УДК 531.38

©2010. **Е.А. Игнатова**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ

В работе продолжены начатые в [1] исследования свойств решений уравнений Кирхгофа–Пуассона при условиях существования одного линейного инвариантного соотношения. Рассмотрен случай, когда характерный параметр μ_0 равен нулю, а многочлен, определяющий зависимость угла нутации от времени, имеет кратные корни. Указана явная зависимость основных переменных задачи от времени.

Ключевые слова: *уравнения Кирхгофа–Пуассона; движение гиростата; первый интеграл; метод инвариантных соотношений.*

Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, используя обозначения работы [1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — переменная составляющая момента количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\, \nu_2,\, \nu_3)$ — единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)$ — гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $a = (a_{ij})$ — гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$ — постоянная симметричная матрица третьего порядка, определяющая гироскопические силы; $C = (C_{ij})$ — постоянная симметричная матрица третьего порядка, характеризующая потенциальные силы. Точка над переменными означает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы:

$$\mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k. \tag{3}$$

Здесь E и k — произвольные постоянные.

Следуя работам [1–3], поставим задачу об интегрировании уравнений (1), (2) при условии существования у этих уравнений одного линейного инвариантного соотношения

$$x_1 - (g_0 + g_1\nu_1 + g_2\nu_2 + g_3\nu_3) = 0, \tag{4}$$

где $g_i \left(i = \overline{0, 3}\right)$ — постоянные, подлежащие определению. Для уравнений движения тела в жидкости [3] в полной мере решена только первая часть задачи интегрирования уравнений (1), (2), а именно, определены условия существования соотношения (4). Решение второй части данной задачи указано при

$\lambda = 0,\ s = 0$ С.А. Чаплыгиным [2], при $\lambda = 0,\ s \neq 0$, П.В. Харламовым [3] и при $\lambda \neq 0,\ s \neq 0$ в [1] при $\mu_0 > 0$ (μ_0 — некоторый характерный параметр, значение которого будет указано ниже).

На основе метода инвариантных соотношений [4] условия существования инвариантного соотношения (4) у уравнений (1), (2) с интегралами (3) записаны в [1] формулами $(6)^{*}$ [1] в предположении, что $a_{13} \neq 0$.

Для интегрирования системы (1), (2) при наличии инвариантного соотношения (4) из интегралов (3) можно определить x_2 и x_3 в зависимости от $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = \frac{1}{a_{22}\left(1-\nu_1^2\right)}\left[a_{22}\nu_2 q\left(\nu_1\right) + \nu_3\sqrt{\Delta\left(\nu_1\right)}\right],\\
&x_3 = \frac{1}{a_{22}\left(1-\nu_1^2\right)}\times\\
&\times\left[a_{22}\nu_3 q\left(\nu_1\right) - a_{13}(1-\nu_1^2)\left(g_0+g_1\nu_1+g_2\nu_2+g_3\nu_3\right) - \nu_2\sqrt{\Delta\left(\nu_1\right)}\right],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&q\left(\nu_1\right) = k + \frac{1}{2}B_{22} - \left(\lambda_1+g_0\right)\nu_1 + \frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)\nu_1^2,\\
&\Delta\left(\nu_1\right) = d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_1^2 + d_3\nu_1^3 + d_4\nu_1^4,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$d_i,\ (i=\overline{0,4})$ определены формулами $(10)^{*}$.

В работе [1] уравнения, вытекающие из (2), с помощью переменных $\theta,\ \varphi$, введенных вместо ν_i по формулам

$$
\nu_1 = \cos\theta, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi, \tag{7}
$$

сведены к системе двух уравнений:

$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}}{\sin\theta}, \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_{22}\sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}\sin\theta d\varphi + [\varepsilon_0\sin^3\theta\cos\varphi + \left(\beta_0+\beta_1\cos\theta+\beta_2\cos^2\theta\right)\sin\theta\sin\varphi +\\
&+ \gamma_0 + \gamma_1\cos\theta + \gamma_2\cos^2\theta + \gamma_3\cos^3\theta - a_{13}\sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}\sin\theta\cos\varphi]\,d\theta = 0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\varepsilon_0,\ \beta_i,\ \gamma_j,\ (i=\overline{0,2},\ \ j=(\overline{0,3})$ – некоторые параметры, выраженные через первоначальные параметры задачи в [1].

В [1] показано, что система (8), (9) допускает интегрирующий множитель

$$
M\left(\varphi,\ \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}\left(f_1\left(\theta\right)\sin\varphi + f_2\left(\theta\right)\cos\varphi + f_3\left(\theta\right)\right)}, \tag{10}
$$

где $$f_1(\theta) = P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos^2\theta,$$

$$
f_2\left(\theta\right) = \sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}, \qquad f_3\left(\theta\right) = \left(Q_0 + Q_1\cos\theta\right)\sin\theta,
$$

[1] Знак * над номером формулы обозначает нумерацию формул из работы [1].

а P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 определены в [1] формулами (28)*–(30)*. При этом необходимо выполнение следующих условий на параметры:

$$a_{12} = a_{23} = 0,\;\; a_{22} = a_{33},\;\; s_2 = 0,\;\; C_{12} = 0,\;\; C_{23} = 0, \varepsilon_0 = 0, B_{12} = 0, B_{23} = 0,$$

$$\lambda_2 = 0,\;\; g_0 = \frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}},\;\; g_1 = -\frac{1}{2}\left(B_{22} + B_{33}\right),\;\; g_2 = 0,\;\; g_3 = \frac{a_{22}}{2a_{13}}\;\left(B_{22} - B_{33}\right),$$

$$B_{13} = \frac{1}{2a_{13}a_{22}}\left[B_{22}\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right) + B_{33}\left(a_{13}^2 - a_{22}^2\right)\right],$$

$$s_3 = \frac{\lambda_3 a_{22}}{2a_{13}^2}\left(B_{22} - B_{33}\right)\left(a_{11}a_{22} - a_{13}^2\right),\;\; C_{13} = \frac{1}{4a_{13}}\left(B_{22}^2 - B_{33}^2\right)\left(a_{11}a_{22} - a_{13}^2\right),$$

$$C_{22} - C_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{13}^2}{4a_{13}^2}\left[a_{22}(B_{22} - B_{33})^2\right], \tag{11}$$

$$C_{22} - C_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{13}^2}{4a_{13}^2\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)}[a_{11}a_{13}^2(B_{22} + B_{33})^2 + a_{11}a_{22}^2(B_{22} - B_{33})^2 -$$

$$-4a_{13}^2 a_{22} B_{11} B_{22}],$$

$$s_1 = \frac{a_{22}\left(a_{11}a_{22} - a_{13}^2\right)}{2a_{13}^3\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)}\;\left\{a_{13}\lambda_1\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)\left(B_{22} - B_{33}\right) + \lambda_3[2a_{13}^2 a_{22} B_{11} +\right.$$

$$\left. + \left(a_{22} - a_{11}\right)\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)B_{22} - \left(a_{13}^2\left(a_{11} + a_{22}\right) + a_{22}^2\left(a_{22} - a_{11}\right)\right)B_{33}]\right\}.$$

Отметим, что условия $a_{12} = a_{23} = 0,\;\; a_{33} = a_{22}$ означают, что координатная ось, относительно которой задано инвариантное соотношение (4), ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида. Заметим, что в случае Гесса–Сретенского [5] этой оси принадлежит центр масс гиростата.

Так как (10) – интегрирующий множитель для (9), то уравнение (9) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial V\left(\varphi,\;\theta\right)}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial V\left(\varphi,\;\theta\right)}{\partial\theta}d\theta = 0, \tag{12}$$

где

$$\frac{\partial V\left(\varphi,\;\theta\right)}{\partial\varphi} = a_{22}(f_1\left(\theta\right)\sin\varphi + f_2\left(\theta\right)\cos\varphi + f_3\left(\theta\right))^{-1}\sin\theta, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V\left(\varphi,\;\theta\right)}{\partial\theta} &= [\left(\beta_0 + \beta_1\cos\theta + \beta_2\cos^2\theta\right)\sin\theta\sin\varphi + \\ &+\gamma_0 + \gamma_1\cos\theta + \gamma_2\cos^2\theta + \gamma_3\cos^3\theta - a_{13}\sqrt{\Delta\left(\cos\theta\right)}\sin\theta\cos\varphi] \times \\ &\times(f_1\left(\theta\right)\sin\varphi + f_2\left(\theta\right)\cos\varphi + f_3\left(\theta\right))^{-1}(\Delta\left(\cos\theta\right))^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Из уравнения (13) имеем

$$V(\theta,\ \varphi) = a_{22} \int \frac{\sin\theta d\varphi}{f_1(\theta)\sin\varphi + f_2(\theta)\cos\varphi + f_3(\theta)} + F(\theta). \tag{15}$$

Введем обозначение

$$\alpha(\theta) = \arcsin\frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)} \tag{16}$$

и далее будем рассматривать случай, когда

$$f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta) = f_3^2(\theta). \tag{17}$$

Равенство (17) выполняется, если

$$d_0 = Q_0^2 - P_0^2, \tag{18}$$

а это соответствует случаю $\mu_0 = 0$ работы [1]. Отметим, что в [1] проведено исследование случая $\mu_0 > 0$.

Заметим, что уравнение (8) интегрируется независимо от уравнения (9).

Решением уравнения (12) является и $V(\varphi,\theta) = \mathrm{const}$. Если такое решение удастся получить из (15), то можно будет полностью решить задачу интегрирования системы (8), (9), а вместе с этим, в силу (4), (5), (7), проинтегрировать и исходные уравнения (1), (2).

Исследование случая $f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta) = f_3^2(\theta)$. Из соотношения (18) и обозначений (11), (10)* можно найти зависимость постоянной интеграла энергии E от постоянной интеграла площадей k и параметров задачи:

$$E = -\frac{1}{2a_{22}}\left[\frac{2a_{22}^2}{a_{13}^2 + a_{22}^2}\left(a_{22}^2 B_{11} + \left(a_{13}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{22}\right) B_{33}\right) k + R\right], \tag{19}$$

где

$$R = \frac{a_{22}^2}{\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)^2} B_{33}^2 \left(a_{13}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{22}\right)^2 + \frac{a_{22}^6}{\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)^2} B_{11}^2 - a_{22}C_{22} +$$

$$+ \frac{a_{22}^4}{a_{13}^2 + a_{22}^2} B_{11}B_{22} + \frac{a_{22}^2\left(a_{13}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{22}\right)}{\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)^2} B_{33}\left(2a_{22}^2 B_{11} + \left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right) B_{22}\right) -$$

$$- \frac{2a_{22}^3}{a_{13}^3}\lambda_1\lambda_3\left(a_{13}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{22}\right) - \frac{a_{22}^4}{a_{13}^2}\lambda_1^2 - \frac{a_{22}^3}{a_{13}^4}\lambda_3^2 \times$$

$$\times \Big(a_{22}(a_{22} - a_{11})^2 + a_{13}^2\left(2a_{22} - a_{11}\right)\Big).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае из двух постоянных первых интегралов (3) произвольной остается одна, к примеру, k. Кроме того, так как выполняется равенство (17), то из (15) с учетом (16) имеем

$$V(\theta,\varphi)=\frac{a_{22}}{Q_0+Q_1\cos\theta}\mathrm{tg}\frac{\varphi-\alpha\left(\theta\right)}{2}+f\left(\cos\theta\right), \tag{20}$$

а $f(\cos\theta)$ находится подстановкой (20) в (14):

$$f\left(\cos\theta\right)\equiv f\left(\nu_1\right)=\int\frac{\left(\delta_0+\delta_1\nu_1+\delta_2\nu_1^2\right)d\nu_1}{\sqrt{\Delta\left(\nu_1\right)}\left(Q_0+Q_1\nu_1\right)^2}, \tag{21}$$

где

$$\delta_0=a_{13}Q_0^2-a_{22}P_0Q_1,\ \ \delta_1=Q_1\left(2a_{13}Q_0-a_{22}P_1\right),\ \ \delta_2=Q_1\left(a_{13}Q_1-a_{22}P_2\right).$$

Полагая $V(\varphi,\theta)=C=\mathrm{const}$, из (20) приходим к равенству

$$\frac{a_{22}}{Q_0+Q_1\cos\theta}\mathrm{tg}\frac{\varphi-\alpha\left(\theta\right)}{2}+f\left(\cos\theta\right)=C. \tag{22}$$

Тогда из соотношения (22) определим

$$\varphi\left(\theta\right)=2\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{a_{22}}\Phi(\theta)\right)+\alpha\left(\theta\right), \tag{23}$$

где

$$\Phi\left(\theta\right)=\left(Q_0+Q_1\cos\theta\right)\left(C-f\left(\cos\theta\right)\right). \tag{24}$$

В формулах (20), (22)–(24) предполагается, что зависимость $\theta=\theta(t)$ определена из интеграла (8).

Покажем действительность решения $\theta=\theta(t)$ уравнения (8). Для этого рассмотрим выражение d_0 из формулы (18). Потребуем выполнения неравенства $d_0>0$. Тогда из (18) вытекает, что величина k изменяется в промежутке $\left(k^{(1)},\ k^{(2)}\right)$, где $k^{(1)}=\min\left\{k^{(3)},\ k^{(4)}\right\}$, $k^{(2)}=\max\left\{k^{(3)},\ k^{(4)}\right\}$. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}k^{(3)}&=-\frac{Q_0}{a_{22}}-\frac{1}{2\left(a_{13}^2+a_{22}^2\right)}\times\\&\times\left[2a_{22}^2B_{11}+\left(a_{13}^2+a_{22}^2\right)B_{22}+2\left(a_{13}^2+a_{22}^2-a_{11}a_{22}\right)B_{33}\right],\\k^{(4)}&=\frac{Q_0}{a_{22}}-\frac{1}{2\left(a_{13}^2+a_{22}^2\right)}\times\\&\times\left[2a_{22}^2B_{11}+\left(a_{13}^2+a_{22}^2\right)B_{22}+2\left(a_{13}^2+a_{22}^2-a_{11}a_{22}\right)B_{33}\right].\end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку в формулах (25) от величин $\lambda_1,\ \lambda_3$ зависит только Q_0, то выбором значений этих параметров можно добиться выполнения неравенства

$d_0 > 0$. Это значит, что $\Delta(0)$, где $\Delta(\nu_1)$ выражается формулой из (6), принимает положительное значение и обращение интеграла

$$\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{\Delta(\nu_1)}} = -(t - t_0) \tag{26}$$

приводит к действительной функции $\nu_1 = \nu_1(t)$.

Исходя из соотношений (7), принимая во внимание формулы (23), (24), выпишем $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$:

$$\begin{gathered}
\nu_1 = \cos\theta, \\
\nu_2 = \frac{\left(a_{22}^2 - \Phi^2(\theta)\right)\sqrt{\Delta(\cos\theta)} - 2a_{22}\Phi(\theta)\left(P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos^2\theta\right)}{(Q_0 + Q_1\cos\theta)\left(a_{22}^2 + \Phi^2(\theta)\right)}, \\
\nu_3 = \frac{2a_{22}\Phi(\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)} + \left(a_{22}^2 - \Phi^2(\theta)\right)\left(P_0 + P_1\cos\theta + P_2\cos^2\theta\right)}{(Q_0 + Q_1\cos\theta)\left(a_{22}^2 + \Phi^2(\theta)\right)}.
\end{gathered} \tag{27}$$

Используя формулы (27), компоненты момента количества движения гиростата можно определить из (4), (5).

Случай кратных корней уравнения $\boldsymbol{\Delta(\nu_1) = 0}$. Рассмотрим случай, когда уравнение $\Delta(\nu_1) = 0$ имеет кратные корни. Запишем выражения для $\Delta(\nu_1)$ из (6) в виде

$$\Delta(\nu_1) = d_4\Big(\nu_1 + \frac{A}{2}\Big)^3\left(\nu_1 - \nu_1^{(1)}\right), \tag{28}$$

Равенство (28) в силу (6) выполняется при условиях

$$\begin{gathered}
d_0 = -\frac{A^3}{8}\nu_1^{(1)}d_4, \qquad d_1 = \frac{A^2 d_4}{8}(A - 2\nu_1^{(1)}), \\
d_2 = \frac{3}{4}A(A - 2\nu_1^{(1)})d_4, \qquad d_3 = d_4\Big(\frac{3}{2}A - \nu_1^{(1)}\Big).
\end{gathered} \tag{29}$$

Приведем примеры выполнения равенств (29). В первом примере будем считать, что $A = 0$, $\nu_1^{(1)} = -d_3/d_4$. Эти условия реализуются при следующих ограничениях на параметры задачи:

$$k = k^{(3)},$$

$$\begin{gathered}
B_{11} = \frac{1}{2a_{13}^2a_{22}^2}[\pm 2(a_{13}^2 + a_{22}^2)(a_{13}\lambda_1 + a_{22}\lambda_3)a_{22} + (a_{11}a_{22} - a_{13}^2)\times \\
\times(a_{13}^2 + a_{22}^2)B_{22} + (a_{11}a_{22}(a_{13}^2 - a_{22}^2) - a_{13}^2(a_{13}^2 + a_{22}^2))B_{33}],
\end{gathered}$$

$$B_{22}=\frac{a_{13}^2+a_{22}^2}{a_{22}^2-a_{13}^2}B_{33}\pm$$

$$\pm\frac{2a_{22}}{\left(a_{13}^2-a_{22}^2\right)\left(a_{13}^2-a_{11}a_{22}\right)\left(a_{13}a_{22}\lambda_1+\left(a_{13}^2+a_{22}^2-a_{11}a_{22}\right)\lambda_3\right)}\times$$

$$\times\left[a_{22}a_{13}^2\lambda_1^2-a_{22}^2\lambda_3^2\left(a_{11}\left(a_{13}^2+a_{22}^2-a_{11}a_{22}\right)-2a_{22}a_{13}^2\right)-\right.$$

$$\left.-a_{13}\lambda_1\lambda_3\left(\left(a_{13}^2-a_{11}a_{22}\right)\left(a_{13}^2+a_{22}^2\right)+2a_{13}^2a_{22}^2\right)\right].$$

Ниже будут приведены другие примеры выполнения условий (29). Введем вместо переменной ν_1 переменную y:

$$\nu_1=\frac{1}{y}-\frac{A}{2}. \tag{30}$$

Тогда из формулы (26) имеем:

$$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y(\frac{A}{2}+\nu_1^{(1)})-1}}=\sqrt{-d_4}(t-t_0). \tag{31}$$

Запишем результат интегрирования (31), выполнив при этом обратную замену переменной от y к ν_1:

$$\nu_1=-\frac{A}{2}+\frac{4C_1}{4-d_4C_1^2(t-t_0)^2}, \tag{32}$$

где $C_1=\dfrac{A}{2}+\nu_1^{(1)}$.

Для того, чтобы выписать решение исходной задачи, необходимо найти зависимость $f(\cos\theta)$ из (21). Выполним в интеграле (21) сначала замену (30), а затем перейдем от переменной y к переменной z следующим образом:

$$z^2=C_1y-1. \tag{33}$$

Тогда интеграл (21) примет вид:

$$f(z)=-\frac{2}{\sqrt{-d_4}C_1}\int\frac{m_0z^4+m_1z^2+m_2}{(m_3+m_4z^2)^2}\,dz, \tag{34}$$

где

$$m_0=\delta_0-\delta_1\frac{A}{2}+\delta_2\frac{A^2}{4},\quad m_1=2\delta_0+\delta_1\left(\nu_1^{(1)}-\frac{A}{2}\right)-\delta_2A\nu_1^{(1)},$$

$$m_2=\delta_0+\delta_1\nu_1^{(1)}+\delta_2(\nu_1^{(1)})^2,\quad m_3=Q_0+Q_1\nu_1^{(1)},\quad m_4=Q_0-\frac{A}{2}Q_1.$$

Значение $f(z)$ из (34) зависит от коэффициентов m_i подынтегрального выражения. Возможны различные случаи. Выпишем решение исходной задачи (1), (2) для некоторых из этих случаев.

Случай $A = 2Q_0/Q_1$. Тогда из (29) находим

$$\nu_1^{(1)} = \frac{3Q_0}{Q_1} - \frac{d_3}{d_4}, \tag{35}$$

а из (32) –

$$\nu_1\left(t\right) = -\frac{Q_0}{Q_1} + \frac{Q_0 Q_1^2 + 2Q_0 P_2^2 - Q_1 P_1 P_2}{8\bigl(Q_0 Q_1^2 + 2Q_0 P_2^2 - Q_1 P_1 P_2\bigr)^2 (t-t_0)^2 + 2Q_1^2\left(Q_1^2 + P_2^2\right)}. \tag{36}$$

Зависимость остальных двух компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$ от времени получаем подстановкой в (27) выражения (36):

$$\begin{aligned} \nu_2 &= \frac{\left(a_{22}^2 - \varPhi^2\left(t\right)\right)\sqrt{\Delta\left(t\right)} - 2a_{22}\varPhi\left(t\right)R_1(t)}{W(t)}, \\ \nu_3 &= \frac{2a_{22}\varPhi\left(t\right)\sqrt{\Delta\left(t\right)} + \left(a_{22}^2 - \varPhi^2\left(t\right)\right)R_1(t)}{W(t)}, \end{aligned} \tag{37}$$

где $R_1(t) = P_0 + P_1\nu_1\left(t\right) + P_2(\nu_1\left(t\right))^2$, $W(t) = \left(Q_0 + Q_1\nu_1\left(t\right)\right)\left(a_{22}^2 + \varPhi^2\left(t\right)\right)$,

$$\sqrt{\Delta\left(t\right)} = \left|\frac{8C_1(d_3 Q_1 - 4d_4 Q_0)^2\left(t-t_0\right)}{d_4 Q_1^2\Bigl(d_4 C_1^2 (t-t_0)^2 - 4\Bigr)^2}\right|. \tag{38}$$

Из (34) находим $f\left(z\right)$, затем переходим от переменной z к переменной y, а от y к t соответственно, тогда

$$f(t) = -\frac{1}{m_3^2}(m_2(t-t_0) + m_5(t-t_0)^3 + m_6(t-t_0)^5) + \mathrm{const}, \tag{39}$$

где $$m_5 = -m_1 d_4 C_1^2/\,12; \qquad m_6 = m_0 d_4^2 C_1^4/\,80.$$

Компоненты x_1, x_2, x_3 вектора момента количества движения гиростата можно получить подстановкой ν_1, ν_2 и ν_3 из соотношений (36), (37) в формулы (4) и (5):

$$\begin{aligned} x_1 &= g_0 + g_1\nu_1(t) + \frac{g_3(2a_{22}\varPhi\left(t\right)\sqrt{\Delta\left(t\right)} + \left(a_{22}^2 - \varPhi^2\left(t\right)\right)R_1(t))}{W(t)}, \\ x_2 &= \frac{\left(a_{22}^2 - \varPhi^2\left(t\right)\right)\sqrt{\Delta\left(t\right)}\xi + 2a_{22}\varPhi\left(t\right)P(t)}{a_{22}W(t)}, \\ x_3 &= \frac{2a_{22}\varPhi\left(t\right)\sqrt{\Delta\left(t\right)}(\xi - a_{13}g_3) - \left(a_{22}^2 - \varPhi^2\left(t\right)\right)\left(P(t) + a_{13}g_3 R_1(t)\right)}{a_{22}W(t)} - \\ &\quad - \frac{a_{13}}{a_{22}}(g_0 + g_1\nu_1(t)), \end{aligned} \tag{40}$$

где $$\xi = -\frac{a_{22}}{a_{13}^2 + a_{22}^2}(a_{22}^2 B_{11} + (a_{13}^2 + a_{22}^2 - a_{11}a_{22})B_{33}),$$

$$P(t) = (Q_0 + Q_1\nu_1(t))^2 - \xi R(t),$$

а значения $\sqrt{\Delta(t)}$, $\varPhi(t)$ и $f(t)$ указаны в (38), (24) и (39).

Данное решение существует, если при $a_{13} \neq 0$ выполняются условия (11), (19) и

$$d_0 = \frac{Q_0^2}{Q_1^3}(4d_3Q_0 - Q_1d_2), \qquad d_1 = \frac{Q_0}{Q_1^2}\left(7d_3Q_0 - \frac{4}{3}Q_1d_2\right),$$

$$d_4 = \frac{Q_1}{3Q_0^3}(Q_1d_2 - 3d_3Q_0).$$

Примером выполнения этих условий может служить следующий:

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad \nu_1^{(1)} = -\frac{49}{76},$$

$$k = \frac{4\sqrt{15}a_{13}a_{22} - 15\left(a_{13}^2 - a_{22}^2\right)}{480\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)}B_{11}, \quad a_{11} = \frac{1}{2a_{22}}\left(a_{13}^2 + a_{22}^2 + \frac{4\sqrt{15}}{15}a_{13}a_{22}\right),$$

$$B_{33} = -B_{11}, \qquad \lambda_1 = \frac{\sqrt{15}a_{13}a_{22}}{30\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)}B_{11}, \qquad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{15}a_{13}^2B_{11}}{30\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)},$$

$$B_{22} = \frac{15\left(a_{13}^2 - a_{22}^2\right) - 4\sqrt{15}a_{13}a_{22}}{15\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)}B_{11}.$$

Случай $m_3m_4 > 0$. В этом случае

$$\nu_1^{(1)} = \frac{3}{2}A - \frac{d_3}{d_4}, \tag{41}$$

причем параметры задачи зависят от A следующим образом:

$$d_0 = -\frac{3d_4}{16}A^4 + \frac{A^3}{8}d_3, \quad d_1 = A^2\left(-d_4A + \frac{3}{4}d_3\right), \quad d_2 = \frac{3}{2}A(-Ad_4 + d_3),$$
$$(2Q_0 - Q_1A)\left(Q_0 + Q_1\left(\frac{3}{2}A - \frac{d_3}{d_4}\right)\right) > 0. \tag{42}$$

При этих условиях из интеграла (34) с учетом (33), (31) находим

$$f(t) = -\frac{m_0}{m_4^2}(t - t_0) + \\ + \frac{m_9(t - t_0)}{4m_3 - d_4C_1^2m_4(t - t_0)^2} + m_7 \operatorname{arctg}(m_8(t - t_0)) + \mathrm{const}, \tag{43}$$

где $$m_7 = -\frac{m_2 m_4^2 + m_1 m_3 m_4 - 3 m_0 m_3^2}{\sqrt{-d_4} C_1 m_4^2 m_3 \sqrt{m_3 m_4}}, \qquad m_8 = \frac{\sqrt{-d_4} C_1}{2} \sqrt{\frac{m_4}{m_3}},$$

$$m_9 = -2 \frac{m_2 m_4^2 + m_0 m_3^2 - m_1 m_3 m_4}{m_3 m_4^2}.$$

Учитывая выполнение равенства (41), из (32) получаем

$$\nu_1(t) = -\frac{A}{2} + \frac{4(2Ad_4 - d_3)}{\left(4d_4 - (2Ad_4 - d_3)^2 (t - t_0)^2\right)}, \tag{44}$$

зависимость остальных двух компонент вектора $\boldsymbol{\nu}(t)$ от времени находим подстановкой (37), (44) в соотношения (43). При этом

$$\sqrt{\Delta(t)} = \left| \frac{8 d_4^2 (2Ad_4 - d_3)^3 (t - t_0)}{\left(4d_4^2 - d_4 (t - t_0)^2 (2Ad_4 - d_3)^2\right)^2} \right|. \tag{45}$$

Компоненты x_1, x_2, x_3 вектора момента количества движения гиростата задаются формулами (40) при подстановке в них (43)–(45).

Данное решение существует при $a_{13} \neq 0$ и выполнении условий (11), (19), (42). Например, при

$$\nu_1^{(1)} = -\frac{49}{76}, \quad A = -\frac{1}{2},$$

$$B_{33} = -B_{11}, \qquad B_{22} = \frac{2\left(a_{13}^2 - a_{11} a_{22}\right)}{a_{13}^2 + a_{22}^2} B_{11}, \qquad \lambda_1 = -\frac{a_{22}}{a_{13}} \lambda_3,$$

$$\lambda_3 = -\frac{64\sqrt{15} a_{13}^2}{135\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)} B_{11}, \qquad a_{11} = \frac{1}{2a_{22}} \left(a_{13}^2 + a_{22}^2 + \frac{2\sqrt{15}}{135} a_{13} a_{22} \right),$$

$$k = \frac{-11\left(135\left(a_{13}^2 - a_{22}^2\right) - 2\sqrt{15} a_{13} a_{22}\right)}{1620\left(a_{13}^2 + a_{22}^2\right)} B_{11}.$$

Итак, в дополнение к [1] установлена возможность интегрирования в элементарных функциях уравнений Кирхгофа–Пуассона (1), (2) в случае одного линейного инвариантного соотношения и при $\mu_0 = 0$.

1. *Узбек Е.К., Данилейко Е.А.* Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 87–94.
2. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Собр. соч. Т. 1.: Теор. механика. Математика. – М.;Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 312–336.
3. *Харламов П.В.* О линейном интеграле уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости // Тр. Донецк. индустриального ин-та. – 1957. – **20**, вып. 1 – С. 51–67.

4. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
5. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. – 1963. – **149**, № 2. – С. 292–294.

K.A. Ignatova

Integration of Kirchhoff-Poisson's equations in case of linear invariant relation

The paper continues studying properties of solutions of Kirchhoff–Poisson's equations when they have one linear invariant relation, started in [1]. To be considered the case when typical parameter μ_0 is equal to zero and polynomial defining dependence on time of the angle of nutation has multiple roots. It is pointed out an explicit dependence of time of basic variables.

Keywords: *Kirchhoff–Poisson's equations; moving of the gyrostat; the first integral, the method of invariant relation.*

К.А. Ігнатова

Інтегрування рівнянь Кірхгофа–Пуассона у випадку лінійного інваріантного співвідношення

У роботі продовжено розпочаті в [1] дослідження властивостей розв'язків рівнянь Кірхгофа–Пуассона за умов існування у них одного лінійного інваріантного співвідношення. Розглянуто випадок, коли характерний параметр μ_0 дорівнює нулю, а многочлен, що визначає залежність кута нутації від часу, має кратні корені. Вказано явну залежність основних змінних від часу.

Ключові слова: *рівняння Кірхгофа–Пуассона; рух гіростату; перший інтеграл; метод інваріантних співвідношень.*

Национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк
katerina-ignat@rambler.ru

Получено 10.07.10