

$$k_{1_{q+1}}(z) = \begin{cases} k_{1_q}(z) - \frac{\alpha_k}{m(z)} \left\{ \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |v|] + \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |S_2|] \right\}, \\ k_{1_{\min}} \leq k_{1_q}(z) - \frac{\alpha_k}{m(z)} \left\{ \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |v|] + \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |S_2|] \right\} \leq k_{1_{\max}}, \\ m_{\min}, \\ k_{1_q}(z) - \frac{\alpha_k}{m(z)} \left\{ \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |v|] + \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |S_2|] \right\} < k_{1_{\min}}, \\ m_{\max}, \\ k_{1_q}(z) - \frac{\alpha_k}{m(z)} \left\{ \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |v|] + \sum_{i=1}^n [k_1(z_i) p_P^* |S_2|] \right\} > k_{1_{\max}} \end{cases}$$

Проведенные численные исследования показали, что для идентификации параметров пласта, определяемого сеткой дискретизации по пространству $z_1=12, z_2=16$ необходимо не более 8 итераций при общем времени решения задачи не более 120 с.

1. *Положаенко С.А.* Математические модели процессов течения аномальных жидкостей // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. пр. — К.: ИПМЕ, 2001. — Вип. 9. — С. 14 — 21.
2. *Положаенко С.А.* Математическая модель фильтрации грунтовых вод для класса гидротехнических земляных сооружений // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. — Одеса: ОДАБА, 2005. — С. 206 — 211.
3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. — 400с.

Поступила 27.10.2010р.

УДК 621.6.677.49–472.2

В.В. Орлов, к.т.н., ИПМЭ НАН Украины, г. Киев

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АДАПТИВНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ТЕСТА ХОТЕЛЛИНГА

Аннотация. Исследуются вероятностные характеристики обнаружения сигнала неизвестной формы в условиях помех с неизвестными параметрами. Анализ эффективности обнаружения сигнала проводится с учетом объема обучающей выборки, применяемой для оценивания ковариационной матрицы помех.

Orlov V.V. **THE EFFECTIVENESS OF THE ADAPTIVE SIGNAL DETECTION, BASED ON THE HOTTELING TEST.** *Summary.* Likelihood characteristics of detection of a unknown signal in the conditions of clutters with unknown parametres are investigated. The analysis of efficiency of detection of a signal is spent taking into account volume of the training sample applied to estimation covariation matrix of clutters.

Отличительной особенностью задач обнаружения сигналов является необходимость их решения в условиях априорной неопределенности сигнально-помеховой обстановки, для преодоления которой широко применяется адаптивный подход с использованием обучающей выборки для оценивания неизвестных параметров [1,2]. Анализ требований к объему обучающей выборки проведен для алгоритмов выделения и обнаружения сигналов известной формы в условиях помех с неизвестными параметрами [2, 3]. Для адаптивных систем обнаружения сигнала неизвестной формы эта задача не исследована.

Сначала проводится анализ эффективности обнаружения сигналов на фоне нормально распределенных помех с известными параметрами, а затем в условиях параметрической неопределенности.

1.Параметры помех известны.

Рассмотрим вероятностные характеристики алгоритма обнаружения неизвестного сигнала со средним, отличным от нуля, на фоне нормально распределенных помех с нулевым средним. Формирование решающей статистики y в условиях помех с известными параметрами основано на квадратичной фильтрации входного процесса [4, 5] и последующем сравнении y с порогом C . При этом решающая статистика определяется в отсутствии и при наличии сигнала S в условиях помех с ковариационной матрицей R соответственно соотношениями

$$y_n = X^T R^{-1} X ; y_{c+n} = (X + S)^T R^{-1} (X + S), \quad (1)$$

где S, X –векторы сигнала и помехи размера N ; R –матрица размера $N \times N$. Представим $R^{-1} = R^{-1/2} (R^{-1/2})^T$ в виде выбеливающих фильтров [1, 2], обеспечивающих декорреляцию и равные дисперсии отсчётов вектора $Z = R^{-1/2} X$. Тогда получим

$$y_n = (R^{-1/2} X)^T R^{-1/2} X = \sum_{i=1}^N z_i^2, \quad (2)$$

что статистика y_n образует сумму N одинаково распределённых независимых случайных величин $z_i \sim (0,1)$, подчиняющуюся χ^2 распределению с N степенями свободы [6]

$$\omega_n(y) = \left[2^{N/2} \Gamma(N/2) \right]^{-1} y^{N/2-1} e^{-y/2}, \quad (3)$$

где $\Gamma(N) = (N-1)!$ - гамма-функция целого аргумента.

При наличии сигнала со средним S решающая статистика имеет вид

$$y_{c+n} = (R^{-1/2}X + R^{-1/2}S)^T (R^{-1/2}X + R^{-1/2}S) = (Z+V)^T (Z+V) = \sum_{i=1}^N (z_i + v_i)^2, \quad (4)$$

где $V = R^{-1/2}S$ - вектор средних, а статистика y_{c+n} имеет нецентральное χ^2 распределение с N степенями свободы и параметром нецентральности [6] $q = V^T V = S^T R^{-1} S$. На практике применяется следующая форма вычисления нецентрального вычисления $\chi^2(x, N, q)$ [7]

$$\omega_{c+n}(y) = \chi^2(y, N, q) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q/2)^j}{j!} e^{-q/2} \Pr[\chi_{N+2j}^2 < y], \quad (5)$$

где $\Pr[*]$ – функция вероятности.

В качестве иллюстрации на Рис.1 приведены графики плотностей распределений помехи и смеси сигнала с помехой ω_n, ω_{c+n} для различных размеров N вектора сигнала и обобщенного среднего $q=10$.

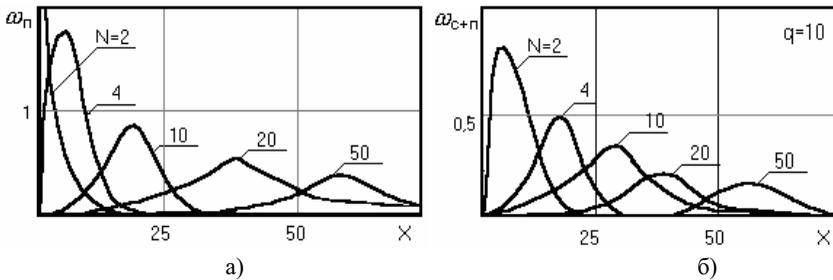


Рис.1 Плотности распределения вероятностей при: а – отсутствии сигнала; б – наличии сигнала

Анализ зависимостей показал, что с ростом $N > 20$ форма распределений (3), (5) приближается к нормальному закону. Определим среднее \bar{y}_n и дисперсию σ_n^2 распределений по методике [1, с.420]

$$\begin{aligned} \bar{y}_n &= \overline{X^T R^{-1} X} = \text{tr}\{R^{-1} \overline{X X^T}\} = \text{tr}\{R^{-1} R\} = N; \\ \sigma_n^2 &= \overline{(y_n - \bar{y}_n)^2} = \overline{y_n^2} - \bar{y}_n^2 = \overline{(X^T R^{-1} X)^2} - N^2 = \text{tr}\{(Z_1^T Z)^2\} - N^2 = 2N. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая некоррелированность векторов X и S , проведем аналогичные преобразования для смеси сигнала с помехой

$$\begin{aligned} \bar{y}_{c+n} &= \overline{(X+S)^T R^{-1} (X+S)}; \quad \bar{y}_n = \overline{X^T R^{-1} X} + S^T R^{-1} S = N + q; \\ \sigma_{c+n}^2 &= \overline{y_{c+n}^2} - (\bar{y}_{c+n})^2 = \overline{[(X+S)^T R^{-1} (X+S)]^2} - (N+q)^2 = 2(2N+2q). \end{aligned} \quad (7)$$

Вероятности ложной тревоги $P_{ЛТ}$ и правильного обнаружения $P_{ПО}$ соответствуют вероятностям превышения статистикой (1) порога C и определяются интегрированием по плотностям распределений (3) и (5)

$$P_{ЛТ}(C) = \int_C^{\infty} \omega_n(y) dy \quad P_{ПО}(q) = \int_C^{\infty} \omega_{c+n}(y) dy \quad (8)$$

Для $N > 20$ вычисление нецентрального χ^2 распределения затруднительно, в связи с чем рекомендуется его аппроксимация нормальным распределением с параметрами (6,7). На Рис.2 представлены зависимости вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения для различных размеров N обрабатываемого вектора выборки, где штриховой линией приведена зависимость $N=1$ (что соответствует случаю когерентного накопления полностью известного сигнала).

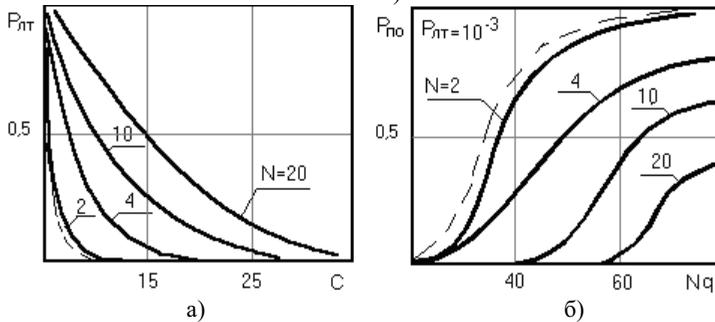


Рис.2. Рабочие характеристики: а – зависимости вероятности ложной тревоги от порога обнаружения; б – зависимости вероятности обнаружения сигнала от отношения сигнал/помеха

2. Параметры помех неизвестны.

В условиях априорной неопределенности относительно помех проводится адаптация с применением обучающей выборки для максимально правдоподобного оценивания ковариационной матрицы [1, 2, 3]

$$\hat{R} = k^{-1} \sum_{i=1}^k X_i X_i^T, \quad (9)$$

где k - объем обучающей выборки, состоящей из векторов X_i , $i = 1, \dots, k$.

Оценка (9) подчиняется распределению Уишарта $W(k, N, I_0)$ [3]. Подстановка (9) в (1) приводит к формированию решающих статистик (1) в виде теста Хотеллинга [5, 6, 8]

$$\hat{y}_n = X^T \hat{R}^{-1} X; \quad \hat{y}_{c+n} = (X + S)^T \hat{R}^{-1} (X + S). \quad (10)$$

Вероятностные характеристики теста Хотеллинга исследовались в [6, 8]. При этом отсутствует методика определения объема обучающей выборки для адаптивного обнаружения с учетом параметров сигнально-помеховой

обстановки S, R . С целью определения закона распределения (10) проводится ряд преобразований. Для этого статистику в отсутствии сигнала \hat{y}_n преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\hat{y}_n &= X^T \hat{R}^{-1} X = \left(X R^{-1/2} \right)^T R^{1/2} \hat{R}^{-1} R^{1/2T} \left(R^{-1/2} X \right) =, \\ &= Z^T R^{1/2} \hat{R}^{-1} R^{1/2T} Z = Z^T \hat{M}^{-1} Z\end{aligned}\quad (11)$$

где $\hat{M} = R^{1/2} \hat{R}^{-1} R^{1/2T}$ - матрица, значение которой при $k \rightarrow \infty$ сходится к единичной. При этом распределение (11) зависит сложным образом от распределений обрабатываемого вектора Z и обучающей матрицы \hat{M} . Необходимо найти инвариантное к решающей статистике преобразование для разделения случайных величин, определяющих обработку и обучение. Воспользовавшись методикой [2], проведем нормировку вектора Z , так чтобы $B = \left(Z^T Z \right)^{-1/2} Z = \left(X^T R^{-1} X \right)^{-1/2} Z$. Заметим, что для вектора B можно всегда найти унитарную матрицу U , ($UU^T = I_0$), такую чтобы $B = UE_1$, где $E_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ - первый столбец единичной матрицы I_0 .

Тогда решающая статистика (11), в соответствии с методикой [2], определяется после ряда преобразований

$$\begin{aligned}\hat{y}_n &= X^T R^{-1} X \cdot B^T \hat{M}^{-1} B = y_n E_1^T U^T \hat{M}^{-1} U E_1 = \\ &= y_n E_1^T \hat{C}^{-1} E_1 = y_n \cdot \left\{ \hat{C}^{-1} \right\}_{11} = ky_n / d\end{aligned}\quad (12)$$

где $C = U^T \hat{M} U$ - подчиняющаяся закону Уишарта $W(k, N, I_0)$, $E\{C\} = U^T U = I_0$. При этом, показано [2], что элемент $d = \left(C^{-1} \right)_{11}^{-1}$ подчиняется χ^2 -распределению с $k - N + 1$ степенями свободы. Решающая статистика представляется отношением двух случайных величин $\hat{y}_n = ky_n / d$, в котором числитель и знаменатель независимы (числитель зависит только от вектора обрабатываемого входного процесса, а знаменатель от обучающей выборки). Учитывая также, что \hat{y}_n является отношением χ^2 распределений, то величина $x = [(y_n / N)] / [d / (k - N + 1)]$ подчиняется F -распределению [6]

$$\begin{aligned}\omega(x) &= F(x | N, k - N + 1) = \\ &= \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma[N/2]\Gamma[(k-N+1)/2]} \left(\frac{N}{k-N+1} \right)^{N/2} \frac{x^{N/2-1}}{\left(1 + \frac{Nx}{k-N+1} \right)^{(k+1)/2}},\end{aligned}\quad (13)$$

а $\hat{y}_n = ky_n / d = ax$ имеет линейную зависимость с x , где $a = kN / (k - N + 1)$.

Тогда распределение помехи определяется

$$\omega_n(\hat{y}_n) = |a|^{-1} F(\hat{y}_n / a, N, k - N + 1).$$

При наличии сигнала решающая статистика после декорелирующего преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{y}_{c+n} &= (X+S)^T \hat{R}^{-1} (X+S) = \\ &= (Z+V)^T R^{1/2T} \hat{R}^{-1} R^{1/2} (Z+V) = (Z+V)^T \hat{M}^{-1} (Z+V) \end{aligned} \quad (14)$$

После нормировки вектора $Z+V = B[(Z+V)^T(Z+V)]^{1/2}$ получим

$$\hat{y}_{c+n} = B^T \hat{M}^{-1} B \cdot (X+S)^T R^{-1} (X+S) = E_1^T U^T \hat{M}^{-1} U E_1 \cdot y_{c+n} = \frac{y_{c+n}}{d} k, \quad (15)$$

где y_{c+n} - подчиняется (5). Из (15) следует, что статистика \hat{y}_{c+n} является отношением двух случайных величин, из которых числитель y_{c+n} имеет нецентральное χ^2 распределение с N степенями свободы и показателем нецентральности q , а знаменатель подчиняется центральному χ^2 распределению с $(k-N+1)$ степенями свободы. Заметим, что статистика $\hat{y}_{c+n} = ky_{c+n}/d = ax$ связана со случайной величиной $x = [(y_{c+n}/N)]/[d/(k-N+1)]$ линейной зависимостью, которая подчиняется нецентральному F -распределению с параметром нецентральности q [6, 8]

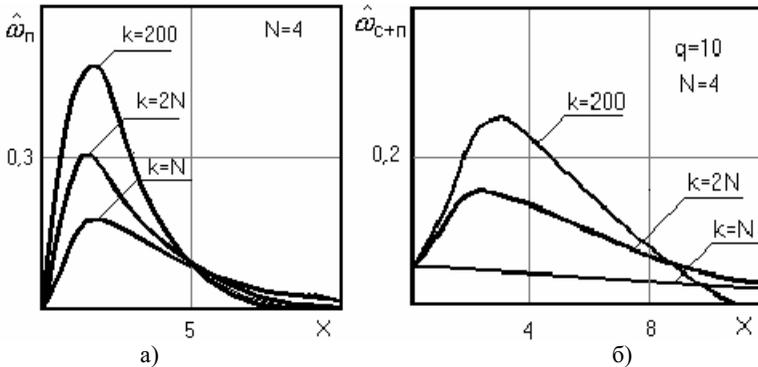


Рис.3. Плотности распределения вероятностей в условиях адаптации при: а – отсутствии сигнала; б – наличии сигнала

$$\begin{aligned} \omega(x, q) &= F(x | N, (k-N+1), q) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q/2)^j}{j!} e^{-q/2} I\left(\frac{Nx}{k-N+1+Nx} | N/2+j, (k-N+1)/2\right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $I(x, |m, n)$ - неполная бета-функция с параметрами m и n . Тогда распределение смеси сигнала с помехой имеет вид $\omega_{c+n}(\hat{y}_{c+n}) = a^{-1} F(\hat{y}_{c+n}/a, N, k-N+1, q)$. На Рис.3 приведены графики

плотностей распределения решающих статистик при отсутствии и при наличии сигнала для различных размеров вектора обучающей выборки. Заметим, что в случае $k < 8N$ плотности распределений имеют несимметричную форму и, следовательно, не подчиняются аппроксимации нормальным распределением.

Результирующие вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения для решающей статистики (10) определяются выражениями

$$P_{лт}(c) = \int_c^\infty \omega_n(\hat{y}_n) d\hat{y}_n = \int_{c/a}^\infty F(x, N, k - N + 1) dx; \quad (17)$$

$$P_{по}(c, q) = \int_{c/a}^\infty F(x, N, k - N + 1, q) dx.$$

В соответствии с (17) на рис. 4 для $N = 5$; 50 построены зависимости вероятности ложной тревоги $P_{лт}$ от порогового уровня C при различном объеме k обучающей выборки. Штриховой линией показаны зависимости (8) в случае известной ковариационной матрицы

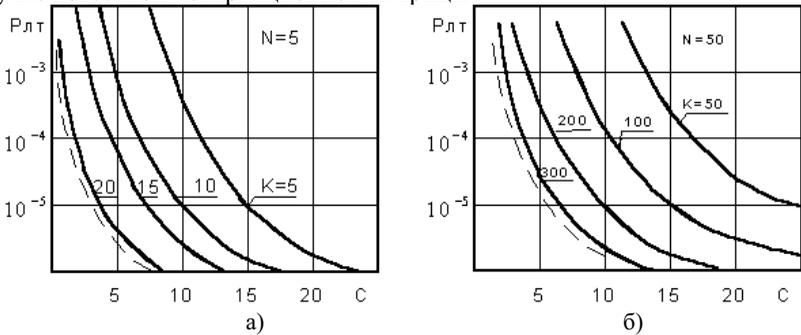


Рис. 4. Зависимости вероятности ложной тревоги от порога обнаружения при размере обрабатываемой выборки N : а – $N = 5$; б – $N = 50$.

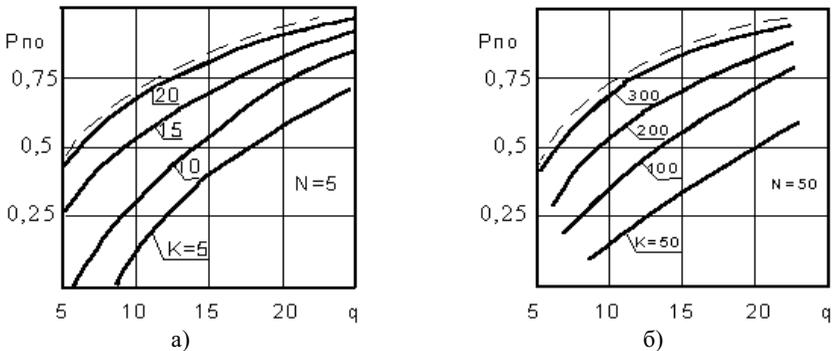


Рис.5. Зависимости вероятности обнаружения сигнала от отношения сигнал/помеха q при вероятности ложной тревоги: а – $P_{лт} = 10^{-2}$; б – $P_{лт} = 10^{-5}$.

Результаты расчетов вероятности правильного обнаружения $P_{по}$ сигнала от отношения сигнал/помеха q приведены на рис 5а и на рис 5б соответственно для различных значений ложной тревоги.

Выводы.

Получены расчетные соотношения по выбору порогового уровня, стабилизирующего вероятность ложной тревоги адаптивного обнаружителя в условиях неизвестных параметров помеховой обстановки. Также определены требования к объему обучающей выборки, обеспечивающему заданные вероятностные показатели качества обнаружения.

Анализ эффективности показал, что для достижения потерь менее 3 дБ в отношении сигнал/помеха необходимо $k > 4N$ векторов обучающей выборки при $P_{по} = 0,5$ и диапазоне ложных тревог $P_{лт} = 10^{-5}, \dots, 10^{-2}$.

1. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию: Пер. с англ./ Под ред. В.А. Лексаченко. - М.: Радио и связь, 1986.- 448с.
2. Орлов В.В., Положаенко С.А. Вероятностные характеристики адаптивного алгоритма компенсации помех при дополнительных линейных ограничениях // Электронное моделирование. 2004. -№ 6. –С.113-119.
3. Nitzberg R. Detection Loss of the Sample Matrix Inversion Technique. IEEE Trans. 1984,v.AES-20, N 6, p.p. 824-827.
4. Проскурин В.И. Квадратичные фильтры для обнаружения неизвестного сигнала на фоне коррелированной помехи // Радиотехника и электроника. -1992. –Т.37. -№7. - С.1227-1235.
5. Аверочкин В.А. Рекуррентное формирование статистики Хотеллинга // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2003. –№4. –С. 74-76.
6. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. -М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.
7. Справочник по специальным функциям.: Пер. с англ. / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. - М.: Наука,1979.- 832с.
8. Siotani M., Hayakawa T., Fujikoshi Y. Modern Multivariate Statistical Analysis: A Graduate Course and Handbook. – Columbus, Ohio ASP, 1985. –700 p.

Поступила 20.10.2010р.