

УДК 531.38

©2010. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Рассмотрена замкнутая система  $n$  гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Эта система может служить конечномерной моделью упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости во все время движения. Полагалось, что упругий момент в шарнирах существенно нелинеен. Определены достаточные условия устойчивости для “круговой” конфигурации и конфигурации типа “восьмерка”. Исследовано влияние на область устойчивости наличия шарнира в точке пересечения оси моделируемого стержня.

**Ключевые слова:** замкнутая система тел, упругий шарнир, устойчивость положения равновесия.

**Введение.** В работах [1, 2] была предложена конечномерная модель замкнутого стержня. Целью конечномерного подхода являлось как определение в явном виде известных форм оси моделируемого стержня [1–3], так и установление новых форм [4]. Кроме того, конечномерный подход позволяет определять достаточные условия устойчивости положения равновесия системы, используя ее потенциальную энергию [5] и находить необходимые условия устойчивости, исходя из анализа уравнений движения системы [6].

Поскольку конечномерная система тел, сочлененных упругими шарнирами, используется для моделирования стержней, естественно требование, чтобы при неограниченном увеличении числа тел в системе выражение для упругого момента в шарнирном сочленении совпадало с моментом стержня. В теории упругих стержней связь между геометрическими характеристиками и упругими моментами, действующими в поперечном сечении стержня, определяется законом Кирхгофа–Клебша [7]. В случае, когда главные оси изгиба и кручения стержня совпадают с главными осями инерции поперечного сечения и материал стержня изотропен, его упругий момент равен [8]

$$\mathbf{M} = k_1^2(\varkappa_1 \mathbf{e}_1 + \varkappa_2 \mathbf{e}_2) + k_2^2 \varkappa_3 \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

где  $k_1^2, k_2^2$  – соответственно изгибная и крутильная жесткости,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – ортогональный базис, в котором вектор  $\mathbf{e}_3$  направлен по касательной к осевой линии стержня, а векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  – по главным центральным осям инерции поперечного сечения ( $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(s)$ , где  $s$  – дуговая координата);  $\varkappa_i$  – компоненты вектора Дарбу в проекциях на оси  $\mathbf{e}_i$ . При этом предполагается, что в недеформированном состоянии ось стержня прямолинейна.

Для системы тел упругий момент в  $j$ -том шарнире в [1, 2] выбирался, аналогично (1), в виде

$$\mathbf{L}_j = k_1^2(\varkappa_j^1 \mathbf{e}_j^1 + \varkappa_j^2 \mathbf{e}_j^2) + c_2^2 \varkappa_j^3 \mathbf{e}_j^3, \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}_j^1, \mathbf{e}_j^2, \mathbf{e}_j^3$  – орты связанной с телом  $S_j$  системы координат  $C_j X_j Y_j Z_j$ , ось  $C_j Z_j$  которой направлена вдоль оси симметрии тела  $S_j$ .

Отличие подходов, предложенных в работах [1] и [2], состоит в том, что в [1] упругий момент выбирался в предположении малости разности углов Крылова  $\psi_{j+1} - \psi_j, \theta_{j+1} - \theta_j, \varphi_{j+1} - \varphi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), определяющих положение тела  $S_j$  в неподвижной системе координат [7], а в [2] зависимость момента от разности углов имеет нелинейный характер. В обоих случаях показано, что при  $n \rightarrow \infty$  соотношение (2) совпадает с известным в стержневой теории выражением (1) [8].

В [5] исследовалась устойчивость положения равновесия системы тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Полагалось, что разность углов  $\psi_j$  и  $\psi_{j-1}$  мала и упругий момент считался равным

$$L_j = k^2(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Формально можно рассматривать модельные задачи с упругим моментом (3), однако при малом числе тел в системе разности углов достигают значительной величины, а делать вывод о поведении упругих стержней можно лишь при достаточно большом числе тел в системе. Введение нелинейного упругого момента снимает эти ограничения. В настоящей работе рассмотрена система тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами с нелинейным упругим моментом. Определены достаточные условия устойчивости для “круговой” конфигурации и конфигурации типа “восьмерка”.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими шарнирами, расположенными в точках  $O_j$  пересечения осей симметрии тел  $S_j$ . Считаем, что система замкнута, при этом  $O_1 = O_{n+1}$ . Как и в [1, 2], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, вследствие чего ее центр масс  $C$  неподвижен.

Свяжем с ним неподвижную систему координат  $CXYZ$  с базисом  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Будем считать, что ось  $CX$  направлена вдоль оси недеформированного прямолинейного стержня. Рассмотрим случай, когда все оси симметрии тел лежат в одной плоскости  $CXY$ , а оси шарниров коллинеарны оси  $CZ$ . Как и в [2] считаем, что действие тела  $S_{j-1}$  на  $S_j$  характеризует упругий момент  $\mathbf{L}_j$ , приложенный в точке  $O_j$ , а действие тела  $S_{j+1}$  на  $S_j$  – упругий момент  $-\mathbf{L}_{j+1}$ , приложенный в точке  $O_{j+1}$ . Выражение для упругого момента получено в [2], и в случае, когда тела связаны цилиндрическими шарнирами, он равен

$$L_j = k^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для замкнутых систем считаем  $\psi_0 = \psi_n$ . Очевидно, что при большом количестве тел в системе можно рассматривать и линейную модель, поскольку выражения (3) и линеаризованное выражение (4) совпадают.

Так как внешнее силовое поле отсутствует, то из (4) следует, что потен-

циальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = -k^2 \sum_{j=1}^n \cos(\psi_j - \psi_{j-1}). \quad (5)$$

В случае замкнутой системы имеем

$$\sum_{j=1}^n h_j \mathbf{e}_j^1 = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{e}_j^1$  – единичный орт оси  $O_j O_{j+1}$ , составляющий угол  $\psi_j$  с осью  $OX$ ,  $O_j O_{j+1} = h_j$ .

Так как  $\mathbf{e}_j^1 = \cos \psi_j \mathbf{e}_x + \sin \psi_j \mathbf{e}_y$  ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  – соответственно орты осей  $OX$  и  $OY$ ), то из (6) следуют соотношения, которым должны удовлетворять углы  $\psi_j$ :

$$f_1 = \sum_{j=1}^n h_j \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n h_j \sin \psi_j = 0. \quad (7)$$

Как известно [9, 10], для систем с дополнительными нелинейными связями, наложенными на переменные, положения равновесия находятся из условия

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (8)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители Лагранжа.

Из (5), (7), (8) получаем систему уравнений

$$k^2 [\sin(\psi_{j+1} - \psi_j) - \sin(\psi_j - \psi_{j-1})] = h_j (\lambda_2 \cos \psi_j - \lambda_1 \sin \psi_j), \quad (9)$$

$$j = \overline{1, n}, \quad \psi_{n+1} = \psi_1,$$

которая вместе с (7) позволяет определить неизвестные углы  $\psi_j$  и множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$ . Система уравнений (9) совпадает с полученной ранее в работе [2], где роль множителей Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$  играют реакции связи в шарнирных сочленениях, найденные с учетом замкнутости системы.

Положение изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями является устойчивым [11] при минимуме функции  $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ , множители  $\lambda_1, \lambda_2$  которой найдены из условий (8) стационарности этой функции. Таким образом, условия устойчивости положения равновесия выполнены в области

$$\delta^2 L = \delta^2 \Pi + \lambda_1 \delta^2 f_1 + \lambda_2 \delta^2 f_2 > 0, \quad \delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0. \quad (10)$$

Пусть в возмущенном движении  $\psi_j = \psi_j^0 + \xi_j$ , где  $\psi_j^0$  – решения уравнений равновесия (9), а  $\xi_j$  – их малые возмущения. Тогда из (7) получаем

$$\sum_{j=1}^n h_j \xi_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{j=1}^n h_j \xi_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (11)$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по переменной  $\xi_j$ .

Введем новые переменные  $X_j = \xi_j - \xi_{j-1}$ . Учитывая (7) и полагая  $\xi_0 = \xi_n$ , получим

$$\xi_j = \sum_{i=1}^j X_i + \xi_n, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0. \quad (12)$$

Из (11), (12) следует

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (13)$$

Подстановка (5), (6) с учетом (8), (12), (13) в (10) дает возможность определить  $\delta^2 L$  в виде

$$\delta^2 L = \frac{k^2}{2} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \cos(\psi_j^0 - \psi_{j-1}^0) X_j^2 + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0) \left( \sum_{j=1}^{n-1} X_j \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} h_j (\mu_1 \cos \psi_j^0 + \mu_2 \sin \psi_j^0) \left( \sum_{i=1}^j X_i \right)^2, \quad (14)$$

где  $\mu_1 = \lambda_1/k^2$ ,  $\mu_2 = \lambda_2/k^2$ .

Для нахождения области выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия системы необходимо определить область положительной определенности квадратичной формы (14), из которой исключены две переменные, согласно (13).

**2. Круговая конфигурация оси стержня.** В [1] было установлено, что в случае

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \psi_j^0 = 2\pi j/n, \quad h_j = h, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

равновесная форма замкнутой системы тел является конечномерной моделью круговой конфигурации оси стержня. Нетрудно убедиться, что решение (15) удовлетворяет уравнениям равновесия (9).

Из (15) следует

$$\psi_j^0 - \psi_{j-1}^0 = 2\pi/n, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (14) приводит к следующей квадратичной форме:

$$\delta^2 L = \delta^2 \Pi = \frac{k^2}{2} \cos \frac{2\pi}{n} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-1} X_j \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Очевидно, что квадратичная форма (17) является положительно определенной, а при этом и потенциальная энергия системы имеет минимум при условии  $\cos(2\pi/n) > 0$ , которое всегда выполнено, если число тел в системе  $n > 4$ . Таким образом, достаточные условия устойчивости решения (15), описывающего круговую конфигурацию, всегда выполнены в случае, когда число тел в системе больше четырех.

**3. Конфигурация оси стержня типа “восьмерки”.** Равновесные формы системы из  $n$  связанных твердых тел, описывающие конфигурацию оси стержня типа “восьмерки” для некоторых конкретных  $n$ , были найдены в [2]. При этом полагалось, что они содержат четное число тел ( $n = 2N$ ), а их конфигурация симметрична относительно оси  $OX$ . При этих предположениях из системы уравнений равновесия (9) следует, что ее решения удовлетворяют соотношениям

$$\psi_{N+l}^0 = \pi - \psi_l^0, \quad h_{N+l} = h_l \quad (l = \overline{1, N}), \quad \lambda_1 = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи “восьмерки”, полагая, что число тел в системе, как и в случае круговой конфигурации, не меньше шести. Как установлено в [2, 12], одинаковые конечномерные конфигурации могут быть реализованы при различном числе тел в системе в зависимости от наличия или отсутствия шарнира в точке  $O$  пересечения осей симметрии тел. Так, на рис. 1 при отсутствии шарнира система содержит шесть тел, а при наличии – восемь. На рис. 2 соответственно имеем восемь либо десять тел.

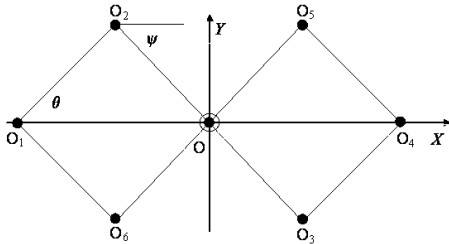


Рис. 1. Шесть и восемь тел.

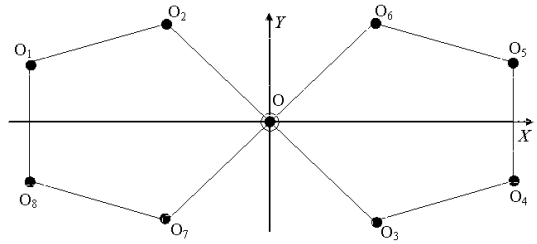


Рис. 2. Восемь и десять тел.

**4. Случай шести и восьми тел.** Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 1. Она может быть представлена шестью, либо восемью телами. В этих случаях уравнения равновесия (9) и уравнения связей (7) с учетом (18) имеют следующие решения:

для шести тел –

$$\psi_1^0 = \psi_3^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = -\psi, \quad \psi_4^0 = \psi_6^0 = \pi - \theta, \quad \psi_5^0 = \pi + \psi; \quad (19)$$

для восьми тел –

$$\psi_1^0 = \psi_4^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = \psi_3^0 = -\psi, \quad \psi_5^0 = \psi_8^0 = \pi - \theta, \quad \psi_6^0 = \psi_7^0 = \pi + \psi, \quad (20)$$

если углы  $\theta, \psi$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\sin 2\theta - \sin(\theta + \psi)}{2 \sin(\theta + \psi)} = a \frac{\cos \theta}{\cos \psi}, \quad (21)$$

$$\sin \psi = 2a \sin \theta, \quad \cos \psi = p \cos \theta, \quad (22)$$

а сила реакции связи равна

$$\mu_2 = \frac{2 \sin(\theta + \psi)}{H_2 \cos \psi}, \quad (23)$$

где  $H_2 = O_2O_3$ ,  $a = h_1/H_2$ ,  $h_1 = O_1O_2 = O_3O_4$ .

В [2, 12] проведен полный анализ условий (21), (22). В явном виде найдены значения углов  $\theta$  и  $\psi$  в зависимости от параметра  $a$ :

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}}, \quad \psi = \arcsin \left( 2a \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}} \right),$$

где  $p = -2a + 1 + \sqrt{1 - 4a}$  и установлено, что решения (19), (20) существуют в области  $a \in (0; (\sqrt{2} - 1)/2)$ .

**5. Случай восьми и десяти тел.** Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 2. Система тел в этом случае состоит из восьми, либо десяти тел. Полагалось, что

$$O_1O_2 = O_3O_4 = h_1, \quad O_2O_3 = H_2, \quad O_4O_5 = h_1 \quad (24)$$

и в системе, состоящей из восьми тел  $H_2 = h_2$ , а в случае десяти тел имеем  $O_2O = OO_3 = h_2$  и  $H_2 = 2h_2$ .

Углы  $\psi_k^0$ ,  $k = \overline{1, N}$ , равны

$$\psi_1^0 = \psi_3^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = -\psi, \quad \psi_4^0 = \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

в случае восьми тел и

$$\psi_1^0 = \psi_4^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = \psi_3^0 = -\psi, \quad \psi_5^0 = \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

в случае десяти тел. Остальные углы и длины определяются, согласно (18). Подстановка (25) или (26) с учетом (24), (18) в уравнения равновесия (9) и уравнения связей (7) приводит к следующим соотношениям, которым должны удовлетворять углы  $\psi$  и  $\theta$ :

$$\frac{\cos \theta - \sin(\theta + \psi)}{2 \sin(\theta + \psi)} = a \frac{\cos \theta}{\cos \psi}, \quad (27)$$

$$\sin \psi = (2 \sin \theta + 1)a, \quad (28)$$

где  $a = h_1/H_2$ . При этом сила реакции связи имеет вид (23).

Введем дополнительный параметр  $p$ , согласно (22). Очевидно, что  $p$  больше нуля, так как углы  $\theta$  и  $\psi$  – острые.

Из (27), (28) находим

$$\sin \theta = \frac{p(1-a) - 2a^2}{(p+2a)^2}. \quad (29)$$

Поскольку  $0 < \sin \theta < 1$ , из (29) следует

$$a < 1, \quad p > \frac{2a^2}{1-a}. \quad (30)$$

Кроме того, из (28), (29) получаем

$$\sin^2 \theta (4a^2 - p^2) + 4a^2 \sin \theta + a^2 + p^2 = 1. \quad (31)$$

Подстановка (29) в (31) дает

$$\begin{aligned} F(p, a) = p^5 + 6ap^4 + 2(2a+1)(3a-1)p^3 + 4a(a+1)(2a-1)p^2 - \\ - 12a^2p - 8a^3 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку многочлен  $F(p, a)$  имеет только одну переменную знака в ряду его коэффициентов, то уравнение (32) имеет только один положительный корень  $p = p(a)$ . Этот корень находится в интервале

$$\frac{\sqrt{2}\beta_1}{a + \beta_1} < p < \frac{\sqrt{2}\beta_2}{a + \beta_2}, \quad \beta_1 = 0.47, \quad \beta_2 = 1.66.$$

Таким образом, решения (25) и (26), описывающие соответственно конфигурацию из восьми и десяти тел (см. рис. 2), существуют. Углы  $\theta$  и  $\psi$  находятся для конкретного значения параметра  $a$  ( $0 < a < 1$ ) из формул (28), (29) после определения  $p$  из уравнения (32) с учетом (30).

**6. Исследование устойчивости положения равновесия “восьмерки”**. Для конфигурации “восьмерка”, как установлено в (18), множитель  $\lambda_1$  равен нулю, следовательно  $\mu_1 = 0$ . Тогда (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta^2 L = \frac{k^2}{2} \left[ \sum_{j=1}^{n-1} \cos(\psi_j^0 - \psi_{j-1}^0) X_j^2 + \cos(\psi_n^0 - \psi_{n-1}^0) \left( \sum_{j=1}^{n-1} X_j \right)^2 \right] - \\ - \frac{1}{2} \mu_2 \sum_{j=1}^{n-1} h_j (\sin \psi_j^0) \left( \sum_{i=1}^j X_i \right)^2, \end{aligned} \quad (33)$$

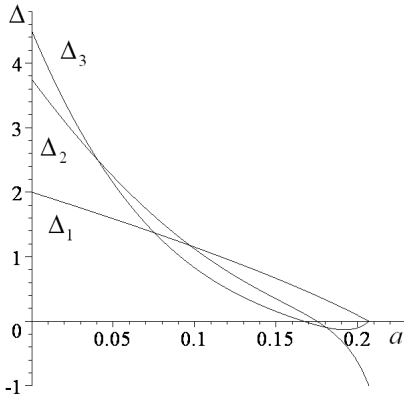


Рис. 3. Случай шести тел.

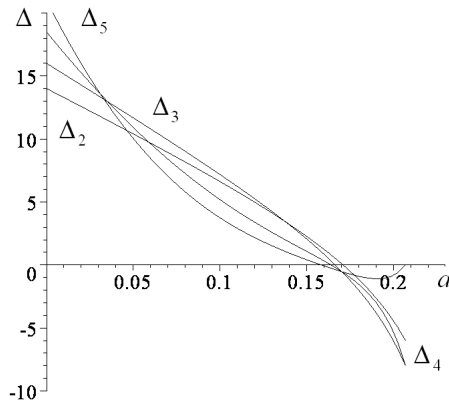


Рис. 4. Восемь тел с шарниром в точке  $O$ .

где множитель  $\mu_2$  определен в (23) для рассмотренных выше случаев.

1. Рассмотрим конфигурацию, представленную на рис. 1, в случае шести тел. Тогда, выражая множитель  $\mu_2$  из (21)–(23) в зависимости от введенных параметров  $a$  и  $p$ , получаем

$$\mu_2 = \frac{2(2a + p)}{ph_2} \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}}. \quad (34)$$

Подстановка решения (19) в (13) с учетом (22) позволяет определить  $X_4$  и  $X_5$  следующим образом

$$X_4 = \frac{(2a + p)X_1 + 2pX_2 - 2pX_3}{2a + p}, \quad X_5 = \frac{(2a + p)X_1 + 2(a + p)X_2 - pX_3}{2a + p}.$$

После исключения этих переменных из (33) и подстановки (34) в (33) получаем квадратичную форму трех переменных  $X_1, X_2, X_3$ , коэффициенты которой являются функциями параметров  $a$  и  $p$ . Эта квадратичная форма будет положительно определена при выполнении критерия Сильвестра  $\Delta_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $\Delta_i$  –  $i$ -ый главный минор матрицы квадратичной формы. Графики функций  $\Delta_i > 0$  представлены на рис. 3. Из них следует, что достаточные условия устойчивости решения (19) выполнены при условии  $a < 0.167$ .

2. Теперь рассмотрим ту же конфигурацию, но уже в случае, когда в точке  $O$  имеется упругий шарнир. Тогда система, изображенная на рис. 1, состоит из восьми тел и решение уравнений равновесия имеет вид (20). Множитель Лагранжа представлен формулой (34), а в качестве зависимых переменных из (13) удобно выразить  $X_5$  и  $X_7$ :

$$X_5 = \frac{(2a + p)X_1 + 2p(X_2 - X_4)}{2a + p},$$



$$X_7 = \frac{(2a + p)[2(X_1 + X_6) + X_3] + 4(a + p)X_2 - 2pX_4}{2a + p}. \quad (35)$$

После подстановки (34), (35) в (33) критерий Сильвестра для полученной квадратичной формы пяти переменных приводит к неравенствам  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1,5}$ . Для  $i = 1$  имеем  $\Delta_1 = 2 + 4\sin^2\theta > 0$ . Численный анализ остальных неравенств с учетом области определения параметров  $a$  и  $p$  из (30), представлен на рис. 4. Из них следует, что условия устойчивости положения равновесия (20) выполнены при  $a < 0.158$ . Таким образом, при введении шарнира в точке  $O$  в конфигурации, изображенной на рис. 1, достаточные условия устойчивости выполняются при меньших значениях параметра  $a = h_1/H_2$ . Этот же эффект отмечен в [5], где достаточные условия устойчивости были получены для случая линейного задания упругого момента.

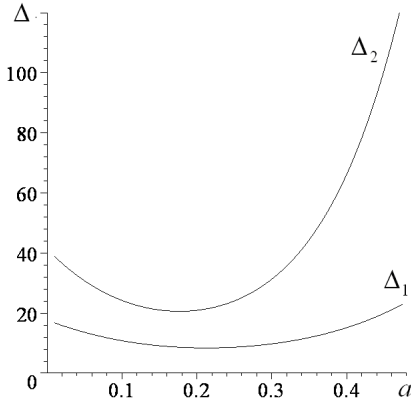


Рис. 5.  $\Delta_1, \Delta_2$ .

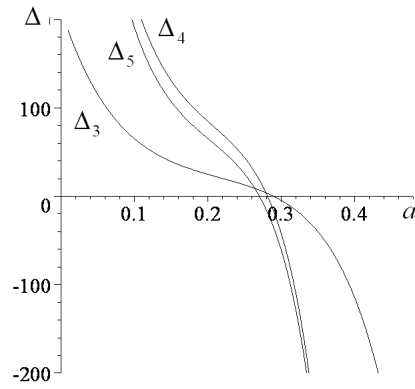


Рис. 6.  $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ .

3. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 2, когда система состоит из восьми тел. Для такой системы из (23), (27)–(29) получим

$$\mu_2 = \frac{2}{H_2(2a + p)}. \quad (36)$$

Из уравнений связи (13) с учетом (27)–(29) определяем

$$\begin{aligned} X_1 = \{ & X_3p[p^2 + p(4a + 1) + 2a(2a + 1)] + X_4[p^3 + h^2(5a + 1) + 2ap(4a + 1) + 4a^3] + \\ & + X_5p[p^2 + p(4a + 1) + 2a(2a + 1)] + X_6p[p^2 + p(3a + 1) + 2a^2] + \\ & + X_7ap(p + a + 1)\} / \{a[p^2 + 4a(p + 1)]\}, \\ X_2 = & -[(X_3 + X_6)(p + a) + (X_4 + X_5)(p + 2a)]/a - X_7. \end{aligned}$$

После исключения этих переменных из (33) получим квадратичную форму, зависящую от пяти переменных. Численный анализ был проведен с учетом неравенств (30).

Показано, что первые неравенства ( $i = 1, 2$ ) всегда выполнены в области (31) (см. рис. 5), а последние ( $i = 3, 4, 5$ ) – при условии  $a < 0.27$  (см. рис. 6). Таким образом, как и в [5], при условии устойчивости конфигурации, представленной на рис. 1, она будет устойчива и для конфигурации, представленной на рис. 2.

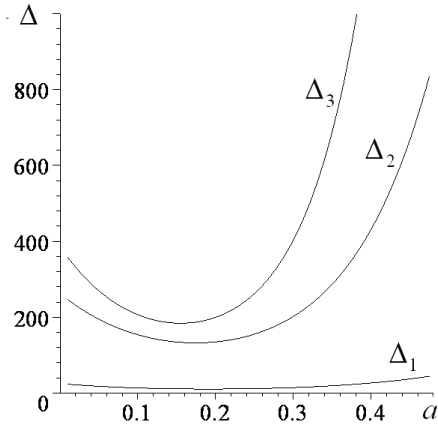


Рис. 7.  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

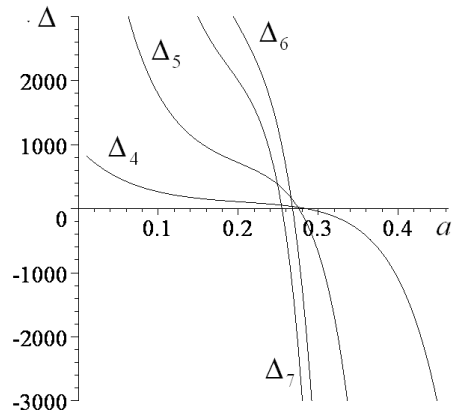


Рис. 8.  $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ .

4. В заключение рассмотрим систему, изображенную на рис. 2, в случае, когда в точке  $O$  имеется упругий шарнир и она состоит из десяти тел. Тогда  $\mu_2$  по-прежнему определено как в (36), где  $a = h_1/H_2$ ,  $H_2 = 2h_2$ , а зависимые переменные определяются из (13) в виде

$$\begin{aligned}
 X_1 = & \{pX_3[p^2 + p(4a + 1) + 2a(2a + 1)] + 2pX_4[p^2 + p(4a + 1) + 2a(2a + 1)] + \\
 & + 2X_5[p^3 + p^2(5a + 1) + 2ap(4a + 1) + 4a^3] + p(2X_6 + X_8)/[p^2 + p(4a + 1) + 2a(2a + 1)] + \\
 & + 2pX_7[p^2 + p(3a + 1) + 2a^2] + 2apX_9[p + (2a + 1)]\} [2a(p^2 + 4ap + 4a^2)], \\
 X_2 = & [(p + 2a)(X_3 + 2X_6 + X_8) + 2(p + a)(X_4 + X_7)]/a + 2X_9.
 \end{aligned}$$

После исключения этих переменных из (33) получаем квадратичную форму, зависящую от семи переменных, которая будет положительно определена в случае выполнения неравенств  $\Delta_i > 0$ ,  $i = \overline{1, 7}$ . Графики функций  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , изображены на рис. 7, 8.

Проведенные исследования позволили установить, что в рассмотренном случае достаточные условия устойчивости выполнены при условии  $a < 0.25$ , значение которого меньше, чем в случае отсутствия шарнира в точке  $O$ .

1. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
2. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
3. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // Там же – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
4. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия упругих систем с двумя самопересечениями // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2008. – 16. – С. 26–33.
5. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Устойчивость положения равновесия замкнутой системы тел, конфигурации “восьмерка” // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
6. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Необходимые условия устойчивости относительного равновесия замкнутой “круговой” системы // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 173–184.
7. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
9. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
10. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1976. – 534 с.
12. Bolgrabskaya I. A., Savchenko A. Ya., Shchepin N. N. Stability of two-dimensional equilibrium positions of closed-loop systems // Тез. докл. 10 междунар. конф. “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” (5–10 июня 2008, Донецк). – Донецк, 2008. – С. 110–111.

I.A. Bolgrabskaya, N.N. Shchepin

### Sufficient stability conditions of equilibrium position of the closed multibody system

The closed system consisting of  $n$  Lagrange gyroscopes connected by elastic cylindrical joints is considered. This system can be regarded as a finite dimensional model of the elastic rod which axis is located in one plane during all time of motion. It was supposed, that the elastic moment in joints is essentially nonlinear. Sufficient conditions of stability for a “circular” and “eight form” configurations are obtained. The influences of joint presence in a point of rod axis intersection on stability area is investigated.

**Keywords:** closed multibody system, elastic joint, equilibrium stability.

I.O. Болграбська, М.М. Щепін

### Достатні умови стійкості стану рівноваги замкнутої системи тіл

Розглянуто замкнену систему  $n$  гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружними циліндричними шарнірами. Ця система може служити скінченновимірною моделлю пружного стержня, вісь якого розташована в одній площині у весь час руху. Вважалося, що пружний момент у шарнірах суттєво нелінійний. Визначено достатні умови стійкості для “кругової” конфігурації і конфігурації типу “вісімка”. Досліджено вплив на область стійкості наявності шарніра в точці перетинання осі модельованого стержня.

**Ключові слова:** замкнена система тіл, пружний шарнір, стійкість стану рівноваги.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
bolg@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.04.10