

відповідей) з формули (3);

б) при 5-ти бальній системі оцінювання за межі оцінок беруться наступні значення:

межа 2-3 –  $0.5 \cdot \text{ОВПВ}$ ;

межа 3-4 –  $\text{ОВПВ}$ ;

межа 4-5 –  $50 + 0.5 \cdot \text{ОВПВ}$ ;

межа 5 – 100.

Пояснення отриманої оцінки конкурсант може побачити після здачі екзамену в системі Учня, на кадрі з результатами екзамену, рис.8.

1. <http://uk.wikipedia.org>

2. *Самойлов В.Д.*. Организация формирования сложности тестовых заданий и рейтинга тестируемых. Зб. наук. пр. ИПМЭ ім. Г.Е.Пухова, спец. вип. «Сучасні технології перепідготовки персоналу та управління кадрами в промисловості та паливно-енергетичному комплексі», Київ, 2007 г., с.91-96

*Поступила 11.02.2009р.*

УДК 621.3.014.4:621.315.58:517.968

А. В. Жильцов, канд. техн. наук, ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины

### **ТРЕХМЕРНАЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОТНОСТИ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ С ЖИДКИМИ ПРОВОДНИКАМИ**

Получена система интегро-дифференциальных уравнений меньшей размерности для расчета плотности вихревых токов в массивных проводниках за счет введения двойного слоя магнитных зарядов для учета влияния намагниченного магнитопровода.

**Простановка задачи.** Рассмотрим электромагнитную систему (рис.1), которая включает в себя  $(N-1)$ -н массивный проводник  $D_1, D_2, \dots, D_{N-1}$ , шихтованный магнитопровод  $D_N$ , и обмотку  $D_W$  с плотностью тока  $\bar{\delta}_W(M, t), t \geq 0$ , создающая изменяющееся во времени магнитное поле. Будем полагать, что проводник, занимающий объем  $D_1$  находится в жидкой фазе и в нем известен закон распределения поля скоростей  $\vec{V}(Q, t)$  (определяется из решения гидродинамической задачи). Удельная проводимость материалов проводников постоянна по объему каждого проводника и равна

соответственно  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-1}$ . Предполагаем, что массивные проводники не имеют между собой электрического контакта. Абсолютную магнитную проницаемость магнитопровода  $D_N$  полагаем постоянной и равной  $\mu$ .

Считаем известным начальное распределение плотности вихревых токов по массивным проводникам  $\vec{\delta}(M, 0)$ , которое обозначим через  $\vec{\delta}^{(0)}(M)$ .

Конечная задача состоит в том, чтобы по заданной геометрии системы, электрофизическим характеристикам материалов, из которых изготовлены конструктивные элементы, электрическому соединению элементов, заданным токам в первичных обмотках найти поле скоростей в жидком проводнике. В общем случае это требует решения трехмерных краевых задач для системы уравнений Максвелла в неограниченной области, уравнений Навье-Стокса в жидком проводнике [1]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{\delta} = 0, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \gamma [\vec{V}, \vec{B}], \quad (1)$$

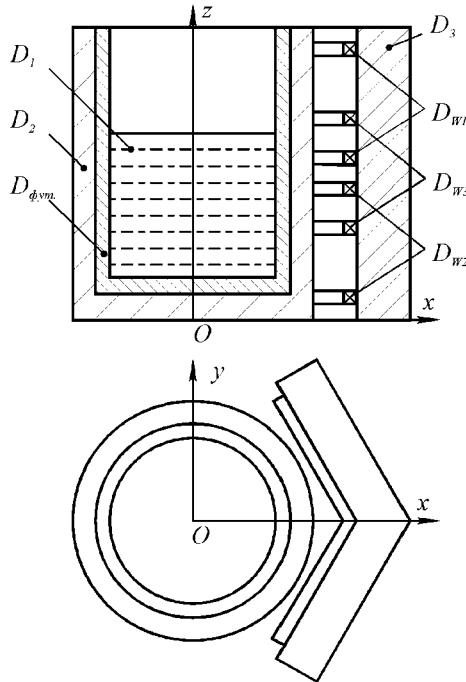


Рис.1. Электромагнитная система с жидким проводником (ковш-печь — индукционный перемешиватель):  $D_1$  — проводник в жидкой фазе ( $\mu_0, \gamma_1$ );  $D_2$  — массивный проводник в твердой фазе ( $\mu_0, \gamma_2$ );  $D_3$  — шихтованный магнитопровод ( $\mu, \gamma_3 = 0$ );  $D_{фут.}$  — футеровка;  $D_W = D_{W1} \cup D_{W2} \cup D_{W3}$  — обмотка.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \text{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{f}, \quad \text{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\vec{H}$  — вектор напряженности магнитного поля;  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\vec{\delta}$  — вектор плотности тока;  $\gamma$  — удельная проводимость;  $\mu$  — абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\vec{V}$  — вектор скорости, для проводников в твердой фазе необходимо положить  $\vec{V} = 0$ ;  $\rho$  — плотность проводника в жидкой фазе;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $\nu = \eta / \rho$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости;  $\vec{f}$  — объемная плотность сил.

Решение полной системы уравнений (1) — (2) даже при использовании современных быстродействующих компьютеров связано с большими трудностями. За счет декомпозиции задача сводится к решению двух подзадач: электромагнитной (1), т.е. на заданном поле скоростей в жидком проводнике ищется распределение электродинамических сил в нем, и гидродинамической (2), т.е. на заданном поле электродинамических сил в жидком проводнике ищется распределение скоростей в нем. В данной статье рассматривается только электромагнитная задача.

Введением векторного потенциала  $\vec{A}$  и скалярного электрического потенциала  $\phi$  приходим к системе уравнений, эквивалентной системе уравнений Максвелла (1):

$$\text{rot}(\mu^{-1} \text{rot} \vec{A}) = \vec{\delta}. \quad (3)$$

$$\vec{\delta} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad} \phi + \gamma [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (4)$$

В работе [2] сформулирована следующая краевая задача для определения векторного магнитного потенциала и скалярного электрического потенциала для рассматриваемой электромагнитной системы:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{\delta}_W, \quad Q \in D_W; \quad (5)$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{\delta}, \quad Q \in D; \quad (6)$$

$$\Delta \vec{A} = 0, \quad Q \in D^- \cup D_N; \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_0} [\vec{n}_Q, \text{rot} \vec{A}^-] = \frac{1}{\mu} [\vec{n}_Q, \text{rot} \vec{A}^+], \quad Q \in S_N; \quad (8)$$

$$[\vec{A}^-, \vec{n}_Q] = [\vec{A}^+, \vec{n}_Q], \quad Q \in S_N; \quad (9)$$

$$[\vec{n}_Q, \text{rot} \vec{A}^-] = [\vec{n}_Q, \text{rot} \vec{A}^+], \quad Q \in S; \quad (10)$$

$$[\vec{n}_Q, \vec{A}^-] = [\vec{n}_Q, \vec{A}^+], \quad Q \in S; \quad (11)$$

$$\Delta\varphi^+ = -\rho, \quad Q \in D_1; \quad (12)$$

$$\Delta\varphi^+ = 0, \quad Q \in D_q, \quad q=2,3,\dots,N-1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t} + (\vec{n}_Q, [\vec{V}, \vec{B}]), \quad Q \in S_1; \quad (14)$$

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial n_Q} = -\frac{\partial A_{n_Q}^+}{\partial t}, \quad Q \in S_q, \quad q=2,3,\dots,N-1; \quad (15)$$

где  $D = \bigcup_{q=1}^{N-1} D_q$  — область, занимаемая массивными проводниками;

$S = \bigcup_{q=1}^{N-1} S_q$  — поверхность массивных тел;  $D^-$  — внешнее по отношению ко

всем телам электромагнитной системы пространство;  $D_N$  — область, которую занимает шихтованный магнитопровод;  $S_N$  — поверхность магнитопровода;  $\rho = -\text{div}[\vec{V}, \vec{B}]$ .

Для учета намагниченности ферромагнитного тела в [2] использован простой слой токов, который являются векторным источником. Там же краевая задача (5)-(14) сведена к эквивалентной системе интегро-дифференциальных уравнений, к решению которой сводится расчет плотности вихревых токов в массивных проводниках с учетом распределения скорости в жидком проводнике. Заменяем простые слои токов намагниченности эквивалентными слоями скалярных вторичных источников [3]. При этом искомая векторная плотность токов намагниченности будет заменяться скалярной величиной — плотностью двойного слоя, — поэтому число уравнений в общей системе существенно уменьшится.

**Вывод интегро-дифференциальных уравнений для плотности вихревых токов.** Представим магнитную индукцию  $\vec{B}$  в виде суммы двух слагаемых

$$\vec{B} = \vec{B}^\delta + \vec{B}^n, \quad (16)$$

где  $\vec{B}^\delta$  — составляющая, созданная всеми токами проводимости в предположении, что окружающая среда однородна;  $\vec{B}^n$  — составляющая, созданная намагниченностью тела  $D_N$ .

Соответственно векторный потенциал запишем в виде

$$\vec{A} = \vec{A}^\delta + \vec{A}^n, \quad (17)$$

где  $\vec{B}^\delta = \text{rot} \vec{A}^\delta$ ,  $\vec{B}^n = \text{rot} \vec{A}^n$ .

При этом для  $\vec{A}^\delta$  справедливо выражение:

$$\vec{A}^\delta(Q, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{\vec{\delta}_W(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\vec{\delta}(M, t)}{r_{QM}} dV_M. \quad (18)$$

Подставляя соотношения (17), (18) в (4), выводим интегро-дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{\partial \vec{A}^n(Q, t)}{\partial t} + \vec{\delta}(Q, t) + \gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \vec{\delta}(M, t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \gamma_1 \text{grad} \varphi^+(Q, t) = \\ = -\gamma_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \vec{\delta}_W(M, t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \gamma_1 [\vec{V}(Q, t), \vec{B}(Q, t)], \quad Q \in D_1; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_q \frac{\partial \vec{A}^n(Q, t)}{\partial t} + \vec{\delta}(Q, t) + \gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \vec{\delta}(M, t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \gamma_q \text{grad} \varphi^+(Q, t) = \\ = -\gamma_q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \vec{\delta}_W(M, t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M, \quad Q \in D_q, \quad q = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения  $\text{grad} \varphi^+$  ставится внутренняя краевая задача (12) — (15). Решение уравнений (12), (13) ищем в виде:

$$\varphi^+(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \frac{\rho(M, t)}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\eta(M, t)}{r_{QM}} dS_M, \quad (21)$$

где  $\eta(M, t)$  — мгновенная плотность простого слоя электрических зарядов в точке  $M$ . Из соотношения (21) следует

$$\text{grad}_Q \varphi^+(Q, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \eta(M, t) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{\vec{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M. \quad (22)$$

Используем свойство потенциала простого слоя

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial n_Q} = \frac{\eta(Q, t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \eta(M, t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dV_M. \quad (23)$$

Удовлетворяя решение (21) краевым условиям (14) и (15) с учетом (23), получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_{n_Q}^+(Q, t)}{\partial t} + (\vec{n}_Q, [\vec{V}(Q, t), \vec{B}(Q, t)]) = \frac{\eta(Q, t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \eta(M, t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dS_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M, t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in S_1; \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial A_{n_Q}^+(Q,t)}{\partial t} = \frac{\eta(Q,t)}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \eta(M,t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}^3} dV_M, \\ Q \in S_q, \quad q=2,3,\dots,N-1.$$

Таким образом, принимая во внимание выражения (17) и (18), приходим к следующей системе уравнений

$$\eta(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \iint_S \eta(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{(\vec{\delta}(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + 2 \left( \frac{\partial \bar{A}^n(Q,t)}{\partial t}, \vec{n}_Q \right) = \\ = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \frac{(\vec{\delta}_W(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + 2(\vec{n}_Q, [\vec{V}(Q,t), \vec{B}(Q,t)]) - \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dV_M, \\ Q \in S_1; \quad (24)$$

$$\eta(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \iint_S \eta(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{(\vec{\delta}(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + 2 \left( \frac{\partial \bar{A}^n(Q,t)}{\partial t}, \vec{n}_Q \right) = \\ = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \frac{(\vec{\delta}_W(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M - \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dV_M, \\ Q \in S_q, \quad q=1,2,\dots,N-1. \quad (25)$$

Поскольку  $rot \vec{B}^n = 0$ , то можно ввести скалярный магнитный потенциал  $\Phi_m$  выражением

$$\vec{B}^n = -grad \Phi_m. \quad (26)$$

Очевидно, что потенциал  $\Phi_m$  удовлетворяет уравнению Лапласа как внутри, так и вне ферромагнитного тела  $D_N$ .

Из разложения (16) и краевых условий для вектора  $\vec{B}$  на границе  $S_N$  ферромагнитного тела находим:

$$\frac{\vec{B}_\tau^{n-}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}_\tau^{n+}}{\mu} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 \mu} \vec{B}_\tau^\delta, \quad B_n^{n-} = B_n^{n+}. \quad (27)$$

Из выражения (26) следует, что краевые условия (27) будут выполнены, если скалярный потенциал  $\Phi_m$  будет удовлетворять граничным соотношениям:

$$\frac{\Phi_m^-}{\mu_0} - \frac{\Phi_m^+}{\mu} = \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 \mu} \Phi_m^\delta + C, \quad \frac{\partial \Phi_m^-}{\partial n_Q} = \frac{\partial \Phi_m^+}{\partial n_Q}, \quad (28)$$

где  $\Phi_m^\delta$  — скалярный потенциал поля  $\vec{B}^\delta$ , имеющий смысл вне токов;  $C$  —

произвольная постоянная.

Поскольку скалярный магнитный потенциал  $\varphi_m$  — гармоническая внутри и вне  $D_N$  функция, нормальные производные которой на  $S_N$  непрерывны, а сам потенциал на  $S_N$  претерпевает разрыв, то  $\varphi_m$  можно представить в виде потенциала двойного слоя магнитных зарядов, распределенных по поверхности  $S_N$  :

$$\varphi_m(Q,t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_N} \tau(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M)}{r_{QM}^3} dS_M. \quad (29)$$

При этом краевое условие (28) будет выполнено, если  $\tau(Q,t)$  будет решением интегрального уравнения

$$\tau(Q,t) - \frac{\chi}{2\pi} \int_{S_N} \tau(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M)}{r_{QM}^3} dS_M = -2\chi\varphi_m^\delta(Q,t) + \frac{\mu_0\mu}{\mu+\mu_0} C, \quad Q \in S_N. \quad (30)$$

Так как, параметр  $\chi = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$  близок в последнем уравнении к характеристическому значению — единице, так как обычно  $\mu \ll \mu_0$ , то это уравнение целесообразно преобразовать к следующему виду [3]:

$$\begin{aligned} \tau(Q,t) - \frac{\chi}{2\pi} \int_{S_N} \tau(M,t) \left[ \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M)}{r_{QM}^3} - \frac{1}{S_N} \int_{S_N} \frac{(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_M)}{r_{PM}^3} ds_P \right] dS_M = \\ = -2\chi \left[ \varphi_m^\delta(Q,t) - \frac{1}{S_N} \int_{S_N} \varphi_m^\delta(M,t) dS_M \right], \quad Q \in S_N. \end{aligned} \quad (31)$$

Векторный потенциал двойного слоя магнитных зарядов определяется согласно соотношению [3]

$$\vec{A}^H(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_N} \tau(M,t) \frac{[\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M]}{r_{QM}^3} dS_M, \quad (32)$$

а скалярный магнитный потенциал —

$$\varphi_m^\delta(Q,t) - \varphi_m^\delta(Q_0,t) = - \int_{Q_0}^Q \vec{B}^\delta(M,t) d\vec{l}_M, \quad (33)$$

где  $\vec{B}^\delta(M,t)$  — поле, создаваемое первичными и вихревыми токами. Для вычисления скалярного магнитного потенциала  $\varphi_m^\delta(Q,t)$  можем воспользоваться следующей формулой [3], которая следует из (33),

$$\begin{aligned} \Phi_m^\delta(Q,t) - \Phi^\delta(Q_0,t) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D_W} \frac{(\bar{\delta}_W(P,t), [\bar{r}_{PQ}, \bar{r}_{PQ_0}]) (r_{PQ_0} + r_{PQ})}{r_{PQ} r_{PQ_0} (r_{PQ_0} r_{PQ} + (\bar{r}_{PQ_0}, \bar{r}_{PQ}))} dV_P - \\ & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{(\bar{\delta}(P,t), [\bar{r}_{PQ}, \bar{r}_{PQ_0}]) (r_{PQ_0} + r_{PQ})}{r_{PQ} r_{PQ_0} (r_{PQ_0} r_{PQ} + (\bar{r}_{PQ_0}, \bar{r}_{PQ}))} dV_P. \end{aligned} \quad (34)$$

Магнитная индукция, обусловленная двойным слоем магнитных зарядов, распределенных по поверхности  $S_N$ , находится следующим образом

$$\bar{B}^n(Q,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_N} \tau(M,t) \frac{3(\bar{n}_M, \bar{r}_{QM}) \bar{r}_{QM} - \bar{n}_M r_{QM}^2}{r_{QM}^5} dS_M. \quad (35)$$

Таким образом, полная система интегро-дифференциальных уравнений, к решению которой сводится определение вихревых токов в массивных проводниках и плотности двойного слоя магнитных зарядов на поверхности магнитопровода имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau(Q,t) - \frac{\chi}{2\pi} \iint_{S_N} \tau(M,t) \left[ \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{n}_M)}{r_{QM}^3} - \frac{1}{S_N} \iint_{S_N} \frac{(\bar{r}_{PM}, \bar{n}_M)}{r_{PM}^3} dS_P \right] dS_M = \\ = -2\chi \left[ \Phi_m^\delta(Q,t) - \frac{1}{S_N} \iint_{S_N} \Phi_m^\delta(M,t) dS_M \right], \quad Q \in S_N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_N} \tau(M,t) \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{n}_M)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\bar{\delta}(Q,t)}{\gamma_1 \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \int_D \bar{\delta}(M,t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{\mu_0} \iint_S \eta(M,t) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \bar{\delta}_W(M,t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{\lambda} [\bar{V}(Q,t), \bar{B}(Q,t)] - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_N} \tau(M,t) \frac{(\bar{r}_{QM}, \bar{n}_M)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\bar{\delta}(Q,t)}{\gamma_q \lambda} + \frac{\partial}{\partial t} \int_D \bar{\delta}(M,t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M + \frac{1}{\mu_0} \iint_S \eta(M,t) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dS_M = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \bar{\delta}_W(M,t) \frac{1}{r_{QM}} dV_M - \frac{1}{\mu_0} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in D_q, \quad q=2,3,\dots,N-1; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \eta(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \iint_S \eta(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{(\vec{\delta}(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + \\
& + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_N} \tau(M,t) \frac{([\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M], \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \frac{(\vec{\delta}_W(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + \\
& + 2(\vec{n}_Q, [\vec{V}(Q,t), \vec{B}(Q,t)]) - \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in S_1; \\
& \eta(Q,t) + \frac{1}{2\pi} \iint_S \eta(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{(\vec{\delta}(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M + \\
& + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_N} \tau(M,t) \frac{([\vec{r}_{QM}, \vec{n}_M], \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dS_M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_W} \frac{(\vec{\delta}_W(M,t), \vec{n}_Q)}{r_{QM}} dV_M - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{D_1} \rho(M,t) \frac{(\vec{r}_{QM}, \vec{n}_Q)}{r_{QM}^3} dV_M, \quad Q \in S_q, \quad q=2,3,\dots,N-1.
\end{aligned}$$

**Вывод.** Полученная в работе система интегро-дифференциальных уравнений для расчета плотности вихревых токов позволяет более эффективно использовать ресурсы вычислительной техники для анализа влияния конструктивных и электрофизических параметров электротехнических устройств с жидкими проводниками на протекающие в них МГД процессы. Это достигается за счет применения скалярных вторичных источников — двойного слоя магнитных зарядов — для учета намагнитченности ферромагнитного тела, что в целом приводим к системе уравнений меньшей размерности.

1. Шеркшиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. М., «Мир», 1967.
2. Евдокимов В.Ф., Жильцов А.В., Петрушенко Е.И. Трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов в системе ковш-печь — индукционный перемешиватель на заданном поле скоростей потоков в расплаве стали // Электрон. моделирование. — 2009. — Т.31, №2. — С.3—17.
3. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. К.: «Техніка», 1974. — 352 с.

Поступила 19.02.2009г.