ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2010. Вып. 40

УДК 62-50

©2010. **В.Н. Неспирный**

СТАБИЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИМПУЛЬСАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены задачи управления и стабилизации линейных динамических систем, управляемых лишь с помощью импульсов первого порядка. Показано, что при таких управляющих воздействиях сохраняется ранговое условие управляемости Калмана для линейных систем. Для двумерных систем построено импульсное управление с обратной связью, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия. Доказано, что такое управление является оптимальным по количеству скачков траектории.

Ключевые слова: *линейная система, импульсное управление, стабилизация.*

Введение. Как известно, необходимым и достаточным условием управляемости линейных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, $u \in R^m$ – вектор управления, A и B – постоянные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, является критерий Калмана [1]:

$$\operatorname{rank}\, [B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B] = n. \tag{2}$$

Система (1) является стабилизируемой тогда и только тогда, когда существует матрица F размера $m \times n$ такая, что все собственные значения матрицы $A + BF$ имеют отрицательную действительную часть. Это означает, что в случае, когда существует непрерывное управление, которое делает нулевое решение системы (1) асимптотически устойчивым, его можно искать в виде $u = Fx$. Известно, что система имеет стабилизирующее управление, если она управляема.

Можно было бы ожидать, что введение импульсных управлений в качестве допустимых расширит класс управляемых или стабилизируемых систем. Для нелинейных систем, как показано в работах [2, 3], иногда удается найти импульсное управление, стабилизирующее систему, для которой не существовало непрерывного стабилизирующего управления. Реакцией линейной системы (1) на импульсное управление величины ΔU является скачок траектории [4]

$$\Delta x = B\Delta U. \tag{3}$$

Поскольку такие скачки не выводят траекторию из инвариантного подпространства $x_0 + \operatorname{span}\{b^{(j)}, Ab^{(j)}, \ldots A^{n-1}b^{(j)}\}_{j=1}^m$, критерий Калмана сохраняется для импульсных управлений. По той же причине не расширяется и

Работа поддержана грантом НАН Украины для молодых ученых, проект № 0110U003429.

класс стабилизируемых систем. Это утверждение остается верным и при импульсных управлениях высокого порядка, которые приводят к скачкам вида

$$g\big(x, \Delta U^{(i)}\big|_{i=\overline{0,k-1}}\big) = B\Delta U^{(k-1)} + AB\Delta U^{(k-2)} + \ldots + A^{k-2}B\Delta U^{(1)} + A^{k-1}B\Delta U. \tag{4}$$

Из формулы (4) и критерия Калмана следует, что для стабилизации управляемой системы можно использовать всего одно импульсное воздействие [5] порядка не выше n, которое мгновенно переведет систему в положение $x = 0$. Таким образом, при использовании импульсов высоких порядков можно привести систему в состояние равновесия, не пользуясь ни непрерывными управляющими воздействиями u, ни собственной динамикой системы. Это означает, что управляемой является дискретная система $\Delta x = g(x, \Delta U^{(i)})$, где $g(x, \Delta U^{(i)})$ задается формулой (4).

Система, задаваемая только уравнением (3), не обладает таким свойством. Если разрешить использовать обычное управление, т.е. рассматривать систему (1), (3), то, как было отмечено выше, система будет обладать теми же свойствами, что и исходная система (1). Поэтому актуально исследование вопросов управляемости и стабилизируемости, когда в системе (1) управление u полагается равным нулю. Тогда соответствующий объект будет двигаться на определенных интервалах времени без управления, а в некоторые моменты времени будет подвергаться импульсным воздействиям первого порядка (3).

Таким образом, будем изучать системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax & \text{при } (t, x) \notin S, \\ \Delta x = B\Delta U & \text{при } (t, x) \in S. \end{cases} \tag{5}$$

Для решения соответствующих задач нужно определить гиперповерхность S в расширенном фазовом пространстве $R^+ \times R^n$ и функцию управления $\Delta U(t, x)$. В задаче стабилизации, т.е. при построении управления с обратной связью, множество S и функция ΔU должны быть независимыми от времени t.

1. Явный вид решения. Пусть импульсное управление $\Delta U(t)$ действует на систему в моменты времени $t_1 = T$, $t_2 = 2T$, $\ldots$, $t_k = kT$, $\ldots$. Для упрощения выкладок считаем, что $t_0 = 0$. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax & \text{при } \ t \in (t_{i-1}, t_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots), \\ \Delta x = B\Delta U & \text{при } \ t = t_i. \end{cases} \tag{6}$$

Найдем решение системы (6) при начальных условиях $x(t_0) = x_0$. На интервале времени (t_0, t_1) решение имеет вид $x = e^{A(t-t_0)}x_0$. Таким образом, $x(t_1 - 0) = e^{A(t_1-t_0)}x_0$. Из (3) получаем, что $\Delta x(t_1) = B\Delta U(t_1)$. Поэтому $x(t_1 + 0) = e^{A(t_1-t_0)}x_0 + B\Delta U(t_1)$.

Аналогично происходит движение и на интервале времени (t_1, t_2)

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}(e^{A(t_1-t_0)}x_0 + B\Delta U(t_1)) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{A(t-t_1)}B\Delta U(t_1).$$

Слева от точки t_2 положение системы находится по формуле

$$x(t_2 - 0) = e^{A(t_2-t_0)}x_0 + e^{A(t_2-t_1)}B\Delta U(t_1),$$

справа –

$$x(t_2 + 0) = e^{A(t_2-t_0)}x_0 + e^{A(t_2-t_1)}B\Delta U(t_1) + B\Delta U(t_2).$$

Продолжая вычисления, получим

$$x(t_k + 0) = e^{A(t_k-t_0)}x_0 + \sum_{i=1}^{k} e^{A(t_k-t_i)}B\Delta U(t_i),$$

или, учитывая, что $t_i = iT$, и обозначая $e^{AT} = A_T$, приходим к формуле

$$x(t_k + 0) = A_T^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} A_T^{k-i}B\Delta U(t_i).$$

Благодаря управлениям $\Delta U(t_i)$, из векторов $b^{(j)}$, $A_T b^{(j)}$, …, $A_T^{n-1}b^{(j)}$ можем составить произвольную линейную комбинацию. Система будет управляемой, если матрица, составленная из этих векторов, будет иметь полный ранг.

2. Условия управляемости. Поскольку матрица e^{AT}, как и ее степени, является линейной комбинацией матриц A^k, то ранг матрицы, составленной из векторов b_j, $A_T b_j$, …, $A_T^{n-1}b_j$, будет не выше ранга матрицы Калмана. Поэтому следует ожидать, что критерий Калмана (2) будет по крайней мере необходимым условием управляемости системы (5). Оказывается, это условие будет также и достаточным, что доказывает следующая теорема.

Теорема 1. Система (5) управляема тогда и только тогда, когда управляема система (1).

Доказательство. Рассмотрим систему (1). Она является управляемой, если, согласно критерию Калмана, выполнено условие (2). Приведем матрицу A к нормальной жордановой форме с помощью невырожденного преобразования $x = Cy$, где C – некоторая матрица ($\det C \neq 0$). Такое же преобразование применим к системе с импульсным управлением (5).

Для упрощения выкладок рассмотрим случай $n = 2$, $m = 1$. Для матрицы A возможны 4 нормальные формы:

1. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 > \lambda_2$; 2. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$, $\mu > 0$; 4. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Рассмотрим каждый случай отдельно и найдем условия управляемости явно в терминах коэффициентов системы.

Случай 1. Проверим, при каких условиях будет управляемой система (1), когда матрица A имеет два различных действительных собственных значения.

Система управляема, если $\operatorname{rank}[B\ AB] = 2$. Это означает, что

$$\det[B\ AB] = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0.$$

Определитель матрицы не равен нулю, если $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.

Проверим, что при этих условиях управляема и система (5) с импульсным воздействием. Для этого вычислим определитель $\det[B\ A_T B]$. Матрица $A_T = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{pmatrix}$. Поэтому $\det[B\ A_T B] = b_1 b_2 (e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})$. Поскольку $T \neq 0$ и $\lambda_1 > \lambda_2$, при условиях $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ этот определитель будет отличен от нуля, а потому и система (5) будет управляемой.

Случай 2. Матрица системы имеет два одинаковых собственных значения и в нормальной форме представляется жордановой клеткой размера 2.

Найдем необходимые и достаточные условия управляемости системы (1). Для этого вычислим определитель матрицы Калмана:

$$\det[B\ AB] = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda b_1 + b_2 \\ b_2 & \lambda b_2 \end{vmatrix} = -b_2^2.$$

Таким образом, система (1) является управляемой тогда и только тогда, когда $b_2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь систему (5). Матрица A_T будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda T} & Te^{\lambda T} \\ 0 & e^{\lambda T} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $[B\ A_T B]$ будет равен $-b_2^2 T e^{\lambda T}$. Поскольку $T \neq 0$, то условием управляемости системы (5) будет $b_2 \neq 0$, что совпадает с условием управляемости для непрерывной системы (1).

Случай 3. Рассмотрим случай, когда собственные значения являются комплексными, т.е. $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\mu$. Тогда матрицу системы с помощью невырожденного преобразования можно привести к форме $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$.

Для проверки управляемости непрерывной системы (1) снова вычисляем определитель матрицы $[B\ AB]$:

$$\det[B\ AB] = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ b_2 & -\mu b_1 + \lambda b_2 \end{vmatrix} = -\mu(b_1^2 + b_2^2).$$

Поскольку $\mu > 0$, система (1) является управляемой тогда и только тогда, когда хотя бы один из коэффициентов b_1 и b_2 отличен от нуля, т.е. вектор B ненулевой.

Переходим к системе с импульсным управлением (5). Матрицу A_T для этого случая можно найти, если перейти к комплексной нормальной форме, вычислить ее экспоненту, а потом выполнить обратное преобразование. В результате получим $A_T = e^{\lambda T}\begin{pmatrix} \cos\mu T & \sin\mu T \\ -\sin\mu T & \cos\mu T \end{pmatrix}$. Находим теперь определитель матрицы $[B\ A_T B]$:

$$\det[B\ A_T B] = \begin{vmatrix} b_1 & e^{\lambda T}(b_1\cos\mu T + b_2\sin\mu T) \\ b_2 & e^{\lambda T}(-b_1\sin\mu T + b_2\cos\mu T) \end{vmatrix} = -e^{\lambda T}\sin\mu T(b_1^2 + b_2^2).$$

Поскольку μ и T – положительные числа, условием управляемости, как и для системы (1), будет $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Случай 4. Когда матрица A имеет одно собственное значение, которому соответствуют два различных собственных вектора, она может быть приведена к нормальной форме $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Этот случай сводится к предыдущему при $\mu = 0$. Поэтому все вычисления и утверждения, которые не предполагали $\mu > 0$, могут быть использованы и в случае 4. Подставим значение $\mu = 0$ в выражения для определителей матриц $[B\ AB]$ и $[B\ A_T B]$. Оказывается, что при $\mu = 0$ и любых векторах B эти определители равны нулю. Следовательно, в этом случае матрицы $[B\ AB]$ и $[B\ A_T B]$ всегда являются вырожденными, и поэтому системы (1) и (5) не являются управляемыми.

Таким образом, во всех случаях для $n = 2$, $m = 1$ условия на коэффициенты для систем (1) и (5) совпадают, значит утверждение теоремы справедливо.

Аналогично рассматриваются и случаи большей размерности. Систему (1) необходимо предварительно привести к канонической форме Бруновского. Тогда она распадется на подсистемы с одним управлением, для каждой из которых получаются одинаковые условия управляемости как при непрерывном, так и при импульсном управлении. □

3. Условия стабилизируемости. Как было отмечено выше, для линейных непрерывных систем управляемость является достаточным условием стабилизируемости. Покажем, что это условие сохраняется и для систем вида (5). Это утверждение будет доказано здесь для $n = 2$, $m = 1$. Такое ограничение позволит сделать доказательство конструктивным – соответствующее стабилизирующее управление будет явно построено.

Теорема 2. Если двумерная система (5) управляема, то она является и стабилизируемой.

Доказательство. В теореме 1 мы нашли явные условия на коэффициенты системы, при которых система с импульсным воздействием (5) является управляемой. Из управляемости следует, что для каждого начального значения можно построить управление, зависящее от времени, которое приводит систему в начало координат (на самом деле выбираем лишь момент времени T скачка и его величину ΔU). Однако стабилизирующее управление должно быть с обратной связью, потому зависеть только от фазового вектора системы и задаваться не в фиксированные моменты времени, а на некотором подмножестве S фазового пространства.

Доказательство проведем для каждой из нормальных форм матрицы A отдельно. В каждом случае будем искать соответствующее стабилизирующее управление.

Случай 1. Матрица системы A имеет два различных собственных значения, ее нормальная форма – $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Из теоремы 1 следует, что система является управляемой тогда и только тогда, когда координаты вектора B не равны нулю: $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$. Общее решение системы без управления таково:

$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \; x_2 = x_2^0 e^{\lambda_2 t}.$$

Построим прямую l_1, которая проходит через начало координат параллельно вектору B. Ее уравнение будет иметь вид $B \times x = b_1 x_2 - b_2 x_1 = 0$. Прямая l_1 делит все фазовое пространство (плоскость) на две полуплоскости $X^+ : \{B \times x > 0\}$ и $X^- : \{B \times x < 0\}$. В направлении вектора B можно с помощью управления перемещаться на любое расстояние. Поэтому, если решение системы достигает в некоторый момент времени прямой l_1, то одним скачком можно перевести систему в начало координат.

В зависимости от знаков собственных значений матрицы A возможны три подслучая:

1a) Если собственные значения матрицы A отрицательны ($0 > \lambda_1 > \lambda_2$), то нулевое решение системы без управления является асимптотически устойчивым. Стабилизация при возмущении может происходить и без управления, поэтому в качестве S можем взять пустое множество.

1b) Пусть собственные значения матрицы A имеют разные знаки ($\lambda_1 \geq 0 >$ $> \lambda_2$). Тогда координата x_2 стремится к нулю, а x_1 либо остается неизменной, либо уходит на бесконечность. Первый вариант имеет место либо в случае, когда значение λ_1 равно нулю, либо когда начальная точка лежит на оси Ox_2. Если система в некоторый момент времени достигает оси Ox_2, то траектория в дальнейшем будет стремиться к началу координат. Следовательно, для решения задачи стабилизации достаточно обеспечить, чтобы из любой точки R^2 система попадала на эту ось. Этого можно добиться, если задать на всей фазовой плоскости, за исключением самой оси Ox_2, импульсное управление

$$\Delta U(x) = -\frac{x_1}{b_1}, \quad x \in R^2 \setminus \{x_1 \neq 0\}.$$

Поскольку условие управляемости предполагает, что $b_1 \neq 0$, то предложенное управление определено корректно.

1c) Наконец, остается рассмотреть случай, когда оба собственных значения неотрицательны ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). При таких значениях λ траектория системы со временем уходит все дальше от начала координат, если не использовать управление. Построим прямую l_1, определяемую уравнением $B \times x = 0$. Как было отмечено выше, всегда можно одним скачком перевести систему с этой прямой в начало координат. Для этого воспользуемся управлением

$$\Delta U(x) = -\frac{x_1}{b_1}, \quad x \in l_1.$$

Для оставшейся части фазового пространства построим управление таким образом, чтобы за конечный промежуток времени система оказалась на прямой l_1. Рассмотрим полуплоскость X^+, где величина $B \times x$ является положительным числом и определяет расстояние от точки x до прямой l_1. Вычислим производную $B \times x$ в силу непрерывной части системы:

$$\frac{d}{dt}(B \times x) = B \times Ax = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 x_1 \\ b_2 & \lambda_2 x_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 b_1 x_2 - \lambda_1 b_2 x_1.$$

Там, где эта величина отрицательна, вектор скорости системы направлен к прямой l_1. Если начальное положение принадлежит области $B \times x > 0$, $B \times Ax \leq 0$, то траектория системы приближается к прямой l_1 и достигает ее, как будет показано ниже, за конечное время. Остается найти управление ΔU, которое обеспечит для части фазового пространства, которая задается неравенствами $B \times x > 0$, $B \times Ax > 0$, скачок в точку, принадлежащую области $B \times x > 0$, $B \times Ax \leq 0$, например, на прямую $B \times Ax = 0$, которую обозначим l_2. Пусть фазовый вектор системы в некоторый момент времени равен x. Из условия $B \times A(x + B\Delta U) = 0$ находим значение управления

$$\Delta U = \frac{\lambda_2 b_1 x_2 - \lambda_1 b_2 x_1}{b_1 b_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Поскольку $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\lambda_1 > \lambda_2$, управление корректно определено.

Остается доказать, что система за конечное время достигает прямой l_1. Действительно, если в начальный момент времени система находилась в точке x^0 в области $B \times x > 0$, $B \times Ax \leq 0$, то в момент времени T она достигнет точки $(x_1^0 e^{\lambda_1 T}, x_2^0 e^{\lambda_2 T})$. Значением T, при котором эта точка будет принадлежать прямой l_1, является

$$T = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \ln \frac{b_1 x_2^0}{b_2 x_1^0}.$$

Из неравенств $b_1 x_2^0 - b_2 x_1^0 > 0$, $\lambda_2 b_1 x_2^0 - \lambda_1 b_2 x_1^0 \leq 0$ следует, что $1 < \dfrac{b_1 x_2^0}{b_2 x_1^0} \leq \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Отсюда получаем оценку $0 < T \leq \dfrac{\ln \lambda_1 - \ln \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Таким образом, значение T конечно, если только $\lambda_2 \neq 0$. При $\lambda_2 = 0$ необходимо немного сузить область, отступив от прямой l_2, т.е. для системы (5) воспользоваться таким управлением, которое имело бы место для $\lambda_2 = \varepsilon$. В качестве ε можно брать любое положительное число, меньшее λ_1. Более универсальный способ – в качестве прямой $\tilde{l}_2$, которая отделит область, где действует управление, от области с движением по инерции, взять вместо $B \times Ax = 0$ прямую $B \times (A+E)x = 0$, которая проходит между l_1 и l_2. При $B \times x > 0$ на прямой $\tilde{l}_2$ значение $B \times Ax$ будет отрицательным.

Аналогично рассматривается и полуплоскость X^-. Итак, окончательно получаем стабилизирующее управление:

$$\Delta U(x) = \begin{cases} -\dfrac{x_1}{b_1} & \text{при} \quad B \times x = 0, \\ \dfrac{(\lambda_2+1)b_1x_2 - (\lambda_1+1)b_2x_1}{b_1b_2(\lambda_1-\lambda_2)} & \text{при} \quad (B \times x)(B \times (A+E)x) > 0. \end{cases}$$

Случай 2. Матрица A имеет только одно собственное значение, которому соответствует один собственный вектор, ее нормальная форма – $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Система (5) управляема тогда и только тогда, когда $b_2 \neq 0$. Общее решение системы без управления таково: $x_1 = x_1^0 e^{\lambda t} + t x_2^0 e^{\lambda t}$, $x_2 = x_2^0 e^{\lambda t}$.

Для такой формы матрицы A возможны два подслучая:

2a) Если собственное значение отрицательно ($\lambda < 0$), то система (5) не требует управления, ее нулевое решение является асимптотически устойчивым и все траектории стремятся к нулю. В качестве S выбираем пустое множество.

2b) Если собственное значение матрицы A является положительным или нулевым ($\lambda \leq 0$), без применения управления система со временем неограниченно удаляется от начала координат. Как и для подслучая 1c), строим прямую $l_1 = \{x \mid B \times x = 0\}$. Если точка уже лежит на l_1, то с помощью импульса величины $\Delta U = -x_2/b_2$ она мгновенно переместится в нулевое положение.

Так же строим прямую $l_2 = \{x \mid B \times Ax = 0\}$. Рассмотрим полуплоскость X^+. В той ее части, где $B \times Ax \leq 0$, траектория системы будет двигаться в направлении прямой l_1. В части $B \times Ax > 0$ необходимо применить такое импульсное управление, чтобы после скачка система оказалась на прямой l_2. Таким будет управление

$$\Delta U = \frac{b_1\lambda x_2 - b_2(\lambda x_1 + x_2)}{b_2^2}.$$

Поскольку $b_2 \neq 0$, управление корректно определено.

Покажем, что из области $B \times Ax \leq 0$, $B \times x > 0$ за конечный промежуток времени система достигнет прямой l_1. Пусть в начальный момент времени система находится в точке x^0. Значение T, при котором точка $x(T)$ будет принадлежать прямой l_1:

$$T = \frac{b_1x_2^0 - b_2x_1^0}{b_2x_2^0}.$$

Как и в подслучае 1c), имеем T неограниченно, когда $x_2^0 = 0$. Это возможно лишь при $\lambda = 0$. Чтобы избежать такой ситуации, снова сдвинем прямую l_2. Управление для X^- строится аналогично.

Итак, стабилизирующее управление на всем фазовом пространстве представимо в виде

$$\Delta U(x) = \begin{cases} -x_2/b_2 & \text{при} \quad B \times x = 0, \\ \dfrac{(\lambda+1)(b_1 x_2 - b_2 x_1) - b_2 x_2}{b_2^2} & \text{при} \quad (B \times x)(B \times (A+E)x) > 0. \end{cases}$$

Случай 3. Собственные значения матрицы A являются комплексно сопряженными, ее можно привести к форме $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$. Система (5) с такой матрицей будет управлямой тогда и только тогда, когда хотя бы одна из координат b_1 или b_2 отлична от нуля. Общий вид решения системы без управления имеет вид

$$x_1 = e^{\lambda t}(x_1^0 \cos \mu t + x_2^0 \sin \mu t), \quad x_2 = e^{\lambda t}(-x_1^0 \sin \mu t + x_2^0 \cos \mu t).$$

В этом случае траектория системы при любых начальных условиях за конечный промежуток времени достигает прямой l_1. Моментом времени, когда это произойдет, является

$$T = \mu^{-1} \operatorname{arctg} \frac{b_1 x_2^0 - b_2 x_1^0}{b_1 x_1^0 + b_2 x_2^0}.$$

Значения функции arctg здесь берутся из промежутка $[0, \pi)$. При неограниченном аргументе arctg считается равным $\pi/2$. Поскольку $\mu > 0$, а arctg – ограниченная функция, то T является конечной величиной.

Таким образом, достаточно задать управление только на прямой l_1 в виде

$$\Delta U(x) = -\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)/(b_1^2 + b_2^2)},$$

чтобы система при любых начальных условиях за конечное время переводилась в нулевое положение равновесия.

Случай 4. Случай, когда матрица A имеет одно собственное значение, которому соответствуют два различных собственных вектора, здесь не рассматриваем, поскольку тогда система не будет управляемой. Отметим только, что при $\lambda < 0$ нулевое решение будет асимптотически устойчивым без использования управления, при $\lambda = 0$ – устойчивым, при $\lambda > 0$ – неустойчивым, и его нельзя стабилизировать никаким управлением.

Теорема полностью доказана. □

Из способа построения управления следует, что построенные обратные связи будут оптимальными по количеству скачков траектории. Действительно, изначально выделялось множество P_0, из которого траектории ведут в начало координат без управления. Если это множество не охватывало все фазовое пространство, то находилось такое подмножество S_1, из которого одним скачком можно попасть в P_0. Далее, строилось подмножество P_1, из которого движение по инерции приводит за конечное время в S_1 и т.д. Такое построение гарантирует, что из подмножеств S_i и P_i, используя управление с обратной связью $\Delta U(x)$, невозможно попасть в начало координат менее, чем за i скачков.

Заключение. В явном виде записано решение линейной системы (5) с импульсным управлением первого порядка. Найден критерий управляемости такой системы, который представлен в виде рангового условия. Доказано, что это условие эквивалентно критерию Калмана для соответствующей непрерывной системы (1). Несмотря на то, что системы (1) и (5) имеют существенно разные траектории, условия управляемости и стабилизируемости оказываются одинаковыми. Поскольку теорема о стабилизируемости управляемых систем доказана конструктивно, построенные управления могут быть использованы для стабилизации систем, управляемых по линейному приближению.

1. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Тр. I конгресса ИФАК. – **2**. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 521–547.
2. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Импульсно-разрывная стабилизация интегратора Брокетта // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 5. – С. 5–15.
3. *Nespirnyy V.N.* Impulsive stabilization of mechanical systems // Proc. of 49 Intern. Wissenschaftliches Kolloquium "Synergies between Information and Automation". – Ilmenau, Germany: Shaker Verlag, 2004. – **1**. – P. 387–392.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
5. *Ковалев А.М., Кравченко Н.В., Неспирный В.Н.* Стабилизация по всем и по части переменных динамических систем с импульсным управлением // Матер. 11-й Междунар. научн. конф. "Математические модели физических процессов". – Таганрог: изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та, 2005. – **1**. – С. 184–190.

V.N. Nespirnyy

Stabilization of controllable linear systems by the first-order impulses

In the paper, control and stabilization problems are considered for linear systems controlled by first-order impulses only. It is shown that the Kalman rank condition for linear systems remains to be true when the class of admissible controls is reduced by excluding continuous controls. For two-dimensional systems, the impulsive feedback control ensuring asymptotic stability of the equilibrium is constructed. It is proved that this control is optimal with respect to the number of trajectory jumps.

Keywords: *linear system, impulsive control, stabilization.*

В.М. Неспірний

Стабілізація керованих лінійних систем імпульсами першого порядку

В роботі розглядаються задачі керування та стабілізації лінійних динамічних систем, що керуються лише імпульсами першого порядку. Показано, що рангова умова керованості Калмана для лінійних систем зберігається при обмеженні класу припустимих керувань за рахунок виключення неперервних керувань. Для двовимірних систем побудовано імпульсне керування зі зворотним зв'язком, що забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги. Доведено, що таке керування є оптимальним за кількістю стрибків траєкторії.

Ключові слова: *лінійна система, імпульсне керування, стабілізація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vetal_n@mail.ru

Получено 30.04.10