{\partial n}(x(\omega),t;\rho_2) - k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n}(x(\omega),t;\rho_2) - f_2(x(\omega),t)\right] dt, \qquad x(\omega) \in \Gamma_0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда оператор M_2 имеет в $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$ неподвижную точку.*

Для задачи (12) условие согласования первого порядка выглядит следующим образом:

$$\nabla p_1(x,0) = 0, \qquad x(\omega) \in \Gamma_0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть выполнено условие* (13). *Тогда существует единственное решение задачи* (12), *причем* $u_2^{\pm}(x,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}\overline{(\widetilde{D}_T^{\pm})}$, $\vec{V}_2(x,t) \in H^{2+\beta,(2+\beta)/2}\overline{(\widetilde{D}_T^+)}$, $\rho_2(\omega,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\widetilde{\Gamma}_T)$, $\nabla p_1(x,t) \in H^{\beta,\beta/2}\overline{(\widetilde{D}_T^+)}$.

5. О влиянии конвекции на фронт кристаллизации. Основной целью дальнейшего исследования задачи (1) является изучение гидродинамических явлений в жидкой фазе. Справедливо утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при малых числах Рейнольдса* Re *и достаточно малых значениях t справедлива формула*

$$\begin{aligned}
&\Gamma_t : x = x(\omega) - \mathrm{Re}\,\vec{n}\frac{u_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla A^{\pm}(x(\omega))|} - (\mathrm{Re})^2\vec{n}\frac{u_2^{\pm}(x(\omega),t) - f_1^{\pm}(x(\omega),t)}{|\nabla A^{\pm}(x(\omega))|} + o((\mathrm{Re})^2),\\
&x(\omega) \in \Gamma_0,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $u_1^{\pm}(x,t)$, $u_2^{\pm}(x,t)$ *— решения задач* (5)–(9) *и* (12) *соответственно.*

Последняя формула позволяет исследовать свободную поверхность Γ_t в зависимости от чисел Рейнольдса и проследить, как конвекция влияет на процесс кристаллизации, что проверить в лабораторных условиях практически невозможно.

1. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 756 с.
3. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1388–1424.

Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, Донецк

Поступило в редакцию 30.10.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Approximation analysis of the many-dimensional Stefan problem with convection

The many-dimensional Stefan problem for the liquid phase convection is investigated. The dependence of the free-boundary equation on the Reynolds number is obtained.