ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2010. Вып. 40

УДК 539.3

©2010. **Н.А. Гук, Н.И. Ободан**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассматривается задача идентификации механических свойств материала по результатам измерений параметров остаточного деформирования. Предлагается определять неизвестные характеристики материала из решения обратной коэффициентной задачей теории оболочек в условиях динамического упруго-пластического деформирования. Процедура декомпозиция вектора параметров осуществляет регуляризацию задачи и позволяет выделить доминирующие компоненты вектора параметров при его идентификации.

Ключевые слова: *критерий идентификации, механические свойства материала, обратная коэффициентная задача.*

Введение. Надежность работы тонкостенных элементов конструкций существенно зависит от качества применяемых при их изготовлении материалов. Для контроля основных характеристик металлов могут быть использованы как экспериментальные, основанные на различных физических эффектах, возникающих при взаимодействии внешних полей с материалом [1, 2], так и теоретические методы, использующие аппарат обратных задач и позволяющие в автоматическом режиме выполнять процедуру идентификации свойств материала реальной тонкостенной системы по измеренным в эксперименте величинам. Имеющиеся в литературе постановки задач дают возможность определять отдельные характеристики материала, например модуль упругости, на основе данных об измерениях полей смещений или ускорений на границе тела в установившемся режиме колебаний [3]. Однако наибольший интерес представляет идентификация параметров, позволяющая построить обобщенную кривую деформирования и описать свойства материала во всем диапазоне испытываемых нагрузок, вызывающих как упругое, так и пластическое деформирование. Одним из наиболее распространенных методов косвенного определения механических характеристик металла является исследование параметров остаточного деформирования при внедрении индентора в массив материала с использованием эмпирических зависимостей для описания механических свойств. Для определения параметров деформирования материала при внедрении индентора могут быть применены оптоэлектронные методы в сочетании с обработкой результатов измерений на ЭВМ [4]. Основные проблемы, возникающие при исследовании задач такого типа, заключаются в формулировке операторной связи между неизвестными механическими свойствами материала и измеряемыми в эксперименте величинами, а также в выборе параметров, подлежащих измерению. Настоящее исследование посвящено формулировке коэффициентной обратной задачи теории оболочек и разработке метода и алгоритма ее решения.

1. Постановка задачи. Определение механических свойств тонкостенных систем ударным методом является обратной коэффициентной задачей теории оболочек в условиях динамического упруго-пластического деформирования. Для решения такой задачи необходимо сформулировать:

1. математическую модель и метод решения прямой задачи;
2. качественную определенность параметров, подлежащих измерениям;
3. вариационную формулировку задачи о равенстве измеренных в эксперименте и вычисленных, с использованием математической модели прямой задачи, параметров.

В качестве модели прямой задачи с учетом характера деформирования выбрана модель упруго-пластического массива и внедряющегося в него индентора. Необходимо отметить, что метрика, используемая в данной задаче, отлична от регуляризующей метрики для обратных задач теории оболочек [5], она определяется возможностями оптоэлектронных измерений [6]. Указанный способ измерений обеспечивает возможность получить следующие параметры процесса соударения: $w_{\max}$ – максимальное углубление индентора; $\ddot{w}_{\max}$ – максимальное ускорение индентора; t_{soud} – полное время соударения от начала контакта до момента отскока индентора; $w_{\text{ост}}$ – остаточный максимальный прогиб; $a_{\max}$ – величина отпечатка; k – коэффициент восстановления скорости, где $k = \dfrac{V_{\text{отск}}}{V_0}$, $V_{\text{отск}}$ – скорость отскока индентора, V_0 – скорость индентора в момент подлета. Значения этих величин, измеренные в эксперименте, позволяют сформировать вектор параметров процесса соударения

$$W^* = \{W_n^*\} = \{w_{\max}, \ddot{w}_{\max}, t_{\text{соуд}}, w_{\text{ост}}, k, a_{\max}\}.$$

Модель упруго-пластического материала описывается двухзвенной аппроксимацией диаграммы $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, где σ_i – интенсивность напряжений; ε_i – интенсивность деформаций. При значениях $\sigma_i \leqslant \sigma_T$ принимается линейная зависимость $\sigma_i(\varepsilon_i)$, а при $\sigma_i > \sigma_T$ – участок с линейным упрочнением. Линия упрочнения проходит через точки $(\sigma_T, \varepsilon_T)$ и $(\sigma_b, \varepsilon_b)$. Тогда вектор неизвестных параметров задачи, характеризующий механические свойства материала, может быть представлен в виде:

$$\psi = \{\psi_i\} = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \mu, \varepsilon_T, \delta\},$$

где σ_T – предел текучести материала; σ_b – предел прочности материала; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; ε_T – относительная деформация при $\sigma = \sigma_T$; δ – максимальная деформация в момент разрушения. Введенный вектор параметров полностью описывает диаграмму $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. В качестве минимизируемого функционала выберем метрику в Банаховом пространстве L_2:

$$\rho_{L_2}^2 = \|W(\psi) - W^*\|^2, \tag{1}$$

где $W(\psi)$ – вектор параметров процесса соударения, вычисленный в результате решения прямой задачи при заданном векторе ψ; W^* – вектор тех же параметров измеренных в эксперименте. Тогда решение обратной задачи можно определить как

$$\psi = \arg\min_{\psi\in\bar{\psi}} \rho^2_{L_2}(W(\psi), W^*), \qquad W^* \in \bar{W}, \tag{2}$$

где $\bar{\psi}$ – область определения решений; $\bar{W}$ – множество возможных состояний объекта исследования; ρ_{L_2} – метрика в пространстве L_2.

2. Математическая модель. В качестве математической модели прямой задачи, описывающей процесс соударения индентора с упругопластическим материалом, выбрана дискретная модель сплошной среды. Эффективным средством анализа такой задачи является вычислительная технология с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Разрешающая система уравнений МКЭ, описывающая упругопластическое деформирование массива под действием удара со стороны индентора, имеет вид [7]:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + K(t)u(t) = R(t), \tag{3}$$

где M, C, $K(t)$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости, вычисленные в момент времени t, соответственно; $u(t)$ – вектор перемещений узловых точек; $\dot{u}(t)$ – вектор узловых скоростей; $\ddot{u}(t)$ – вектор узловых ускорений; $R(t)$ – вектор внешней нагрузки, приложенный в момент времени t. Дифференциальное уравнение движения индентора при соответствующих начальных условиях имеет вид:

$$\ddot{w}(t) = g + \frac{P(t)}{m}; \qquad w(0) = 0; \qquad \dot{w}(0) = v_0, \tag{4}$$

где $P(t) = 2\pi\int_0^{a(t)} \sigma_Z(r,t)rdr$ – равнодействующая контактных напряжений $\sigma_Z(r,t)$ в момент времени t; $a(t)$ – радиус круговой области контакта в момент времени t; $w(t)$ – осадка индентора в момент времени t; v_0 – скорость подлета индентора; g – ускорение свободного падения. Очевидно, что величина $P(t)$ может быть определена лишь после решения системы дифференциальных уравнений движения упруго-пластического массива. Для решения системы уравнений (3) используется Θ-метод Вилсона [7]. Поскольку одновременное решение системы уравнений (3) и (4) невозможно, организуется итерационный процесс по следующей схеме [8]:

1. задаются начальные значения перемещения, скорости и ускорения индентора в момент времени $t + \Delta\, t$;

2. определяется область контакта в момент времени $t + \Delta, t$, исходя из ее значения в момент времени t; при $t = 0$ область контакта вырождается в точку $(0, 0, 0)$;

3. решается система уравнений (3) для момента времени $t+\Theta\Delta, t$ в предположении, что в области контакта перемещения в направлении z равны соответствующим смещениям точек границы сферического индентора, для массива определяются векторы узловых перемещений $u(t)$, скоростей $\dot{u}(t)$ и ускорений $\ddot{u}(t)$ в момент времени $t+\Delta, t$ согласно Θ-методу Вилсона;

4. уточняются размеры области контакта по полученным значениям перемещений;

5. вычисляются контактные напряжения $\sigma_Z(r, t+\Delta t)$ и равнодействующая $P^{(i)}(t)$ путем интегрирования функции напряжений по области контакта;

6. из решения дифференциального уравнения (4) определяется ускорение индентора $\ddot{w}^{(i+1)}(t+\Delta t)$;

7. выполняется проверка условия сходимости:
   если $|\ddot{w}^{(i+1)}(t+\Delta\, t)-\ddot{w}^{(i)}(t+\Delta\, t)| \leqslant \varepsilon|\ddot{w}^{(i+1)}(t+\Delta\, t)|,\ i \in N$, то прейти к следующему временному шагу и выполнить шаги $1-6$ алгоритма, иначе повторить шаги $2-6$.

Движение по времени осуществляется до тех пор, пока не произойдет отрыв индентора от упруго-пластического массива. Изложенный алгоритм обеспечивает совпадение перемещений, скоростей и ускорений точек упруго-пластического массива и шарового индентора, находящихся в контакте, поскольку для интегрирования по времени как уравнения (4), так и системы (3) используется один и тот же метод. В результате выполнения описанной схемы вычислений получаем вектор параметров процесса соударения $W^* = \{W_n^*\} = \{w_{\max}, \ddot{w}_{\max}, t_{\text{соуд}}, w_{\text{ост}}, k, a_{\max}\}$, который совместно с вектором W^*, полученным в результате измерения этих же параметров в эксперименте, позволяет сформировать вектор невязок, необходимый для вычисления функционала-невязки (1), в виде:

$$\varepsilon(\psi) = \{\varepsilon_n(\psi)\} = \{W_n(\psi) - W_n^*\}.$$

Для выполнения численной минимизации функционала (1) будем использовать метод Ньютона–Раффсона, согласно которому, итерационный процесс отыскания вектора параметров будет иметь вид:

$$\psi^{k+1} = \psi^k - h_k (J''(\psi^k))^{-1} J'(\psi^k), \tag{5}$$

где k – номер шага итерационного процесса; $J''(\psi^k)$ – гессиан функционала (1) в точке ψ^k ; $J'(\psi^k)$ – градиент функционала (1) в точке ψ^k ; h_k – величина шага, которую можно регулировать. Компоненты градиента и гессиана функционала можно представить следующим образом:

$$J'(\psi^k) = \frac{\partial J'(\psi^k)}{\partial \psi_i} = 2\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial \varepsilon_n(\psi^k)}{\partial \psi_i}\right\}\varepsilon_n(\psi^k);$$

$$J''(\psi^k) = 2\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_i}\right\}^T\left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_j}\right\} - 2\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial^2\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_i\partial\psi_j}\right\}\varepsilon_n(\psi^k),$$

где $\varepsilon_n(\psi^k)$ – компоненты вектора невязок $\varepsilon(\psi^k)$; ψ_i, ψ_j – компоненты вектора параметров ψ^k. Замена в гессиане функции $\varepsilon_n(\psi^k)$ на линеаризованную в окрестности текущего значения вектора параметров ψ^k приводит к тому, что второе слагаемое можно положить равным 0. Вводя матричные обозначения, получим разрешающее уравнение для определения вектора неизвестных параметров ψ^k:

$$R(\psi^k)\Delta\psi^k = -G(\psi^k)\varepsilon(\psi^k), \tag{6}$$

где $\Delta\psi^k$ – вектор приращений неизвестных параметров;
$R(\psi^k) = \left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_i}\right\}^T\left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_j}\right\}$; $G(\psi^k) = \left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_j}\right\}^T$, $n = \overline{1,N}$, $i,j = \overline{1,M}$; N, M – количество компонент векторов $\varepsilon(\psi)$, ψ соответственно. Матрица $\left\{\frac{\partial\varepsilon_n(\psi^k)}{\partial\psi_i}\right\}$ строится численно. Индекс k, характеризующий номер шага итерационного процесса (5), в дальнейшем будет опущен. Неизвестный вектор приращений параметров $\Delta\psi$, аналогично [9], представляется в виде двух независимых векторов $\Delta\psi^1$ и $\Delta\psi^2$ размерностей M_1 и M_2 соответственно $M = M_1 + M_2$, при этом вводится предположение, что в вектор $\Delta\psi^1$ помещаются наиболее информативные компоненты вектора $\Delta\psi$, такие, что выполняется условие:

$$\|\Delta\psi - \Delta\psi^1\|_{\Delta\psi^1\in\Delta\psi} \to \min. \tag{7}$$

Для описания векторов $\Delta\psi^1$ и $\Delta\psi^2$ вводятся функции u_j^d ($j = \overline{1,M}$, $d = 1,2$), которые характеризуют принадлежность компонент вектора $\Delta\psi$ векторам $\Delta\psi^1$ и $\Delta\psi^2$:

$$\begin{aligned}
&u^1_{r_1} = \delta(X - X_{r_1});\ r_1 \in I^1,\ I^1 = \{r_{p_1}, \ldots, r_{p_{M_1}}\};\\
&u^2_{r_2} = \delta(X - X_{r_2});\ r_2 \in I^2,\ I^2 = \{r_{k_1}, \ldots, r_{k_{M_2}}\},\\
&I^1 \cap I^2 = \oslash,
\end{aligned}$$

где $\delta(X - X_{r_p})$ – функция Дирака; M_1 и M_2 – заданное число ненулевых компонент векторов $\Delta\psi^1$ и $\Delta\psi^2$ соответственно. Предлагается определять векторы $\Delta\psi^1$ и $\Delta\psi^2$ в параллельных итерационных процессах:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi^1 &= Q_1\varepsilon(\psi);\\
\Delta\psi^2 &= Q_2\varepsilon(\psi),
\end{aligned} \tag{8}$$

где Q_i, $i = 1,2$ – матрицы неизвестных коэффициентов. На каждом шаге итерационного процесса функционал для условия (7) будет иметь вид:

$$J_1(Q_1,Q_2) = \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(\psi) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(\psi) \right)^T \times \\ \times \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon(\psi) - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1(\psi) \right) \to \min, \quad (9)$$

$\varepsilon^1(\psi)$ – невязка, вычисленная при $\psi = \psi^1$. Требуется найти вид оптимальных матриц Q_1, Q_2, обеспечивающих минимизацию функционала (9), при этом необходимо выполнить условия несмещенности и инвариантности оценивания. Эти условия присоединяются к функционалу (9) с использованием множителей Лагранжа:

$$J_2(Q_1,Q_2,\bar{\xi},\bar{\eta}) = J_1(Q_1,Q_2) + \sum_s \bar{\xi}_s g_s + \sum_s \bar{\eta}_s f_s, \quad (10)$$

где $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_s\}$, $\bar{\eta} = \{\bar{\eta}_s\}$ – векторы множителей Лагранжа; $g_s = Q_s R_t$ – условие инвариантности оценивания; $f_s = E_s - Q_s R_s$ – условие несмещенности; $s \longleftrightarrow t$; $s,t = 1,2$; R_s – матрица с ненулевыми элементами, образованная из матрицы $\left\{ \dfrac{\partial \varepsilon_n(\psi^k)}{\partial \psi_i} \right\}$ с учетом принадлежности компонент вектора $\Delta\psi$ векторам $\Delta\psi^s$. Учитывая матричную запись функционала (9) и ограничений, представим (10) в виде:

$$J_2(Q_i,\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i) = \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1 \right)^T \left(\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \varepsilon - \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon^1 \right) + \\ + \xi_{1m}^T R_2^T Q_{1m} + \xi_{2m}^T R_1^T Q_{2m} + [E_{1m}^T - Q_{1m}^T R_1]\, \eta_{1m} + \\ + [E_{2m}^T - Q_{2m}^T R_2]\, \eta_{2m} \to \min, \quad (11)$$

где $\xi_{im} = \{\xi_{im_n}\}^T$, $\eta_{im} = \{\eta_{im_n}\}^T$, $n = \overline{1,N}$ – соответствующие векторные множители Лагранжа; E_{im} – вектор-столбец размерности $M_i \times 1$, у которого на m-й позиции находится элемент 1, а на остальных позициях – 0; $Q_{im} = \{q_{im_n}\}^T$ – вектор-столбец искомых коэффициентов матрицы; $m = \overline{1,M_i}$; $i = 1,2$. Так как функции принадлежности u_m^iкомпонент вектора $\Delta\psi$ векторам $\Delta\psi^i$, $i = 1,2$, ограничены $0 \leqslant u_m^i \leqslant 1$, $m = \overline{1,M_i}$ и множество U представляется в виде $U = \{u_m^i\} = \{(u_1^i, \ldots, u_{M_i}^i) : 0 \leqslant u_m^i \leqslant 1, m = \overline{1,M_i}\}$, то функция $L(u) = \sum\limits_{m=1}^{M_i} J'_{2_{u_m}}(u) u_m^i$ достигает своей нижней грани на U в точке

$u^i = \{u_1^i, \ldots, u_{M_i}^i\}$, где

$$u_m^i = \begin{cases} 1, \ (\xi_{jm}^T R_i^T Q_{jm} - Q_{jm}^T R_j \eta_{jm}) < 0, \\ 0, \ (\xi_{jm}^T R_i^T Q_{jm} - Q_{jm}^T R_j \eta_{jm}) > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Необходимые условия оптимальности для определения матриц Q_1, Q_2 получим, дифференцируя (11) по аргументам Q_{im}, ξ_{im}, η_{im} в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial Q_{im}} = 2PQ_{im} + R_j \xi_{im} - R_i \eta_{im} = [0]_{N \times 1}, \\ \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial \eta_{im}} = E_{im} - R_i^T Q_{im} = [0]_{M_i \times 1}, \\ \dfrac{\partial J_{2m}}{\partial \xi_{im}} = R_j^T Q_{im} = [0]_{M_j \times 1}, \end{cases} \tag{13}$$

где матрица P имеет размерность $N \times N$ и содержит в верхнем левом углу матрицу $M_1 \times M_1$, состоящую из элементов вида $(\varepsilon_i - \varepsilon_i^1)^T (\varepsilon_i - \varepsilon_i^1)$, $i = \overline{1, M_1}$, справа от нее в столбцах с $M_1 + 1$ по N расположены элементы вида $\varepsilon_i \varepsilon_j^1$, $i = \overline{1, M_1}$, $j = \overline{M_1 + 1, N}$, начиная с $M_1 + 1$ строки – элементы вида $\varepsilon_i \varepsilon_j^1$, $i = \overline{M_1 + 1, N}$, $j = \overline{1, N}$. Для сокращения записи дальнейших преобразований введем следующие обозначения: $Z_s = P^{-1} R_s$; $Z_t = P^{-1} R_t$;$\Phi_{ss} = R_s^T P^{-1} R_s$; $\Phi_{tt} = R_t^T P^{-1} R_t$; $\Phi_{st} = R_s^T P^{-1} R_t$; $\Phi_{ts} = R_t^T P^{-1} R_s$, тогда из первого уравнения системы (13) находим:

$$Q_{sk} = 2^{-1} (Z_s \eta_{sk} - Z_t \xi_{sk}). \tag{14}$$

Умножая левую и правую части формулы (14) слева на матрицу R_t^T и учитывая условие инвариантности оценивания, получаем:

$$\xi_{sk} = \Phi_{tt}^{-1} \Phi_{ts} \eta_{sk}. \tag{15}$$

Аналогично, умножая (14) слева на матрицу и учитывая условие несмещенности оценивания, получим:

$$\eta_{sk} = 2\Phi_{ss}^{-1} (E_{sk} + 2^{-1} \Phi_{st} \xi_{sk}). \tag{16}$$

Разрешая уравнения (15) и (16) относительно ξ_{sk}, η_{sk}, получим выражения для определения множителей Лагранжа в явном виде, что дает возможность произвести проверку выполнения условий (12). В случае, когда эти условия не выполняются, необходимо сформировать новый вектор функций принадлежности компонент вектора $\Delta\psi$ векторам $\Delta\psi^s$, $s = 1, 2$. Для искомых оптимальных матриц Q_s имеем

$$Q_s = [\Phi_{tt} Z_s (R_s^T \Phi_{tt} Z_s)^{-1}]_{M_s \times N}; \quad s \neq t; \quad s, t = 1, 2. \tag{17}$$

Окончательные выражения для вычисления компонент вектора приращений параметров $\Delta\psi^s$, $s = 1, 2$ будут иметь вид:

$$[\Delta\psi^s]_{K_s\times 1} = \left[\Phi_{tt} Z_s (R_s^T \Phi_{tt} Z_s)^{-1}\right]_{M_s\times N} [\varepsilon]_{N\times 1}. \qquad (18)$$

Решение (18) позволяет выделить доминирующие компоненты вектора параметров $\psi = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \mu, \varepsilon_T, \delta\}$ при его идентификации.

3. Результаты вычислительного эксперимента. Предложенный подход был применен для идентификации механических свойств металлических образцов. Для подтверждения адекватности построенной математической модели реальному процессу соударения упруго-пластического массива и индентора был проведен вычислительный эксперимент. Для эталонного образца, имеющего геометрические размеры $100 \times 50 \times 10$ мм, изготовленного из стали 3КП с известными механическими свойствами ($\sigma_T = 20.5\,$кГ/мм^2; $\sigma_b = 38.5\,$кГ/мм^2; $E = 2 \cdot 10^4\,$кГ/мм^2; $\mu = 0.3$; $\varepsilon_T = 0.2$; $\delta = 27$) и соударяемого с индентором, было получено решение прямой задачи с использованием алгоритма.

Значения параметров $W^* = \{w_{\max}, \ddot{w}_{\max}, t_{\text{соуд}}, w_{\text{ост}}, k, a_{\max}\}$, полученные из расчета, и результаты измерения этих же параметров на оптоэлектронной установке для разных характеристик индентора (масса и радиус индентора $m = 0.25$кг, $r = 0.005$м, начальная скорость $v_0 = 3$м/с; масса и радиус индентора $m = 0.5$кг, $r = 0.005$м, начальная скорость $v_0 = 5$м/с) приведены в таблице 1. Из полученных данных видно, что относительная погрешность определения параметров задачи с использованием математической модели не превышает 8 процентов для разных характеристик процесса соударения, что подтверждает эффективность разработанной вычислительной схемы расчета.

Для эталонного образца выполнена итерационная процедура определения механических свойств с использованием декомпозиции вектора параметров.

Таблица 1. Сравнение результатов расчета и эксперимента.

	Параметры процесса соударения						Параметры индентора	
	w_{max}	$\ddot{w}_{max}$	$t_{\text{соуд}}$	$w_{\text{ост}}$	k	a_{max}	m	V_0
результат решения прямой задачи	0.1297	$1.10 \cdot 10^5$	102.8	0.0672	0.616	1.6071	0.25	3
результат измерений из эксперимента	0.131	$1.17 \cdot 10^5$	105	0.064	0.620	1.594		
погрешность, %	0.9	5.98	2.09	5	0.64	0.82		
результат решения прямой задачи	0.2384	$1.004 \cdot 10^5$	128	0.1098	0.5986	1.9971	0.5	5
результат измерений из эксперимента	0.251	$0.974 \cdot 10^5$	125	0.117	0.606	2.150		
погрешность, %	5.01	3.09	2.4	6.15	1.22	7.11		

На первом шаге итерационного процесса декомпозиция была выполнена произвольно, вектор параметров $\psi = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \varepsilon_T, \delta\}$ (параметр $\mu = 0.3$) был разделен на два вектора ψ^1 и ψ^2 так, что $M_1 = 3$, $M_2 = 2$. Далее векторы функций принадлежности $u^i = \{u^i_j\}$, $i = 1, 2, u^i_j \in \{0, 1\}$ формировались с учетом выполнения условия (12). Результирующий вектор функций принадлежности определяет вариант декомпозиции вектора параметров. В таблице 2 представлен результат выполнения итерационной процедуры декомпозиции вектора параметров. Для восстановленных векторов ψ^1, ψ^2 введены обозначения $\tilde{\psi}^1$, $\tilde{\psi}^2$ соответственно.

Таблица 2. Результат идентификации механических свойств эталонного образца.

Результат выполнения процедуры декомпозиции								Результат процедуры идентификации							
Результат 1 итерации				Результат 2 итерации				Для вектора ψ^1				Для вектора ψ^2			
ψ^1	u^1	ψ^2	u^2	ψ^1	u^1	ψ^2	u^2	ψ^1	u^1	ψ^1	$\tilde{\psi}^1$	ψ^2	u^2	ψ^2	$\tilde{\psi}^2$
σ_T	1	ε_T	1	σ_T	1	ε_T	0	σ_T	1	20.5	20.76	ε_T	1	0.2	0.2
σ_b	0	δ	0	δ	1	σ_b	0	σ_b	1	38.5	39.021	E	1	$2.0 \cdot 10^4$	$2.083 \cdot 10^4$
E	0	–	–	–	–	E	1	δ	1	27	26.1372	–	–	–	–

Далее с учетом выполненной декомпозиции проводилась идентификация векторов параметров ψ^1 и ψ^2, результат идентификации также представлен в таблице 2. Анализируя полученные результаты, видим, что в вектор ψ^2 помещены параметры E и ε_T, значения которых обычно достаточно стабильны для конкретного материала. Полученные результаты показывают, что относительная погрешность приближения полученных значений параметров к действительным значениям механических свойств эталонного образца составляет не более 5 процентов.

Необходимо отметить, что при проведении вычислительного эксперимента для различных базовых значений параметров диаграммы $\sigma_i(\varepsilon_i)$ были выявлены измеряемые параметры процесса соударения, которые оказывают наибольшее влияние при выполнении идентификации механических свойств. Так для идентификации параметра упругости E удачными измеряемыми параметрами являются максимальное ускорение индентора и время отскока, для параметров $\sigma_T, \sigma_b, \delta$ – максимальное углубление индентора, коэффициент восстановления скорости, остаточный максимальный прогиб.

В таблице 3 приведены результаты восстановления механических свойств образцов, выбранных из различных партий материала. Использовались 3 комплекта образцов, изготовленных из листа стали марки 3 КП, диапазон значений механических свойств которой взят из ГОСТ ($\sigma_T = 20{-}23.5$кГ/мм^2; $\sigma_b = 36 - 46$кГ/мм^2; $E = 1.86 \cdot 10^4 - 2.28 \cdot 10^4$кГ/мм^2; $\mu = 0.3$; $\varepsilon_T = 0.2$; $\delta = 27 - 32$).

Для каждого образца в таблице приведены вектор измерений параметров процесса соударения $W^* = \{w_{\max}, \ddot{w}_{\max}, t_{\text{соуд}}, w_{\text{ост}}, k, a_{\max}\}$ и вектор механи-

Таблица 3. Идентификация механических свойств образцов.

образец I		образец II		образец III	
W_I	ψ_I	W_{II}	ψ_{II}	W_{III}	ψ_{III}
0.205	20.96	0.217	22.88	0.191	20.07
$0.83 \cdot 10^5$	41.32	$0.72 \cdot 10^5$	44.08	$0.94 \cdot 10^5$	37.47
0.636	$2.03 \cdot 10^4$	0.630	$2.19 \cdot 10^4$	0.641	$1.98 \cdot 10^4$
0.075	0.2	0.078	0.2	0.072	0.2
1.73	29.17	1.69	31.89	1.76	26.79
105		110		102	

ческих свойств $\boldsymbol{\psi} = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \varepsilon_T, \delta\}$, полученный в результате выполнения процедуры идентификации. Из анализа полученных результатов идентификации видно, что для всех образцов восстановленные значения параметров принадлежат диапазону, указанному в ГОСТ. Разброс значений механических свойств рассматриваемых образцов находится в пределах 15 процентов при разбросе значений параметров измерения, не превосходящем 12 процентов. Это является достаточным для определения качества одной марки стали в потоке.

Выводы. Задача идентификации механических свойств материала формулируется как обратная коэффициентная задача; вектор $\psi = \{\sigma_T, \sigma_b, E, \varepsilon_T, \delta\}$, характеризующий механические свойства материала может быть восстановлен с использованием декомпозиционного подхода; применение процедуры декомпозиции осуществляет регуляризацию задачи и позволяет выделить доминирующие компоненты вектора параметров при его идентификации; результаты вычислительного эксперимента подтверждает эффективность разработанной процедуры идентификации; относительная погрешность восстановления механических свойств эталонного образца по результатам косвенных измерений составляет не более 5 процентов.

1. *Ермолов И.Н.* Методы и средства неразрушающего контроля качества. – М.: Выс. шк., 1988. – 368 с.
2. *Борисов В.Г., Бугай Н.В., Измаилов Ф.И., Марковец М.П.* Контроль металла в энергетике. – Киев: Техника, 1980. – 134 с.
3. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
4. *Марковец М. П.* Определение механических свойств металлов по твердости. – М.: Машиностроение, 1979. – 191 с.
5. *Гук Н.А., Ободан Н.А., Гавеля Г.М.* Выбор критерия идентификации в обратных задачах теории оболочек // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 123–133
6. *Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.
7. *Bathe K., Wilson E.L.* Numerical method in finite element analysis. – М.: Наука, 1985. – 648 с.

8. *Адлуцкий В. Я., Ободан И. В.* Математическая модель и численный анализ деформирования массивных тел при ударных испытаниях // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Днепропетровск: изд-е ДГУ, 1996. – С. 49–53.
9. *Ободан Н.И., Гук Н.А.* Декомпозиционный подход к решению обратных задач деформирования тонкостенных оболочек и пластин// Вісн. ДНУ, сер. "Механіка". – Днепропетровск: изд-е ДНУ, 2009. – **17**. – № 5. – С. 43–53.

N.A. Guk, N.I. Obodan

Identification of mechanical properties of material on results of indirect measurings

The problem of identification of mechanical properties of material on results measuring of parameters of remaining deformation is considered. Unknown properties of material from the decision of inverse coefficient problem theory of shells are determinated. Procedure the decoupling of vector of parameters is executed in order to regularize problem. The dominant components of a vector of parameters during identification are selected.

Keywords: *identification criterion, mechanical properties of material, inverse coefficient problem.*

Н.А. Гук, Н.І. Ободан

Ідентифікація механічних властивостей матеріалу за результатами непрямих вимірювань

Розглядається задача ідентифікації механічних властивостей матеріалу за результатами вимірювань параметрів залишкової деформації. Пропонується визначати невідомі характеристики матеріалу з розв'язання оберненої коефіцієнтної задачі теорії оболонок в умовах динамічного пружнопластичного деформування. Процедура декомпозиції вектора параметрів здійснює регулярізацию задачі та дозволяє виділити домінуючі компоненти вектора параметрів при його ідентифікації.

Ключові слова: *критерій ідентифікації, механічні властивості матеріалу, обернена коефіцієнтна задача.*

Национальный ун-т им. О. Гончара, Днепропетровск Получено 19.07.10
nguk@farlep.dp.ua