

УДК 533.6.013.42

©2010. Ю.Н. Кононов, Н.К. Дидок

ЗАДАЧА СРЕТЕНСКОГО ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ И УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Задача Сретенского о поперечных колебаниях цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью обобщена на случай, когда основания сосуда являются упругими пластинами. Получено выражение для присоединенной массы жидкости. Проведен анализ частотного уравнения. Предложен графоаналитический метод исследования устойчивости положения равновесия механической системы.

Ключевые слова: гидроупругость, твердое тело, модальный анализ, устойчивость, частотное уравнение.

Введение. В 1951 году Л.Н. Сретенский [1] поставил задачу об определении периодов малых колебаний прямоугольного параллелепипеда с твердыми стенками, содержащего идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью, под действием упругой силы. Несмотря на простоту постановки, решение этой задачи позволило выявить ряд свойств, характерных для движения таких механических систем, и, в частности, выяснить структуру частотного спектра [2, 3]. Н.Н. Моисеев в работе [3] рассмотрел задачу Сретенского в более общей постановке и установил, что поступательное движение твердого тела с жидкостью со свободной поверхностью, происходящее под действием упругой силы, будет всегда устойчивым. Г.К. Пожарицкий показал, что в случае, когда на систему наложены связи, допускающие только поступательное движение в вертикальной плоскости, то положение равновесия системы “твердое тело–жидкость”, будет устойчивым, если в этом положении имеет минимум потенциальная энергия системы с затвердевшей жидкостью [4]. Дальнейшее развитие задача Сретенского получила в работах Л.В. Докучаева [5] и Ю.Н. Кононова [6]. В [5] рассмотрен случай, когда на поверхности жидкости расположена упругая пластина. Ю.Н. Кононов провел обобщение задачи на случай многослойной жидкости и многослойной жидкости, разделенной упругими пластинами [6].

В данной статье задача Сретенского обобщается на случай, когда цилиндрический сосуд с идеальной жидкостью имеет упругие основания.

1. Постановка задачи. Рассматривается механическая система в виде цилиндрического сосуда произвольного поперечного сечения Ω , полностью заполненного идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ (рис. 1). Верхнее и нижнее основания сосуда представляют собой жестко заземленные по контуру γ упругие изотропные пластины, обладающие изгибной жесткостью D_l ($l = 1, 2$) и подверженные растягивающим усилиям T_l в срединной поверхности.

Рассмотрим в линейной постановке поперечные колебания системы под действием упругой силы. Движение жидкости будем предполагать потенциальным, а совместные колебания жидкости и упругих оснований – безотрывными. Предварительное натяжение и жесткость оснований будем считать достаточно большими. Так, например, при отсутствии предварительного натяжения, изгибная жесткость пластин должна быть такой, чтобы выполнялось указанное в [7] условие существования решения задачи на собственные колебания (практически это означает, что стрела статического прогиба должна быть мала по сравнению с характерным поперечным размером сосуда). Для обеспечения безотрывности движения пластин и жидкости предполагается наличие внешнего давления (в случае, когда сила тяжести отсутствует, это условие не является необходимым).

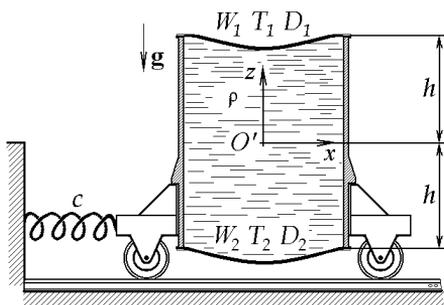


Рис. 1. Модель механической системы.

Введем жестко связанную с цилиндром неинерциальную систему координат $O'xyz$ (см. рис. 1). Ось $O'z$ направим вдоль образующей боковой поверхности цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести \mathbf{g} , а плоскость $O'xy$ расположим посередине между верхним и нижним основаниями (ось $O'y$ перпендикулярна плоскости чертежа и на рисунке не обозначена). Для исследования поперечных колебаний цилиндрического сосуда введем неподвижную систему координат $OXYZ$, совпадающую в

положении равновесия с $O'xyz$. Будем считать, что механическая система может двигаться только вдоль оси OX . Этого всегда можно добиться, накладывая на систему дополнительные связи (например, располагая сосуд с жидкостью на тележке, движущейся по рельсам). Перемещения по оси OX обозначим через X .

2. Вывод основных уравнений. Поле относительных скоростей жидкости обозначим через $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. В случае потенциального течения, \mathbf{v} определяется как градиент некоторой скалярной функции $\varphi(x, y, z, t)$, называемой потенциалом скорости жидкости. Для несжимаемой жидкости функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа [8]. Уравнения совместных колебаний жидкости и пластин следуют из интеграла Коши–Лагранжа и динамического уравнения Софи Жермен, записанного с учетом предварительного натяжения пластин.

Полная система уравнений относительных движений жидкости и упругих оснований сосуда имеет вид

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=h} + \tilde{Q} - \rho x \ddot{X}, \quad (2)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=-h} - \tilde{Q} + \rho x \ddot{X} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (5)$$

$$W_l|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_l}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = 0 \quad (l = 1, 2), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} W_1 d\Omega = \int_{\Omega} W_2 d\Omega, \quad (7)$$

$$W_l < \infty, \quad \nabla W_l < \infty. \quad (8)$$

Здесь Σ – боковая поверхность цилиндрического сосуда; ν – внешняя нормаль к Σ ; $k_{0l} = \rho_{0l} \delta_{0l}$; W_l , δ_{0l} и ρ_{0l} – соответственно нормальный прогиб, толщина и плотность материала l -ой пластины; Δ_2 – двумерный оператор Лапласа (по переменным x и y); \tilde{Q} – произвольная функция времени.

Из теоремы об изменении количества движения системы получим уравнение, описывающее движение сосуда с жидкостью вдоль оси OX :

$$M \ddot{X} + \rho \int_V \frac{dv_x}{dt} dV = -cX, \quad (9)$$

где $M = M_1 + M_2$, M_1 – масса твердого тела и пластин, M_2 – масса жидкости, c – коэффициент жесткости пружины. Под интегралом стоит проекция на ось OX полной производной скорости жидкости \mathbf{v} по времени, которая (в переменных Эйлера) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (10)$$

Поскольку в линейной постановке функция \mathbf{v} и ее частные производные по всем переменным считаются бесконечно малыми первого порядка, то величиной конвективной составляющей $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ в выражении (10) можно пренебречь, как бесконечно малой более высокого порядка, чем $\partial \mathbf{v} / \partial t$. Отсюда следует, что в линейном приближении полную производную скорости по времени (10) можно отождествлять с частной (локальной).

Общее решение уравнения (1), ограниченное на Ω и удовлетворяющее граничному условию непротекания (4), для цилиндрической полости имеет вид [8]

$$\varphi(x, y, z, t) = a_0 + a_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z}] \psi_n(x, y), \quad (11)$$

где a_0, a_1, A_n и B_n – некоторые функции времени; $\psi_n(x, y)$ и k_n – собственные функции и соответствующие им собственные числа краевой задачи

$$\Delta_2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \text{в области } \Omega, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = 0. \quad (13)$$

Функции $\psi_n(x, y)$ вместе с константой образуют полную ортогональную систему на множестве функций из пространства L_2 , удовлетворяющих условию (13) [9]. Это позволяет представить прогибы пластин W_l в виде следующего разложения в обобщенный ряд Фурье:

$$W_l = W_{l0}(t) + \sum_n W_{ln}(t) \psi_n(x, y). \quad (14)$$

Здесь $W_{l0}(t) = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_l d\Omega, \quad W_{ln}(t) = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_l \psi_n d\Omega, \quad S = \text{mes } \Omega,$

$$N_n^2 = \int_{\Omega} \psi_n^2 d\Omega \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Из (11) следует

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \sum_n \left(\dot{A}_n e^{k_n z} + \dot{B}_n e^{-k_n z} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x}. \quad (15)$$

Подставим разложение (14) и решение (11) в граничные условия (5). Умножим полученные равенства на ψ_n ($n = 0, \dots, \infty; \psi_0 \equiv 1$) и проинтегрируем по области Ω . В результате получим соотношения

$$a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\varkappa_n} - \dot{W}_{2n} e^{-\varkappa_n}}{2k_n \sinh 2\varkappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\varkappa_n} - \dot{W}_{2n} e^{\varkappa_n}}{2k_n \sinh 2\varkappa_n}. \quad (16)$$

Используя (15) и (16), уравнения движения (2), (3) и (9) приведем к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \\ = -\rho h \ddot{W}_{10} + \rho \sum_n \frac{\ddot{W}_{2n} - \cosh 2\chi_n \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh 2\chi_n} \psi_n + Q^* - \rho x \ddot{X}, \\ k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = \\ = -\rho h \ddot{W}_{20} + \rho \sum_n \frac{\ddot{W}_{1n} - \cosh 2\chi_n \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh 2\chi_n} \psi_n - Q^* + \rho x \ddot{X}, \end{array} \right. \quad (17)$$

$$M \ddot{X} + \rho \sum_n C_n (\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n}) = -cX, \quad (18)$$

где $C_n = \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega$, $Q^* = \tilde{Q} - \rho \dot{a}_0$, $\chi_n = k_n h$.

В рамках линейной теории прогиб пластин можно представить в виде суммы статического и динамического прогибов $W_l = W_l^{(st)} + W_l^{(d)}$. Функции $W_l^{(st)}$ предполагаются ограниченными на Ω и определяются из системы уравнений [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \Delta_2^2 W_1^{(st)} - T_1 \Delta_2 W_1^{(st)} + \rho g W_1^{(st)} = -\rho g h - C, \\ D_2 \Delta_2^2 W_2^{(st)} - T_2 \Delta_2 W_2^{(st)} - \rho g W_2^{(st)} = -\rho g h + C \end{array} \right. \quad (19)$$

с граничными условиями

$$\int_{\Omega} W_1^{(st)} d\Omega = \int_{\Omega} W_2^{(st)} d\Omega, \quad W_l^{(st)} \Big|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial W_l^{(st)}}{\partial \nu} \Big|_{\gamma} = 0. \quad (20)$$

Здесь C – неизвестная константа, определяемая из первого соотношения (20). В [7] методами функционального анализа доказана разрешимость задачи (19), (20) для достаточно большой жесткости пластин и приведено ее решение.

Рассматриваемая постановка задачи включает в себя ряд интересных частных случаев: одна из пластин становится абсолютно жесткой; верхняя пластина отсутствует; одна или обе пластины вырождаются в мембраны. Так, например, когда одно из оснований становится абсолютно жестким, будут отсутствовать колебания столба жидкости как целого ($a_1 \equiv 0$), отпадает необходимость в рассмотрении функций $\tilde{Q}(t)$ и $a_0(t)$, а условие (7) упрощается и принимает вид $\int_{\Omega} W_1 d\Omega = 0$. В случае вырождения l -ой пластины в мембрану ($D_l = 0$) исключается из рассмотрения второе граничное условие в (6).

3. Метод решения. Система (17) после исключения из нее членов, не зависящих от времени, будет представлять собой систему интегродифференциальных уравнений относительно динамических прогибов W_1 и W_2 (здесь и далее индекс d в обозначении $W_l^{(d)}$ будем опускать). Введем векторную функцию $W = (W_1; W_2)$ и представим систему (17) в виде обобщенного волнового уравнения [5]

$$A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + C W = f. \quad (21)$$

Здесь A и C – соответственно инерционный и упругий операторы, включающие в себя не только дифференциальные уравнения, но и граничные условия (5)–(8) (через область определения этих операторов):

$$A = \begin{pmatrix} k_{01} + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n & - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n \\ - \sum_n \tilde{b}_n \psi_n F_n & k_{02} + \rho h F_0 + \sum_n \tilde{c}_n \psi_n F_n \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} D_1 \Delta_2^2 - T_1 \Delta_2 + \rho g & 0 \\ 0 & D_2 \Delta_2^2 - T_2 \Delta_2 - \rho g \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -\rho x \ddot{X} \\ \rho x \ddot{X} \end{pmatrix},$$

$$F_0[W_l] = \frac{1}{S} \int_{\Omega} W_l d\Omega, \quad F_n[W_l] = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} W_l \psi_n d\Omega,$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\rho}{k_n \sinh 2\chi_n}, \quad \tilde{c}_n = \frac{\rho}{k_n \tanh 2\chi_n}.$$

Для определенных в области Ω двумерных векторных функций u и v введем скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_{\Omega} u_1 v_1 d\Omega + \int_{\Omega} u_2 v_2 d\Omega.$$

Краевые задачи для консервативных механических систем всегда описываются самосопряженными операторами [5]. В этом случае, когда оператор C самосопряжен, оператор A положительно определен, все собственные числа ω_k^2 соответствующего уравнению (21) однородного уравнения действительны и изолированы, а его собственные функции w_k , называемые собственными формами колебаний, попарно ортогональны по кинетической и потенциальной энергиям:

$$(A w_j, w_k) = 0 \quad \text{и} \quad (C w_j, w_k) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k. \quad (22)$$

Если же $j = k$, то

$$(C w_k, w_k) = \omega_k^2 (A w_k, w_k). \quad (23)$$

Собственные формы совместных колебаний пластин и жидкости w_k образуют полный базис, т.е. любую функцию W квадратично интегрируемую,

удовлетворяющую краевым условиям (5)–(8) и такую, что CW существует почти всюду на Ω , можно представить в виде ряда

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) w_k, \quad (24)$$

сходящегося, во всяком случае, по энергетической норме или в среднем [5, 11].

Модальный анализ заключается в том, что решение неоднородного уравнения (21) ищется в виде разложения в ряд (24) по собственным формам $w_k = (w_{1k}; w_{2k})$.

Собственные формы совместных колебаний жидкости и оснований имеют вид [10]:

$$w_{lk} = \sum_{i=1}^2 A_{li} \left\{ w_{li}^0 - K_{li} + \sum_n D_{l+1,n}^* F_n[w_{li}^0] \psi_n \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^2 A_{l+1,i} \sum_n \tilde{D}_{l+1,n} F_n[w_{l+1,i}^0] \psi_n + f_l Q, \quad l = \overline{1, 2}, \quad \text{где}$$

$$K_{li} = \frac{\rho h \omega^2 F_0[w_{li}^0]}{(k_{0l} + \rho h) \omega^2 + (-1)^l \rho g},$$

$$D_{ln}^* = \frac{\tilde{d}_{ln} \cosh(2\chi_n) - \sinh^2(2\chi_n)}{\Delta_n^*},$$

$$\tilde{D}_{ln} = \frac{\tilde{d}_{ln}}{\Delta_n^*},$$

$$\tilde{d}_{ln} = \frac{k_n d_{ln} \sinh(2\chi_n)}{\rho \omega^2},$$

$$\Delta_n^* = \left(\tilde{d}_{1n} - \cosh(2\chi_n) \right) \left(\tilde{d}_{2n} - \cosh(2\chi_n) \right) - 1,$$

$$d_{ln} = (D_l k_n^2 + T_l) k_n^2 - \left(k_{0l} \omega^2 + (-1)^l \rho g \right), \quad f_l = \frac{(-1)^l}{(k_{0l} \omega^2 + (-1)^l \rho g) + \rho h \omega^2}.$$

Функции w_{li}^0 – ограниченные независимые решения однородного уравнения

$$D_l \Delta_2^2 w_{li}^0 - T_l \Delta_2 w_{li}^0 - \left(k_{0l} \omega^2 + (-1)^l \rho g \right) w_{li}^0 = 0.$$

Неизвестные константы A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} и Q с точностью до постоянного множителя определяются из следующей системы линейных уравнений [10]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & f_1 + f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ Q \end{pmatrix} = 0, \quad (25)$$

$$\text{где } a_{1i} = w_{1i}^0|_{\gamma} - K_{1i} + \sum_n D_{2n}^* F_n[w_{1i}^0] \psi_n|_{\gamma}, \quad a_{1,i+2} = - \sum_n \tilde{D}_{2n} F_n[w_{2i}^0] \psi_n|_{\gamma},$$

$$a_{2i} = - \sum_n \tilde{D}_{1n} F_n[w_{1i}^0] \psi_n|_{\gamma}, \quad a_{2,i+2} = w_{2i}^0|_{\gamma} - K_{2i} + \sum_n D_{1n}^* F_n[w_{2i}^0] \psi_n|_{\gamma}, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$a_{3i} = \frac{\partial w_{1i}^0}{\partial \nu} \Big|_{\gamma}, \quad a_{4,i+2} = \frac{\partial w_{2i}^0}{\partial \nu} \Big|_{\gamma}, \quad a_{5i} = F_0[w_{1i}^0] - K_{1i}, \quad a_{5,i+2} = -F_0[w_{2i}^0] + K_{2i}.$$

Собственными частотами рассматриваемых колебаний будут значения ω , при которых определитель системы (25) обращается в нуль. Далее собственные формы и частоты будем считать известными.

Подставляя (24) в уравнение (21), умножая левую и правую части этого уравнения на w_k и интегрируя по Ω с учетом (22) и (23), получаем счетную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для обобщенной координаты p_k , характеризующей деформацию упругих пластин при возбуждении k -го тона колебаний:

$$\mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Здесь $\mu_k = (Aw_k, w_k) =$

$$= \sum_{l=1}^2 \left[(k_{0l} + \rho h) S \zeta_{lk0}^2 + \sum_n (k_{0l} + \tilde{c}_n) N_n^2 \zeta_{lkn}^2 - \sum_n \tilde{b}_n N_n^2 \zeta_{lkn} \zeta_{(l+1)kn} \right],$$

$$\zeta_{lk0} = \frac{1}{S} \int_{\Omega} w_{lk} d\Omega, \quad \zeta_{lkn} = \frac{1}{N_n^2} \int_{\Omega} w_{lk} \psi_n d\Omega, \quad f_k = (f, w_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X},$$

$$\tilde{\alpha}_k = \rho \int_{\Omega} (w_{2k} - w_{1k}) x d\Omega = \rho \sum_n C_n (\zeta_{2kn} - \zeta_{1kn}),$$

Последнее равенство вытекает из соотношения $C_n = \frac{1}{k_n^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} d\Omega =$

$\int_{\Omega} \psi_n x d\Omega$, которое является непосредственным следствием первой форму-

лы Грина, применяемой к функциям ψ_n , удовлетворяющим краевой задаче (12), (13).

Для того, чтобы система (26) стала замкнутой, необходимо добавить уравнение для поперечного смещения X , которое получим из (18). Для этого присутствующие в (18) коэффициенты \dot{W}_{ln} преобразуем с учетом разложения функций W_l в ряд по собственным формам (24). В итоге получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mu_k (\ddot{p}_k + \omega_k^2 p_k) = \tilde{\alpha}_k \ddot{X}, \\ M \ddot{X} + cX = \sum_k \tilde{\alpha}_k \ddot{p}_k. \end{cases} \quad (27)$$

Разрешив систему (27) относительно \ddot{p}_k , приходим к уравнению

$$(M_1 + M_{2x}) \ddot{X} + cX = - \sum_k \tilde{\alpha}_k \omega_k^2 p_k,$$

где через

$$M_{2x} = M_2 - \sum_k \frac{\tilde{\alpha}_k^2}{\mu_k} \quad (28)$$

обозначена присоединенная масса жидкости при движении сосуда вдоль оси OX . Входящую в выражение (28) сумму обозначим через \tilde{M} .

Поскольку $\mu_k > 0$, то $M_{2x} \leq M_2$. В случае абсолютно жестких оснований $M_{2x} = M_2$. Это означает, что наличие упругости оснований приводит к уменьшению массы жидкости, вовлекаемой в движение вдоль оси OX . Равенство M_{2x} массе всей жидкости будет иметь место и в случае упругих оснований, если собственные функции ψ_n окажутся ортогональны x ($C_n \equiv 0$). Тогда, как следует из первого уравнения (27), собственные частоты системы будут совпадать с собственными частотами колебаний жидкости и упругих оснований в неподвижном сосуде. Соответствующие этим частотам главные колебания не могут возбуждаться движением твердого тела и не оказывают на него влияния. Такие колебания называют четными [2]. При поступательном движении это те колебания, которые не изменяют положения центра масс механической системы. Если сосуд с жидкостью является прямоугольным параллелепипедом, а упругая сила действует вдоль одной из сторон, то возбуждаются только несимметричные относительно соответствующей плоскости симметрии сосуда упругие колебания пластин. В случае, когда полость является осесимметричной (прямой круговой или коаксиальный цилиндр), будут возбуждаться только одноузловые несимметричные колебания [2, 8].

4. Частотное уравнение. Положив в (27) $X = X_0 e^{i\sigma t}$, $p_k = p_{k0} e^{i\sigma t}$ и $x = \sigma^2$, получим следующее уравнение для частот σ поперечных колебаний системы

$$Mx - c = x^2 \sum_k \frac{\tilde{\alpha}_k^2}{\mu_k (x - \omega_k^2)}. \quad (29)$$

Исследование этого уравнения проведем по методике [2], представив левую и правую части соответственно как функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (рис. 2). Штриховой линией на рисунке обозначены асимптоты кривой $F = F_2(x)$.

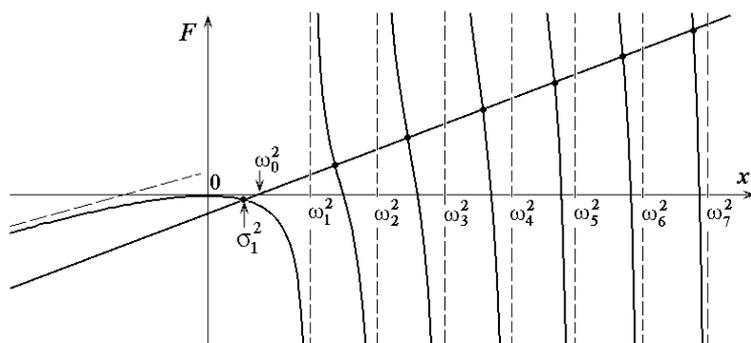


Рис. 2. Графики левой и правой частей уравнения (29).

Точки пересечений графиков функций $F = F_1(x)$ и $F = F_2(x)$ дают величины σ_k^2 . Из рис. 2 видно, что высокие частоты колебаний системы σ_k^2 весьма близки к частотам колебаний жидкости в неподвижном сосуде ω_k^2 .

В случае абсолютно жестких оснований ($\tilde{\alpha}_k^2 = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$) уравнение (29) имеет единственное решение $\sigma^2 = \omega_0^2 = c/M$.

Наличие упругости оснований ($\tilde{\alpha}_k^2 \neq 0$) приводит к смещению ее основной частоты влево (см. рис. 2). Однако, если все квадраты собственных частот ω_k^2 положительны, то положительны и все корни уравнения (29). Чтобы доказать это, заметим, что прямая $F = F_1(x)$ имеет тангенс угла наклона равный полной массе системы M , а функция $F = F_2(x)$ монотонна при $x < 0$ и имеет наклонную асимптоту с тангенсом угла наклона \tilde{M} . Так как $F_1(0) = -c < 0 = F_2(0)$ и $\tilde{M} = M_2 - M_{2x} \leq M_2 < M$, то графики функций $F = F_1(x)$ и $F = F_2(x)$ в левой полуплоскости не пересекаются. Таким образом, упругость оснований цилиндра не приводит к появлению мнимых частот σ , которые свидетельствовали бы о нарушении устойчивости положения равновесия данной механической системы.

1. Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1951. – № 10. – С. 1483–1494.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 439 с.
3. Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // Докл. АН СССР. – 1952. – 85, №4. – С. 719–722.
4. Пожарицкий Г.К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением // Прикл. математика и механика. – 1962. – 26, вып.4. – С. 593–605.
5. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
6. Кононов Ю.Н. Про стійкість і стабілізацію руху твердого тіла та системи зв'язаних твердих тіл з порожнинами, які містять багаточислову рідину та пружні вclusions: Автореф. дис... докт. фіз.-мат. наук: 01.02.01/ПММ НАНУ. – Донецьк, 2006. – 14 с.
7. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

8. *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966. — 270 с.
9. *Михишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
10. *Кононов Ю.Н., Дидок Н.К.* Совместные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и пластины, расположенной на свободной поверхности жидкости // Тр. XIII междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. — Т.2. — С.108–112.
11. *Михлин С.Г.* Вариационные методы математической физики. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

Yu.N. Kononov, N.K. Didok

The Sretensky problem for cylindrical vessel with ideal liquid and elastic bottoms

The generalisation of the Sretensky problem of transverse oscillations of a cylindrical vessel with ideal liquid is made for a case of bottoms as elastic plates. The expression for the added mass of the liquid is received. The analysis of the frequency equation is conducted. A graph-analytic method is proposed for research of the stability of equilibrium position of the mechanical system.

Keywords: *hydro-elasticity, liquid, transverse oscillations, modal analysis, frequency equation.*

Ю.М. Кононов, М.К. Дідок

Задача Сретенського для циліндричної посудини з ідеальною рідиною та пружними основами

Проведено узагальнення задачі Сретенського про поперечні коливання циліндричної посудини з ідеальною рідиною на випадок, коли основи посудини є пружними пластинами. Отримано вираз для приєднаної маси рідини. Проведено аналіз частотного рівняння. Запропоновано графоаналітичний метод дослідження стійкості положення рівноваги механічної системи.

Ключові слова: *гідропружність, рідина, коливання, модальний аналіз, частотне рівняння.*

Национальный ун-т, Донецк
nick_di@rambler.ru

Получено 22.04.10