

## РАСЧЁТ ЗАМКНУТЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ИСТОЧНИКАМ ПОЛЯ

*Аннотация:* Совершенствуется метод интегрирования по источникам поля расчета магнитных полей в кусочно-однородных средах. При решении интегрального уравнения методом последовательных приближений на каждом шаге используется закон полного тока в интегральной форме для одного или нескольких замкнутых контуров. При замене интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений она дополняется соответственно одним или несколькими уравнениями, записанными с использованием закона полного тока в интегральной форме. Этот прием позволяет существенно снизить время счета и погрешность определения поля.

*Ключевые слова:* моделирование магнитостатических полей, метод интегрирования по источникам поля, повышение эффективности.

*Жильцов А.В.* Розрахунок замкнутих магнітних систем методом інтегрування за джерелами поля.

*Анотація:* удосконалюється метод інтегрування за джерелами поля розрахунку магнітних полів в кусково-однорідних середовищах. При рішенні інтегрального рівняння методом послідовних наближень на кожному кроці використовується закон повного струму в інтегральній формі для одного або декількох замкнутих контурів. При заміні інтегрального рівняння системою лінійних рівнянь алгебри вона доповнюється відповідно одним або декількома рівняннями, записаними з використанням закону повного струму в інтегральній формі. Цей прийом дозволяє істотно понизити час рахунку і погрішність визначення поля.

*Ключові слова:* моделювання магнітостатичних полів, метод інтегрування за джерелами поля, підвищення ефективності.

*Zhilt'sov A.V.* Calculation of the closed magnetic systems by the method of integration on the sources of the field.

*Annotation:* the method of integration on the sources of the field of calculation of the magnetic fields is perfected in piece-homogeneous environments. At the decision of integral equation by the method of progressive approximations on every step the law of complete current is used in an integral form for one or a few reserved contours. At replacement of integral equation by the system of linear algebraic equalizations it is complemented accordingly by one or a few equations written with the use of law of complete current in an integral form. This reception allows substantially to reduce time of account and error of determination of the field.

*Keywords:* design of the magnetostatic fields, method of integration on the sources of the field, increase of efficiency.

**Постановка задачи.** Рассмотрим замкнутый магнитопровод, охваченный током  $i$  (рис.1). Материал, из которого он сделан, предполагаем

изотропным, однородным и нелинейным в магнитном отношении (магнитная проницаемость есть функция точки). Требуется рассчитать поле  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  во всем пространстве.

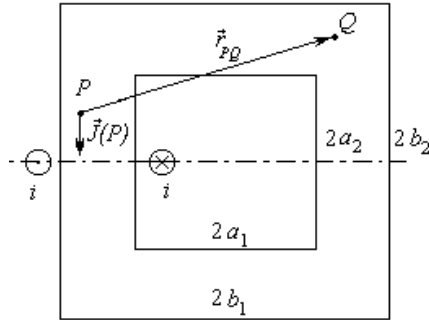


Рис. 1. Сечение электромагнитной системы с замкнутым магнитопроводом

**Расчет магнитного поля методом интегрирования по источникам поля.** Для решения поставленной задачи воспользуемся методом расчёта магнитных систем, предложенным в [1,2], – методом интегрирования по источникам поля. В работе [3] на примере расчета стального тора с воздушным зазором и равномерно распределённой обмоткой показан один из возможных путей реализации этого метода. Однако попытка непосредственного его применения к замкнутым системам не дала необходимой для практической реализации точности вычислений. В данной работе предлагается методика расчета полей, повышающая точность расчета в замкнутых нелинейных в магнитном отношении системах.

Для однородной изотропной среды имеет место следующая связь  $\vec{J}(Q) = \alpha \vec{B}(Q)$ , где  $\vec{J}(Q)$  – вектор намагниченности,  $\vec{B}(Q)$  – магнитная индукция,  $\alpha$  является функцией поля в точке  $Q$ . Магнитная индукция, согласно принципу суперпозиции полей, определяется следующей суммой  $\vec{B}(Q) = \vec{B}_0(Q) + \vec{B}^*(Q)$ , здесь  $\vec{B}_0(Q)$  и  $\vec{B}^*(Q)$  – индукция, обусловленная соответственно токами проводимости  $i$  и намагниченным магнитопроводом (рис.1). Таким образом, задача сводится к решению уравнения

$$\vec{J}(Q) = \alpha(J(Q)) \left\{ \vec{B}_0(Q) + \vec{B}^*(Q, P, \vec{J}(P)) \right\} \quad (1)$$

или, используя связь  $\vec{B}^*(Q, P, \vec{J}(P)) = \mu_0 \vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P)) + \mu_0 \vec{J}(Q)$ ,

$$\vec{J}(Q) = \alpha(J(Q)) \left\{ \vec{B}_0(Q) + \mu_0 \vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P)) + \mu_0 \vec{J}(Q) \right\}, \quad (2)$$

где  $\vec{J}(Q)$  – намагниченность в точке  $Q$ ;  $\alpha(J(Q)) = \frac{\mu(J(Q)) - \mu_0}{\mu(J(Q)) \mu_0}$ ;  $\mu_0$  –

магнитная проницаемость вакуума;  $\vec{B}_0(Q)$  – магнитная индукция поля, создаваемая внешними источниками, в данной задаче токами  $i$ ;  $\vec{B}^*(Q, P, \vec{J}(P))$ ,  $\vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P))$  – магнитная индукция и напряженность, обусловленные намагниченным магнитопроводом, соответственно – записаны как функции точки  $Q$  – точки наблюдения, точки  $P$  – точки истока, намагниченности  $\vec{J}(P)$  (рис.1).

Для нахождения поля, обусловленного намагниченным магнитопроводом, воспользуемся дипольной формулой.

Для трёхмерной задачи

$$\vec{H}^*(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_M} \frac{3(\vec{J}(P), \vec{r}_{PQ})\vec{r}_{PQ} - \vec{J}(P)r_{PQ}^2}{r_{PQ}^5} dV_P, \quad (3)$$

где  $V_M$  – область, занимаемая магнитопроводом.

Для двумерной задачи

$$\vec{H}^*(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_M} \frac{2(\vec{J}(P), \vec{r}_{PQ})\vec{r}_{PQ} - \vec{J}(P)r_{PQ}^2}{r_{PQ}^4} dS_P, \quad (4)$$

$S_M$  – сечение магнитопровода. В формулах (3), (4) обозначено:  $\vec{H}^*(Q)$  – напряженность магнитного поля в точке  $Q$ , обусловленная намагниченным магнитопроводом;  $\vec{J}(P)$  – намагниченность в точке интегрирования  $P$ ;  $\vec{r}_{PQ}$  – радиус–вектор, проведённый из точки истока  $P$  в точку наблюдения  $Q$  (рис.1).

Получим формулы для расчета напряженности магнитного поля 1) от однородно намагниченного бруса (трёхмерная задача); 2) от бесконечно длинной вдоль оси  $Ox$  призмы прямоугольного сечения однородно намагниченной в плоскости, параллельной  $Oxy$  (двумерная задача).

Рассмотрим однородно намагниченный брус со сторонами  $2h_x$ ,  $2h_y$ ,  $2h_z$  вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно (рис.2). Напряженность магнитного поля от такого бруса найдём по формуле (3).

Запишем через проекции намагниченность

$$\vec{J} = J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z$$

и радиус–вектор

$$\vec{r}_{PQ} = (x - x_P) \vec{e}_x + (y - y_P) \vec{e}_y + (z - z_P) \vec{e}_z,$$

здесь  $P(x_P, y_P, z_P)$  – точка интегрирования;  $Q(x, y, z)$  – точка наблюдения;  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  – единичные векторы осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно (рис.2).

Распишем подынтегральное выражение в (3) в матричном виде

$$\begin{aligned}
& \frac{3(\vec{J}(P), \vec{r}_{PQ})\vec{r}_{PQ} - \vec{J}(P)r_{PQ}^2}{r_{PQ}^5} = \\
& = \frac{1}{r_{PQ}^5} \begin{pmatrix} 3(x-x_P)r_{PQ}^2 & 3(x-x_P)(y-y_P) & 3(x-x_P)(z-z_P) \\ 3(x-x_P)(y-y_P) & 3(y-y_P)r_{PQ}^2 & 3(y-y_P)(z-z_P) \\ 3(x-x_P)(z-z_P) & 3(y-y_P)(z-z_P) & 3(z-z_P)r_{PQ}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_y \end{pmatrix}, \quad (5)
\end{aligned}$$

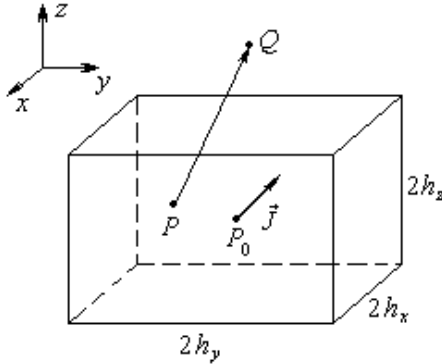


Рис.2. Однородно намагниченный магнит прямоугольной формы

После интегрирования (3) с учетом (5) получим

$$\vec{H}_3^*(x, y, z) = g_3(x, y, z, x_P, y_P, z_P) \vec{J} \Big|_{x_P=x_0-h_x}^{x_P=x_0+h_x} \Big|_{y_P=y_0-h_y}^{y_P=y_0+h_y} \Big|_{z_P=z_0-h_z}^{z_P=z_0+h_z}, \quad (6)$$

где

$$g_3(x, y, z, x_P, y_P, z_P) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \frac{(y-y_P)(z-z_P)}{(x-x_P)r_{PQ}} & \ln(z_P-z+r_{PQ}) & \ln(y_P-y+r_{PQ}) \\ \ln(z_P-z+r_{PQ}) & \operatorname{arctg} \frac{(x-x_P)(z-z_P)}{(y-y_P)r_{PQ}} & \ln(x_P-x+r_{PQ}) \\ \ln(y_P-y+r_{PQ}) & \ln(x_P-x+r_{PQ}) & \operatorname{arctg} \frac{(x-x_P)(y-y_P)}{(z-z_P)r_{PQ}} \end{pmatrix}$$

Здесь  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка центра прямоугольного параллелепипеда (рис.2).

Аналогично получаем выражение для расчёта напряженности магнитного поля в случае двумерной задачи

$$\vec{H}_2^*(x, y, x_0, y_0) = g_2(x, y, x_P, y_P) \vec{J} \Big|_{x_P=x_0-h_x}^{x_P=x_0+h_x} \Big|_{y_P=y_0-h_y}^{y_P=y_0+h_y}, \quad (7)$$

здесь

$$g_2(x, y, x_P, y_P) = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg} \frac{y-y_P}{x-x_P} & \frac{1}{2} \ln \left[ (x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \ln \left[ (x-x_P)^2 + (y-y_P)^2 \right] & \operatorname{arctg} \frac{x-x_P}{y-y_P} \end{pmatrix};$$

где  $P_0(x_0, y_0)$  – точка центра прямоугольника.

Рассмотрим двумерную задачу. Разобьем магнитопровод на  $N$  элементарных площадок  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$  прямоугольного сечения со сторонами  $2h_x, 2h_y$  (рис.3, б). Примем, что внутри каждой из элементарной площадки намагниченность постоянна и равна значению в центре  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , соответствующего элемента. Тогда для напряженности магнитного поля в центре каждого элемента разбиения, обусловленную намагниченным магнитопроводом, можем записать, с учетом (7), следующее выражение

$$\vec{H}_j^* = \sum_{i=1}^N \vec{H}_2^*(x_j, y_j, x_i, y_i), \quad i, j=1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

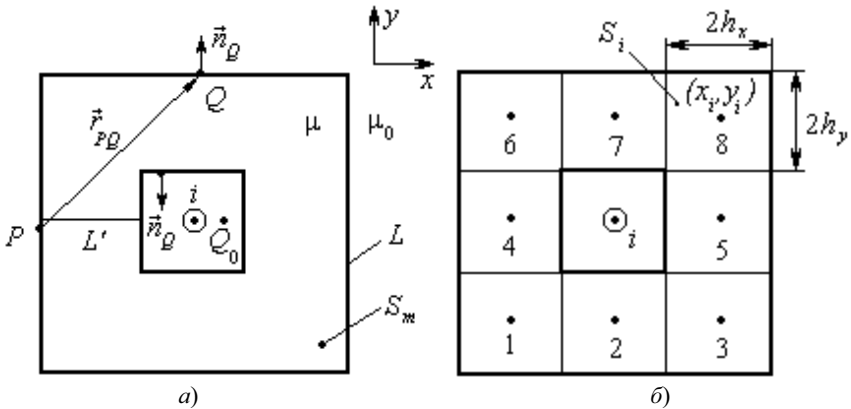


Рис.3. Сечение электромагнитной системы (а) с разбиением на элементарные площадки (б)

Уравнение (2) может быть решено каким-либо итерационным методом. В случае применения метода простой итерации итерационный процесс запишется в виде

$$\vec{J}_j^{(n+1)} = \alpha \left( \vec{J}_j^{(n)} \right) \left\{ \vec{B}_{0j} + \mu_0 \vec{H}_j^{*(n)} + \mu_0 \vec{J}_j^{(n)} \right\}, \quad (9)$$

$n$  – номер итерации,  $\vec{H}_j^{*(n)}$  вычисляется согласно (8) и (7).

**Пример расчета.** Рассмотрим магнитную систему (рис.3, а) с параметрами: ток  $i=1$  А, расположен в центре симметрии; внешний размер  $9 \times 9$  см, внутреннее окно  $3 \times 3$  см. Для проверки метода была решена предварительно линейная задача при  $\mu=1000\mu_0$ , несколькими методами.

1. Интегральное уравнение относительно линейной плотности простого слоя магнитных зарядов [4]:

$$\sigma(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \int_L \frac{\sigma(P) (\vec{r}_{PQ}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_P - 2\lambda H_{0n}, \quad (10)$$

где  $\sigma(Q)$  – линейная плотность простого слоя магнитных зарядов;  $L$  – граница раздела сред с разной магнитной проницаемостью;  $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$ ,  $\mu$  – магнитная проницаемость магнитопровода,  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\vec{r}_{PQ}$  – радиус-вектор, проведенный из точки интегрирования  $P$  в точку наблюдения  $Q$ ;  $H_{0n}$  – проекция напряжённости стороннего поля (в данном случае поля, обусловленного током  $i$ ) на внешнюю по отношению к магнитопроводу нормаль  $\vec{n}_Q$  (рис.4). Уравнение (10) решалось методом сведения к системе линейных алгебраических уравнений [5]. Затем поле  $\vec{H}$  искалось по формуле

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\sigma(P) \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^2} dl_P. \quad (11)$$

2. Используем для расчета магнитостатического поля в кусочно-однородной среде двойной слой магнитных зарядов – слой диполей. Согласно [4] интегральное уравнение для замкнутой системы, охваченной током, запишется в виде

$$v(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \int v(P) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}} dl_P + 2\lambda(\varphi_0(Q) + \varphi'(Q)), \quad (12)$$

здесь  $v(Q)$  – линейная плотность магнитных диполей;  $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$ ;  $\varphi_0(Q)$  – скалярный магнитный потенциал внешнего поля, который вводится как  $\vec{B}_0 = -\text{grad}\varphi_0$ ;  $\varphi'(Q)$  – потенциал, обусловленный постоянной плотностью диполей  $v' = (\mu - \mu_0) \cdot i$ , вводимых на условной перегородке  $L'$  (рис.3, а) для обеспечения однозначности магнитного потенциала в области  $S_M$  магнитопровода [4]. Потенциал внешнего поля определяется интегралом

$$\varphi(Q) = - \int_{Q_0}^Q \vec{B} d\vec{l},$$

где на контур интегрирования накладывается запрет на пересечение им условной перегородки  $L'$ ;  $Q_0$  – точка нулевого потенциала. Потенциал от

магнитных диполей на условной перегородке находим следующим образом

$$\varphi'(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} v'(P) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_P)}{r_{QP}} dl_P,$$

или учитывая, что  $v'(P) = (\mu - \mu_0) \cdot i$ , можем записать

$$\varphi'(Q) = \frac{(\mu - \mu_0) \cdot i}{2\pi} \int_{L'} \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_P)}{r_{QP}} dl_P$$

Уравнение (12) решалось методом сведения к системе линейных алгебраических уравнений [5]. После чего искалось поле  $\vec{B}$  как сумма

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}^* + \vec{B}',$$

где  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{B}^*$ ,  $\vec{B}'$  – индукция магнитного поля, обусловленная соответственно внешними источниками, слоем диполей на границе раздела сред, слоем диполей на условной перегородке. Если известна линейная плотность магнитных диполей, то магнитная индукция, обусловленная ими, может быть найдена с помощью следующего соотношения [6]

$$\vec{B}(M) = \frac{1}{2\pi} \int_L v(P) \frac{2(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P) \vec{r}_{MP} - \vec{n}_P r_{MP}^2}{r_{MP}^4} dl_P.$$

Расчет полей с помощью решения уравнений (10) или (12) дал совпадение расчета по полю  $\vec{B}$  с точностью менее 1 % по невязке (табл. 1). Одно из полученных распределений поля принималось за точное и относительно него рассматривалось решение уравнения (9).

Таблица 1.

**Результаты численного расчета на основе интегральных уравнений для вторичных источников**

№ элемента	Тип вторичных источников							
	Простой слой магнитных зарядов				Двойной слой магнитных зарядов			
	Намагниченность		Магнитная индукция		Намагниченность		Магнитная индукция	
	$J_{хточ.},$ А/м	$J_{уточ.},$ А/м	$B_{хточ.},$ Тл	$B_{уточ.},$ Тл	$J_{хточ.},$ А/м	$J_{уточ.},$ А/м	$B_{хточ.},$ Тл	$B_{уточ.},$ Тл
1	2078,8	-2154,9	2,6e-3	-2,7e-3	2121,0	-2121,0	2,6e-3	-2,6e-3
2	5208,7	2,9	6,5e-3	3,7e-6	5234,8	0	6,5e-3	0
3	2111,6	2102,4	2,6e-3	2,6e-3	2121,0	2121,0	2,6e-3	2,6e-3
4	4,2e-12	-5295,6	0	-6,6e-3	0	-5234,8	0	-6,5e-3
5	-1,4e-12	5217,8	0	6,5e-3	0	5234,8	0	6,5e-3
6	-2078,8	-2154,9	-2,6e-3	-2,7e-3	-2121,0	-2121,0	-2,6e-3	-2,6e-3
7	-5208,5	2,9	-6,5e-3	3,7e-6	-5234,8	0	-6,5e-3	0
8	-2111,6	2102,4	-2,6e-3	2,6e-3	-2121,0	2121,07	-2,6e-3	2,6e-3

Результаты, полученные при решении уравнения (9) представлены в таблице 2. В ней указано число элементов разбиения; приведены значения намагниченности и магнитной индукции в соответствующих точках (рис.3, б). Невязка  $\varepsilon$  определяется по формуле  $\varepsilon = \left\| \vec{J}^{(n-1)} - \vec{J}^{(n)} \right\| / \left\| \vec{J}^{(n)} \right\| \cdot 100\%$ ,

невязка относительно точного решения, полученного с помощью решения интегрального уравнения для плотности двойного слоя магнитных зарядов, по формуле  $\varepsilon_{\text{точ.}} = \left\| \vec{J}_{\text{точ.}} - \vec{J}^{(n)} \right\| / \left\| \vec{J}_{\text{точ.}} \right\| \cdot 100\%$ , где  $n$  – номер итерации.

Сначала задача решалась при разбиении области, занимаемой магнитопроводом, на 8 элементов (рис.3, б), затем каждый элемент делился на 9 частей (в таблице 2 это соответствует разбиению на 72 элемента), затем каждый полученный элемент еще на 9 частей (соответствует 648 элементам). Время счета на одну итерацию в первом случае соответствует около 1 секунды, во втором случае – около 10 секунд, в третьем случае – около 1 минуты.

На основании результатов, приведенных в табл. 2 можно сделать следующие выводы: 1) решение не удовлетворяет необходимой точности; 2) итерационный процесс сходится медленно. Для устранения этого недостатка потребуем выполнения на каждом шаге итерационного процесса (9) выполнения закона полного тока:

$$\int_l \vec{H}(P) dl_P = i, \quad (13)$$

где  $l$  – замкнутый контур внутри магнитопровода,  $\vec{H}(P)$  – напряженность магнитного поля в точке интегрирования  $P$ , которую ищем как

$$\vec{H}(P) = \frac{\mu(J(P)) - \mu_0}{\mu_0} \vec{J}(P),$$

где  $\vec{J}(P)$  – намагниченность магнитопровода в точке  $P$ .

### ***Итерационная схема.***

*Первый шаг.* Задаём начальное приближение в виде свободного члена уравнения (9)  $\vec{J}_j^{(1)} = \alpha \vec{B}_{0j}$ , где  $j=1, \dots, N$ ;  $N$  – число разбиений области магнитопровода.

*Второй шаг.* Из (9) находим  $\vec{J}_j^{(2)}$ .

*Третий шаг.* Находим распределение напряженности магнитного поля

$$\vec{H}_j^{(2)} = \frac{\mu(J_j^{(2)}) - \mu_0}{\mu_0} J_j^{(2)}.$$



Таблица 2

## Результаты решения уравнения (9)

Число элементов разбиений области	$\varepsilon,$ $\times 10^{-4}$ %	$\varepsilon_{\text{точ.}},$ %	Число итераций	№ контрольного элемента	Намагниченность		Магнитная индукция	
					$J_x,$ А/м	$J_y,$ А/м	$B_x,$ Тл	$B_y,$ Тл
							$\times 10^{-5}$	$\times 10^{-5}$
8	9,57	98,5	117	1	39,214	-39,214	4,933	-4,933
				2	68,2	0	8,579	0
				3	39,214	39,214	4,933	4,933
				4	0	-68,2	0	-8,579
				5	0	68,2	0	8,579
				6	-39,214	-39,214	-4,933	-4,933
				7	-68,2	0	-8,579	0
				8	-39,214	39,214	-4,933	4,933
						$\times 10^{-4}$ Тл	$\times 10^{-4}$ Тл	
72	9,97	92,2	586	1	188,947	-188,947	2,377	-2,377
				2	385,071	0	4,844	0
				3	188,947	188,947	2,377	2,377
				4	0	-385,071	0	-4,844
				5	0	385,071	0	4,844
				6	-188,947	-188,947	-2,377	-2,377
				7	-385,071	0	-4,844	0
				8	-188,947	188,947	-2,377	2,377
						$\times 10^{-3}$ Тл	$\times 10^{-3}$ Тл	
648	8,68	62,1	1308	1	946,794	-946,794	1,191	-1,191
				2	1990,805	0	2,504	0
				3	946,794	946,794	1,191	1,191
				4	0	-1990,80	0	-2,504
				5	0	1990,805	0	2,504
				6	-946,794	-946,794	-1,191	-1,191
				7	-1990,80	0	-2,504	0
				8	-946,794	946,794	-1,191	1,191

Таблица 3.

## Результаты совместного решения уравнений (9) и (13)

Число элементов разбиения области	$\varepsilon, \times 10^{-4} \%$	$\varepsilon_{\text{точ.}}, \%$	Число итераций	№ контрольного элемента	Намагниченность		Магнитная индукция	
					$J_x, \text{А/м}$	$J_y, \text{А/м}$	$B_x, \times 10^{-3}, \text{Тл}$	$B_y, \times 10^{-3}, \text{Тл}$
8	9,09	22,39	11	1	3074,127	-3074,12	3,867	-3,867
				2	5250,873	0	6,605	0
				3	3074,127	3074,127	3,867	3,867
				4	0	-5250,87	0	-6,605
				5	0	5250,873	0	6,605
				6	-3074,12	-3074,12	-3,867	-3,867
				7	-5250,87	0	-6,605	0
				8	-3074,12	3074,127	-3,867	3,867
72	9,32	24,72	88	1	2122,689	-2122,68	2,670	-2,670
				2	5047,604	0	6,349	0
				3	2122,689	2122,689	2,670	2,670
				4	0	-5047,60	0	-6,349
				5	0	5047,604	0	6,349
				6	-2122,68	-2122,68	-2,670	-2,670
				7	-5047,60	0	-6,349	0
				8	-2122,68	2122,689	-2,670	2,670
648	9,94	21,44	329	1	2108,642	-2108,64	2,652	-2,652
				2	4917,812	0	6,186	0
				3	2108,642	2108,642	2,652	2,652
				4	0	-4917,81	0	-6,186
				5	0	4917,812	0	6,186
				6	-2108,64	-2108,64	-2,652	-2,652
				7	-4917,81	0	-6,186	0
				8	-2108,64	2108,642	-2,652	2,652

Четвертый шаг. Вычисляем циркуляцию по формуле

$$I^{(2)} = \sum_k \vec{H}_k^{(2)} \Delta \vec{l}_k,$$

где  $\vec{H}_k^{(2)}$  – напряженность магнитного поля в центре  $k$ -того элемента, через

который проходит контур интегрирования;  $\vec{\Delta l}_k$  – вектор, проходящий через центр  $k$ -того элемента в направлении контура вычисления циркуляции, модуль определяется размером  $k$ -того элемента.

*Пятый шаг.* Вычисляем коэффициент  $c^{(2)} = \frac{i}{J^{(2)}}$  и уточняем

распределение вектора  $\vec{J} : \vec{J}_j^{*(2)} = c^{(2)} \vec{J}_j^{(2)}$ .

*Шестой шаг.* Подставляя  $\vec{J}_j^{*(2)}$  в (9) находим следующее распределение намагниченности  $\vec{J}_j^{(3)}$ .

Далее, повторяем для  $\vec{J}_j^{(3)}$  шаги с третьего по пятый. Аналогично поступаем и для распределения  $\vec{J}_j^{(n)}$ , полученного на  $n$ -ой итерации. Процесс последовательных приближений считаем завершённым, если выполняется условие

$$\varepsilon = \frac{\|\vec{J}^{(n-1)} - \vec{J}^{(n)}\|}{\|\vec{J}^{(n)}\|} \cdot 100\% < \delta,$$

где  $\delta$  – некоторое наперед заданное число.

Результаты совместного решения уравнений (9) и (13) по описанной выше итерационной схеме представлены в таблице 3.

Далее решалась нелинейная задача. Предполагалось, что магнитопровод выполнен из электротехнической стали марки 1411, для которой зависимость  $B(H)$  представлена на рис. 4. Ток принимался равным  $i=1000$  А. Результаты расчётов решения уравнений (9) и (13) приведены в таблице №4, в которой указаны значения проекций намагниченности и магнитной индукции в контрольных точках (рис.4), а также магнитная проницаемость.

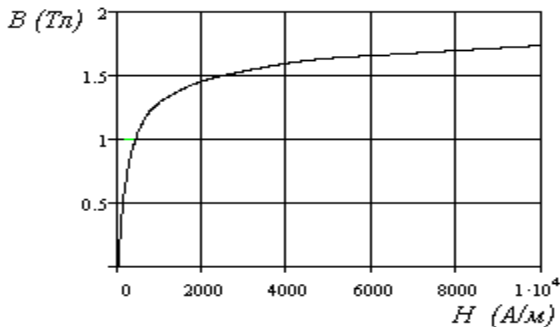


Рис.4. Зависимость модуля магнитной индукции от напряженности магнитного поля

Таблица 4.

**Результаты совместного решения уравнений (9) и (13) с учетом  
нелинейных магнитных свойств материала магнитопровода**

Число элементов разбитой области	$\varepsilon, \times 10^{-4} \%$	Число итераций	№ контрольного элемента	Намагниченность		Магнитная индукция		Магнитная проницаемость $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$
				$J_x, \text{А/м}$	$J_y, \text{А/м}$	$B_x, \text{Тл}$	$B_y, \text{Тл}$	
8	9,58	71	1	765982	-765982	0,964	-0,964	780,413
			2	1327127	0	1,677	0	181,748
			3	765982	765982	0,964	0,964	780,413
			4	0	-132712	0	-1,677	181,748
			5	0	1327127	0	1,677	181,748
			6	-765982	-765982	-0,964	-0,964	780,413
			7	-132712	0	-1,677	0	181,748
			8	-765982	765982	-0,964	0,964	780,413
72	9,91	117	1	677225	-677225	0,852	-0,852	1310
			2	1310076	0	1,654	0	212
			3	677225	677225	0,852	0,852	1310
			4	0	-131007	0	-1,654	212
			5	0	1310076	0	1,654	212
			6	-677225	-677225	-0,852	-0,852	1310
			7	-131007	0	-1,654	0	212
			8	-677225	677225	-0,852	0,852	1310
648	9,88	645	1	710602	-710602	0,894	-0,894	1102
			2	1302832	0	1,644	0	230
			3	710602	710602	0,894	0,894	1102
			4	0	-130283	0	-1,644	230
			5	0	1302832	0	1,644	230
			6	-710602	-710602	-0,894	-0,894	1102
			7	-130283	0	-1,644	0	230
			8	-710602	710602	-0,894	0,894	1102

На рис.5 представлен график зависимости относительной погрешности решения уравнений (9) и (13) для нелинейной задачи в зависимости от числа итераций при разбиении магнитопровода на 648 элементов. Из него видно, что на некоторых шагах итерационного процесса погрешность растет, но все же стремится к минимуму.

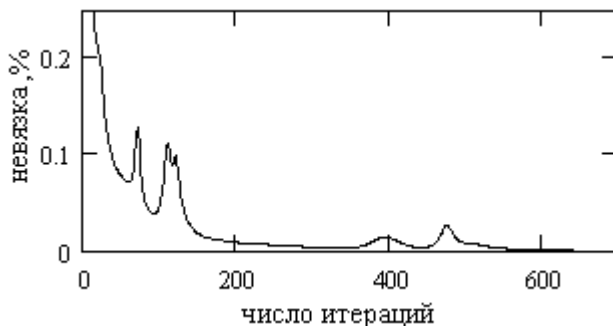


Рис.5. График зависимости относительной погрешности

Для ускорения итерационного процесса можно предложить следующие методы.

1. Добавив слева и справа к уравнению (2)  $k\vec{J}(Q)$ , после элементарных преобразований получим следующий итерационный процесс

$$\vec{J}_j^{(n+1)} = \frac{\alpha(J_j^{(n)})}{1+k} \left\{ \vec{B}_{0j} + \mu_0 \vec{H}_j^{*(n)} + \mu_0 \vec{J}_j^{(n)} \right\} + \frac{k}{1+k} \vec{J}_j^{(n)}, \quad (14)$$

где  $k$  – некоторая константа. Как и в предыдущих случаях требуем выполнения на каждом цикле итерационного процесса выполнения закона полного тока (13). Как показал численный эксперимент, для нелинейной задачи при выборе  $k$  в интервале  $[-0,5;0]$  итерационный процесс сходится быстрее. Заметим, что если  $k=0$ , то получаем итерационный процесс (9). Например, при числе элементов разбиения равном 72 и  $k=-0,5$  для получения точности той же, что при  $k=0$  необходимо провести 80 итераций вместо 117 (таблица 4).

2. Рассмотрим уравнение

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}_0(Q) + H^*(Q, P, \vec{J}(P)), \quad (15)$$

где  $\vec{H}_0(Q)$ ,  $\vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P))$  – напряженность магнитного поля, обусловленная соответственно внешними источниками (токами проводимости  $i$ ) и намагниченным магнитопроводом;  $\vec{J}(P)$  – намагниченность магнитопровода в точке истока  $P$ . С другой стороны напряженность магнитного поля может быть найдена следующим образом

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{\mu(Q)} \vec{B}_0(Q) + \frac{1}{\mu(Q)} \vec{B}^*(Q, P, \vec{J}(P)),$$

или, учитывая связь  $\vec{B}^* = \mu_0 \vec{H}^* + \mu_0 \vec{J}$ ,

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{\mu(Q)} \vec{B}_0(Q) + \frac{\mu_0}{\mu(Q)} \left( \vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P)) + \vec{J}(Q) \right), \quad (16)$$

где  $\vec{B}_0$  – магнитная индукция внешнего поля;  $\mu(Q)$  – магнитная проницаемость в зависимости от поля в точке Q;  $\vec{B}^*, \vec{H}^*$  – магнитная индукция и напряженность магнитного поля, обусловленного намагниченным магнитопроводом. Скорость сходимости итерационного процесса для уравнения (16), как показал численный эксперимент, такая же как и у (2). Преобразуем (16). Для этого умножим слева и справа (15) на некоторую константу  $K$  и сложим полученное уравнение с (16). После преобразований получим

$$\vec{H}(Q) = \frac{\mu_0 + \mu(Q)K}{(1+K)\mu(Q)} \vec{B}_0(Q) + \frac{\mu_0 + \mu(Q)K}{(1+K)\mu(Q)} \vec{H}^*(Q, P, \vec{J}(P)) + \frac{\mu_0}{(1+K)\mu(Q)} \vec{J}(Q). \quad (17)$$

Итерационная схема для уравнения (17) строится следующим образом.

*Первый шаг.* За начальное приближение принимается

$$\vec{H}^{(1)}(P) = \frac{\vec{B}_0(P)}{\mu(B_0(P))}.$$

*Второй шаг.* Находится намагниченность  $\vec{J}^{(1)}(P) = \frac{\mu(H(P)) - \mu_0}{\mu_0} \vec{H}^{(1)}(P)$ .

*Третий шаг.* Подставляя  $\vec{J}^{(1)}(P)$  в уравнение (17) находим  $\vec{H}^{(2)}(P)$ .

*Четвертый шаг.* Вычисляем циркуляцию  $I = \int_l \vec{H}^{(2)}(P) dl_p$ .

*Пятый шаг.* Вычисляем коэффициент  $c^{(2)} = \frac{i}{I^{(2)}}$  и уточняем

распределение вектора  $\vec{H} : \vec{H}^{*(2)}(P) = c^{(2)} \vec{H}^{(2)}(P)$ .

*Шестой шаг.* Находим распределение  $\vec{J}^{(2)}(P) = \frac{\mu(H(P)) - \mu_0}{\mu_0} \vec{H}^{*(2)}(P)$ .

*Седьмой шаг.* Подставляя  $\vec{J}^{(2)}(P)$  в (17) находим следующее распределение намагниченности  $\vec{H}^{(3)}(P)$ .

Далее, повторяем для  $\vec{H}^{(3)}(P)$  шаги с четвертого по седьмой, и т. д. Итерационный процесс считаем законченным, если выполнено условие

$$\varepsilon = \frac{\|\vec{J}^{(n-1)} - \vec{J}^{(n)}\|}{\|\vec{J}^{(n)}\|} \cdot 100\% < \delta,$$

где  $\delta$  – некоторое наперед заданное число;  $n$ – номер итерации.

Численные эксперименты показали, что целесообразно выбрать коэффициент  $K$  в уравнении (17) из условия  $K \leq \frac{\mu}{\mu_0}$ , где  $\mu$ , вообще говоря, зависит от напряженности магнитного поля. Следует отметить, что скорость сходимости описанной итерационной схемы на основе уравнения (17) максимальна при  $K = \frac{\mu}{\mu_0}$ . При указанном значении  $K$  для примера (нелинейная задача), рассмотренного выше, при разбиении области магнитопровода на 72 элемента потребовалось 81 итерация вместо 117 при заданном значении невязки (таблица 4).

1. Пеккер И.И. Расчёт магнитных систем методом интегрирования по источникам поля //Известия Вузов. Серия Электромеханика. – 1964. – №9.
2. Пеккер И.И. К расчёту магнитных систем методом интегрирования по источникам поля // Известия Вузов. Серия Электромеханика. – 1968. – №9.
3. Пеккер И.И., Пеккер М.И., Кирсанов А.Г. Расчет магнитного поля тора с воздушным зазором, методом интегрирования по источникам поля // Известия Вузов. Серия Электромеханика. – 1975. – №1.
4. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. –Киев: Техника,1974. – 352 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978. – 292 с.
6. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука. Главная редакция физ. - мат. Литературы, 1985. – 336 с.

*Поступила 2.08.2010р.*

УДК 681.325.5

Л. Л. Гончарова

## **СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА РЕЖИМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

**Актуальность.** В настоящее время энергетика стала тем сегментом экономики, который призван обеспечивать функционирование не только другие отрасли, но и различные сферы человеческой деятельности [1]. В этой связи к работе электрической отрасли в условиях рынка выдвигается ряд повышенных требований в процессе производства, передачи и потребления электроэнергии. Определяющими из них являются синхронность, и высокая