

УДК 629.78, 534.01

©2010. А.И. Маслова, А.В. Пироженко

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В КОЛЕБАНИЯХ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассматривается движение космического аппарата (КА) в режиме гравитационной стабилизации, когда удвоенная частота собственных колебаний близка к утроенной частоте орбитального движения. Исследования проводятся с учетом изменений плотности атмосферы при орбитальном движении КА и зависимости коэффициента аэродинамического момента от ориентации КА. На основе метода усреднения построена методика исследования решений уравнений типа Хилла и определены основные закономерности движения КА в рассматриваемом случае.

Ключевые слова: движение космического аппарата, параметрический резонанс, уравнения Хилла, метод усреднения.

Введение. Рассматривается движение относительно центра масс класса космических аппаратов (КА) с гравитационной системой стабилизации (ГСС). ГСС представляет собой прикрепленную к КА штангу с гравитационным грузом на конце. Исследуется движение КА в режиме гравитационной стабилизации, т.е. в таком режиме, при котором продольная ось КА движется в окрестности местной вертикали и амплитуды колебаний невелики. Рассматривается движение КА в плоскости почти круговых ($e \leq 0.002$) орбит на высотах 550–750 км.

Движение КА происходит под воздействием гравитационного и аэродинамического моментов. Модель аэродинамического момента учитывает изменения плотности атмосферы при движении КА по орбите [1], а также непостоянство коэффициента аэродинамического момента при изменении ориентации КА по отношению к набегающему потоку [2]. Моделирование плотности атмосферы проводится с учетом суточного эффекта вздутия атмосферы на солнечной стороне Земли и с учетом изменений высоты орбиты, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли и эллиптичностью орбиты. Как показано в [1], рассматриваемые изменения $\tilde{\rho}(t)$ плотности атмосферы ρ хорошо описываются рядом Фурье с удержанием первых трех гармоник:

$$\rho(t) = b_0[1 + \tilde{\rho}(t)] = b_0\left[1 + \sum_{n=1}^3 b_n \cos(n\omega_0 t + f_n)\right], \quad (1)$$

где b_0 – средняя на орбите плотность атмосферы; b_n, f_n – коэффициенты, характеризующие распределение плотности при движении КА по орбите; ω_0 – средняя угловая скорость орбитального движения.

Уравнение движения КА относительно центра масс в плоскости эллиптической орбиты имеет вид [3]

$$B(\ddot{\varphi} + \dot{\omega}) = -3\frac{\mu_3}{R^3}(A - C) \sin \varphi \cos \varphi + M_a,$$

где φ – угол между местной вертикалью и наибольшей осью эллипсоида инерции (продольной осью) КА; A, B, C – главные центральные моменты инерции КА; ω – угловая скорость орбитального движения; μ_3 – гравитационная постоянная Земли; R – расстояние от центра Земли до центра масс КА; M_a – момент аэродинамических сил; точки означают дифференцирование по времени t .

Рассмотрение движения КА в плоскости орбиты традиционно для анализа закономерностей движения КА [3–5] и правомерно, так как, во-первых, такое движение возможно, а во-вторых, во многих случаях [3, 6] малые колебания в плоскости орбиты (угол тангажа) не зависят от поперечных колебаний КА (угол крена).

В [2] было показано, что при движении КА с ГСС в режиме гравитационной стабилизации аэродинамический момент можно представить в виде

$$M_a = a_0(1 - \sigma_a \cos \alpha) \frac{\rho V^2}{2},$$

где коэффициенты a_0 и σ_a характеризуют взаимодействие рассматриваемого КА с набегающим потоком; α – угол между вектором скорости набегающего потока и продольной осью КА; V – модуль скорости набегающего потока.

Движение КА в режиме гравитационной стабилизации можно рассматривать [7, 8] как малые колебания $\tilde{\varphi}(t)$ относительно некоторого положения φ_0 продольной оси КА (назовем его средним положением), т.е.

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(t).$$

Среднее положение φ_0 определяется равенством гравитационного и аэродинамического моментов при постоянной, равной средней, плотности атмосферы и пренебрежении изменением скорости набегающего потока в силу эллиптичности орбиты. Из уравнения движения можно получить [7, 8], что среднее положение КА определяется выражением

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 = S(1 + \sigma_a \sin \varphi_0),$$

где S – безразмерный параметр.

В [7, 8] построены уравнения малых колебаний КА относительно φ_0 и на их основе исследованы закономерности движения в нерезонансных случаях. При построении уравнений движения КА с ГСС в [7, 8] введены интегральные параметры, характеризующие инерционные и аэродинамические свойства КА. Определены диапазоны изменений этих параметров, а также требования к области их изменения, для которой движение КА происходит в режиме гравитационной стабилизации.

1. Постановка задачи. Малые колебания КА как на круговой, так и на слабоэллиптической орбите описываются уравнениями типа Хилла с периодическими коэффициентами и периодической правой частью. Для круговой орбиты уравнение малых колебаний имеет вид [7]

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + (k^2 - \delta\tilde{\rho}(\tau))\tilde{\varphi} = q\tilde{\rho}(\tau), \quad (2)$$

где $\tilde{\varphi}$ – угол отклонения продольной оси КА от ее среднего положения; штрих означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$; k – приведенная частота свободных колебаний КА; δ – малый коэффициент, наличие которого обусловлено непостоянством коэффициента аэродинамического момента; q – коэффициент, характеризующий амплитуду аэродинамического момента.

На слабоэллиптической орбите малые колебания КА описываются уравнением [8]

$$z'' + (k^2 - \delta\tilde{\rho}(\nu) + \chi \cos \nu)z = q\tilde{\rho}(\nu) + 2e \sin \nu, \quad (3)$$

где $z = \tilde{\varphi}(1 + e \cos \nu)$; e – эксцентриситет орбиты; ν – истинная аномалия; штрих означает дифференцирование по ν ; k , δ , q – имеют тот же смысл, что и на круговой орбите; χ – малая величина, зависящая от e .

Уравнения (2), (3) можно отнести к более общему виду уравнений

$$\ddot{y} + (k^2 + \varepsilon P(t))y = F(t), \quad (4)$$

где y – искомая величина; k – постоянный коэффициент; $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр; t – независимая переменная; $P(t)$, $F(t)$ – функции, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации синусов и косинусов с частотами a_{P_i} , $i=1, 2, \dots, l$, и a_{F_i} , $i=1, 2, \dots, m$, соответственно.

Выделение малого параметра в (4) подразумевает, что другие параметры системы и начальные условия y_0 , \dot{y}_0 являются величинами порядка единицы, т.е. k , y_0 , \dot{y}_0 , A_{P_i} , $A_{F_i} \sim 1$, где A_{P_i} , A_{F_i} – амплитуды функций $P(t)$ и $F(t)$ при соответствующих частотах.

В [7] была разработана методика исследования уравнений вида (4) в нерезонансных случаях и построены [7, 8] приближенные аналитические решения уравнений (2), (3) соответственно. Показано, что приведенная частота собственных колебаний не может принимать целых значений ($1.17 \leq k \leq 1.76$), в то время как частоты a_{P_i} и a_{F_i} являются целыми числами. Было также показано, что резонансные движения КА в рассматриваемом случае могут возникать только при близости удвоенной частоты собственных колебаний к утроенной частоте орбитального движения, т.е. когда $2k \approx 3$.

В данной статье рассматривается движение КА при параметрическом резонансе $2k \approx 3$. Целью исследований является определение основных закономерностей движения КА при таком резонансе.

Анализ общеизвестных методик исследований уравнений Хилла типа (4) [9–11] показал, что они не вполне подходят для рассматриваемой задачи. Дело в том, что в большинстве своем эти методики направлены на определение границ областей устойчивости уравнения и на построение высокоточных его решений. При этом предлагаемые процедуры достаточно громоздки и носят характер формальных математических преобразований, далеких от механического содержания. В рассматриваемом же случае уравнения (2), (3) лишь приблизительно описывают динамику КА. И дело не только в линеаризации исходных уравнений. Сама модель динамики носит приближенный характер. Например, модель (1) плотности атмосферы не учитывает эволюцию орбиты КА, а также сезонные и другие долгопериодические изменения плотности, не говоря уже о случайных ее вариациях [1]. Принятую модель динамики можно считать достаточно точной на промежутке времени 2–3-х суток, т.е. не более 50 витков КА по орбите. В такой постановке задачи громоздкие построения точных границ устойчивости и точных решений уравнения (4) просто не имеют смысла.

Отметим, что уравнения (4) отличаются от большинства рассматриваемых аналогичных уравнений отсутствием малого параметра в правой части уравнений. Это относится, в частности, к уравнениям эксцентриситетных колебаний спутника в плоскости орбиты [3, 4]. Отметим также, что в отличие от исследований эксцентриситетных колебаний [3, 4] целью проводимых исследований является не определение амплитудно-частотных характеристик установившихся режимов, а изучение закономерностей изменения малых колебаний при резонансе. Эти особенности уравнений и постановки цели исследований и определяют особенности предлагаемой методики.

2. Методика исследования движения в окрестности параметрического резонанса. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4) с начальными условиями y_0, \dot{y}_0 , когда удвоенная собственная частота близка к частоте изменения параметра, т.е. $2k \approx a_P$, где a_P – одна из частот a_{Pi} . Без потери общности будем считать, что свободные члены $P(t), F(t)$ равны нулю.

Понижение порядка правой части уравнения осуществляется заменой переменных, основанной на выделении в решении вынужденных колебаний системы при $\varepsilon = 0$. Для исследования решений уравнения (4) введем новую переменную y_1

$$y_1 = y - \tilde{y}^0,$$

где \tilde{y}^0 – частное решение уравнения $\ddot{y} + k^2\tilde{y} = F(t)$, описывающее вынужденные колебания, т.е.

$$\tilde{y}^0 = \sum_{i=1}^m \frac{A_{Fi}}{k^2 - (a_{Fi})^2} \sin(a_{Fi}t + \beta_{Fi}),$$

где β_{Fi} – сдвиг фазы, соответствующий частоте a_{Fi} , при представлении $F(t)$

в ряд по синусам. Так как система не находится в окрестности линейного резонанса, то амплитуда каждого слагаемого имеет порядок единицы.

Уравнение для y_1 запишется в виде

$$\ddot{y}_1 + (k^2 + \varepsilon P(t))y_1 = -\varepsilon P(t)\tilde{y}^0 = \varepsilon F_1(t); \quad (5)$$

$F_1(t)$ можно представить в виде суммы свободного члена и линейной комбинации элементарных тригонометрических функций с частотами $|a_{P_i} \pm a_{F_i}|$.

Заменой переменных $\tilde{y}_1 = y_1 - y_1^0$, где $y_1^0 = \varepsilon F_{10}/k^2$, а F_{10} – свободный член F_1 , приведем уравнение (5) к виду уравнения (4), но с правой частью, пропорциональной ε

$$\ddot{\tilde{y}}_1 + (k^2 + \varepsilon P(t))\tilde{y}_1 = \varepsilon(F_1 - P(t)y_1^0) = \varepsilon \tilde{F}_1(t). \quad (6)$$

К частотам F_1 в \tilde{F}_1 прибавятся частоты a_{P_i} . Изменятся также и начальные условия

$$\tilde{y}_1(0) = y_0 - y_1^0 - \sum_{i=1}^m \frac{A_{F_i} \sin(\beta_{F_i})}{k^2 - (a_{F_i})^2}, \quad \dot{\tilde{y}}_1(0) = \dot{y}_0 - \sum_{i=1}^m \frac{a_{F_i} A_{F_i} \cos(\beta_{F_i})}{k^2 - (a_{F_i})^2}.$$

Таким образом, проведенная замена переменных позволила явно ввести в правую часть уравнений (4) малый параметр, что дает возможность применить асимптотические методы для исследования движений. Отметим, что процедура понижения порядка правой части уравнения (построения частного решения (4)) может быть продолжена.

Построение системы сравнения выполняется в соответствии с известной методикой метода усреднения [10, 11]. Введем в уравнении (6) новые переменные B и w – амплитуду и фазу колебаний \tilde{y}_1

$$\tilde{y}_1 = B \cos w, \quad \dot{\tilde{y}}_1 = -Bk \sin w.$$

Нетрудно получить, что уравнения для B и w имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{\varepsilon B}{2k} P(t) \sin 2w - \frac{\varepsilon}{k} \tilde{F}_1(t) \sin w, \\ \dot{w} &= k + \frac{\varepsilon}{k} P(t) \cos^2 w - \frac{\varepsilon}{kB} \tilde{F}_1(t) \cos w, \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. приводятся к виду, стандартному для применения метода усреднения.

Так как фаза колебаний w меняется с частотой k , то для исследования движения в окрестности параметрического резонанса $2k \approx a_P$ удобно ввести новую переменную $\alpha = w - \frac{1}{2}a_P t$. Тогда система (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \frac{\varepsilon B}{2k} P(t) \sin(2\alpha + a_P t) - \frac{\varepsilon}{k} \tilde{F}_1(t) \sin(\alpha + \frac{1}{2}a_P t), \\ \dot{\alpha} &= k - \frac{1}{2}a_P + \frac{\varepsilon}{k} P(t) \cos^2(\alpha + \frac{1}{2}a_P t) - \frac{\varepsilon}{kB} \tilde{F}_1(t) \cos(\alpha + \frac{1}{2}a_P t). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $2k \approx a_P$, то можно считать, что $k - \frac{1}{2}a_P$ – малая величина. Тогда B и α являются медленными переменными, а быстрой переменной – время t .

Применим процедуру усреднения по времени к системе (8). Нетрудно видеть, что при $a_{Fi} \neq \frac{1}{2}a_P$ слагаемые, отражающие неоднородность уравнения движения (6) (содержащие $\tilde{F}_1(t)$), обнулятся.

Представим $P(t)$ в виде

$$P(t) = A_P \cos(a_P t + \gamma_P) + \bar{P}(t), \quad (9)$$

где A_P, γ_P – амплитуда и сдвиг фазы гармоники с частотой a_P при разложении функции $P(t)$ в ряд по косинусам; $\bar{P}(t)$ – часть разложения функции $P(t)$ в ряд по косинусам, не содержащая частоту a_P .

Учитывая (9), усредненную систему уравнений можно записать в виде

$$\dot{\tilde{B}} = \frac{A_P \varepsilon \tilde{B}}{4k} \sin(\bar{\alpha}), \quad (10)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = 2k - a_P + \frac{A_P \varepsilon}{2k} \cos(\bar{\alpha}), \quad (11)$$

где $\bar{\alpha} = 2\tilde{\alpha} - \gamma_P$ – усредненный сдвиг фазы между удвоенной фазой собственных колебаний и фазой изменения параметра.

Система уравнений (10), (11) является системой сравнения для уравнения (6): решение системы уравнений (10), (11) с точностью порядка ε описывает решение уравнения (6) на интервале времени порядка $1/\varepsilon$.

Учитывая все замены переменных, получаем, что в рассматриваемом случае параметрического резонанса решение уравнения (4) в первом приближении является суммой вынужденных колебаний неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, получаемого из (4) при $\varepsilon = 0$, малой константы y_1^0 и решения следующего уравнения Матье

$$\ddot{\tilde{y}}_1 + (k^2 + A_P \varepsilon \cos(a_P t + \gamma_P))\tilde{y}_1 = 0. \quad (12)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае влияние неоднородности уравнения (4) на резонансные колебания в первом приближении сказывается только в изменении начальной амплитуды.

Анализ движения в окрестности параметрического резонанса направлен на определение основных закономерностей и отличается от известных исследований (см., напр., [10, 11]).

Отметим, что уравнение (11) для $\bar{\alpha}$ интегрируется и сводится к табличным интегралам. Эти интегралы, вообще говоря, позволяют определить закономерности изменений решений системы (10), (11), но их громоздкие выражения существенно затрудняют анализ.

Будем предполагать, что начальное значение $\bar{\alpha}_0$ сдвига фаз $\bar{\alpha}$ может принимать произвольные значения на отрезке $[0, 2\pi]$, $A_P > 0$. Тогда для любых

соотношений частот, при $\bar{\alpha}_0 \in (\pi, 2\pi)$, на начальном интервале времени будет наблюдаться уменьшение амплитуды колебаний – случай „противофазного“ изменения параметра. В силу медленности изменения $\bar{\alpha}$ это уменьшение амплитуды может быть достаточно продолжительным.

1) При соотношении частот таком, что $|2k - a_P| > |\frac{A_P \varepsilon}{2k}|$, функция $\bar{\alpha}$ – монотонна во времени. Переходя в этом случае в уравнении (10) к дифференцированию по $\bar{\alpha}$, нетрудно получить, что \tilde{B} изменяется по закону

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0 \frac{\sqrt{|\mu + 2 \cos(\bar{\alpha}_0)|}}{\sqrt{|\mu + 2 \cos(\bar{\alpha})|}}, \quad \mu = \frac{2k - a_P}{A_P \varepsilon / 4k}, \quad (13)$$

где \tilde{B}_0 , $\bar{\alpha}_0$ – начальные значения амплитуды и сдвига фаз соответственно; μ – постоянный коэффициент ($|\mu| > 2$).

Выражение (13) описывает режим движения долгопериодического изменения амплитуды собственных колебаний в зависимости от изменения сдвига фаз $\bar{\alpha}$. При определенных параметрах и начальных значениях сдвига фаз $\bar{\alpha}_0$, когда величина $|\mu|$ близка к 2, рост амплитуды может быть настолько значителен, что нарушается возможность использования уравнений малых колебаний. В этом режиме движения, устойчивом с математической точки зрения, существует область параметров, в которой возможным является движение со столь большой амплитудой, что теряется физическая и техническая устойчивость системы.

На рис. 1 представлены результаты расчетов решения уравнения Матье (12) при следующих значениях параметров и начальных условий: $A_P = 3.75$, $k = 1.5616$, $\varepsilon = 0.1$, $\gamma_P = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$. Сплошной линией изображено численное решение уравнения (12), жирной линией с кружочками – изменение усредненной амплитуды колебаний \tilde{B} . Рис. 1 наглядно демонстрирует свойства решения усредненной системы: высокую точность на начальном $\sim 1/\varepsilon$ промежутке времени, и отражение основной закономерности изменения решения неусредненной системы. Как видно из рисунка, амплитуда колебаний может возрастать более чем в 10 раз. В этом случае говорить о физической устойчивости малых колебаний некорректно.

2) При соотношении частот таком, что $|2k - a_P| < |\frac{A_P \varepsilon}{2k}|$, из уравнения (11) получим, что существует два положения равновесия $\bar{\alpha}_c$, определяемые условием $2k - a_P + \frac{A_P \varepsilon}{2k} \cos(\bar{\alpha}_c) = 0$. Из уравнения (11) и его квадратуры следует, что положение равновесия устойчиво, если $\sin(\bar{\alpha}_c) > 0$, и неустойчиво, если $\sin(\bar{\alpha}_c) < 0$. Это становится очевидным, если рассмотреть уравнения малых изменений $\bar{\alpha}$

$$\delta \dot{\alpha} = 2k - a_P + \frac{A_P \varepsilon}{2k} \cos(\bar{\alpha}_c) - \frac{A_P \varepsilon}{2k} \delta \alpha \sin(\bar{\alpha}_c), \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}_c + \delta \alpha.$$

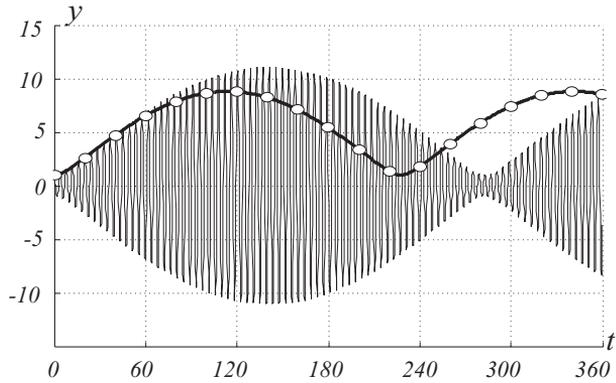


Рис. 1. Решение уравнения Матье (12) в случае близости системы к параметрическому резонансу.

Таким образом, в этом режиме движения сдвиг фаз $\bar{\alpha}$ стремится к своему устойчивому положению равновесия $\bar{\alpha}_c$. При $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_c = \text{const}$ амплитуда колебаний растет по экспоненциальному закону

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0 e^{\frac{A_P \varepsilon}{4k} \sin(\bar{\alpha}_c)(t-t_0)},$$

где \tilde{B}_0 – значение амплитуды в начальный момент времени t_0 .

На рис. 2 представлены, аналогично рис. 1, результаты расчетов решения уравнения (12) при следующих значениях параметров и начальных условий: $A_P = 2.3$, $k = 1.5373$, $\varepsilon = 0.1$, $\gamma_P = 3\pi/4$, $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 0$. Как видим, отмеченные свойства решения усредненной системы не меняются и при экспоненциальном росте амплитуды. Из рис. 2 также видно, что на начальном этапе может происходить существенное и достаточно продолжительное уменьшение амплитуды колебаний.

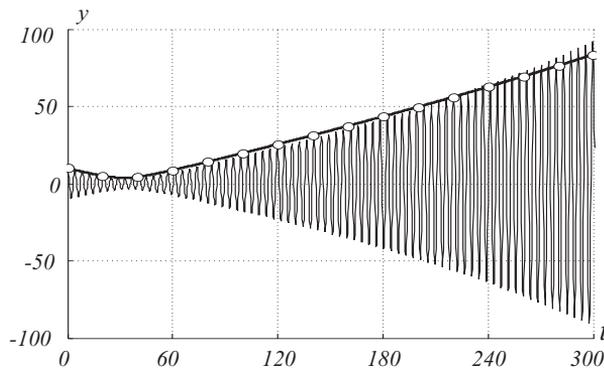


Рис. 2. Решение уравнения Матье (12) при параметрическом резонансе.

Граница области неустойчивости движения определяется равенством $|2k - a_P| = \left| \frac{A_P \varepsilon}{2k} \right|$. Отсюда

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} \right)^2 + \dots \leq \frac{k^2}{a_P^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} \right)^2 + \dots \quad (14)$$

В теории колебаний найдены решения и области устойчивости уравнения Матье (см., напр., [12]). Первая область неустойчивости этого уравнения в обозначениях выражения (14) имеет вид

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} \right)^2 + \dots \leq \frac{k^2}{a_P^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{A_P \varepsilon}{a_P^2} \right)^2 + \dots \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) в первом приближении по ε совпадают.

Рассмотрим случай, когда $|2k - a_P| > \left| \frac{A_P \varepsilon}{2k} \right|$. Вообще говоря, тогда $|\mu| > 2$ и амплитуда \tilde{B} никогда не становится бесконечно большой. Однако при $|\mu| \approx 2$ рост амплитуды может быть существенным. Рассматривая максимально возможную амплитуду \tilde{B} в зависимости от $\bar{\alpha}_0$, получим, что амплитуда колебаний \tilde{B} может увеличиваться относительно начального значения \tilde{B}_0 более чем в N раз при выполнении условия $\frac{|\mu| + 2}{|\mu| - 2} > N^2$, или при

$$\frac{1}{4} - \chi - \chi^2 + \dots \leq \frac{k^2}{a_P^2} \leq \frac{1}{4} + \chi - \chi^2 + \dots, \text{ где } \chi = \frac{N^2 + 1}{N^2 - 1} \frac{A_P \varepsilon}{2a_P^2}. \quad (16)$$

На рис. 3 изображены области устойчивости уравнения Матье при $A_P = 2.3$. Границы областей неустойчивости 1 и 2 рассчитаны по формулам (14) и (15) соответственно. Как видим, они практически совпадают. Границей 3, рассчитанной по (16), выделена область изменения частоты, в которой возможно увеличение начальной амплитуды более чем в 3 раза.



Рис. 3. Области устойчивости движения.

3. Численные оценки. Численные исследования решений уравнения (4) и их сравнение с приближенным решением, построенным согласно изложенной методике, дали следующие результаты. На начальном интервале

времени наблюдается хорошее совпадение приближенного и точного решений. Приближенное решение верно отражает закономерность изменения решения исходного уравнения. Вместе с тем, с течением времени отличия между приближенным и точным решениями растут. Причем рост этих отличий несколько выше, чем для уравнения Матье.

Отметим, что параметрический резонанс в уравнении Хилла имеет место и при других соотношениях частот $k/a_P \approx m/2$, где $m = 1, 2, \dots$ [13]. Чем больше m , тем слабее его проявление, а в первом приближении по ε проявляется только основной резонанс $m = 1$. Так как в уравнениях (2), (3) параметр содержит гармонику $a_P = 1$, то в движении системы имеет место и резонанс $k/a_P \approx 3/2$. Однако, его проявление в рассматриваемом случае незначительно. Численные исследования уравнения (4) показали также, что при сочетании двух гармоник с частотами $a_{P1} = 1$ и $a_{P2} = 2$ ($a_{P3} = 0$) имеет место усиление параметрического резонанса. По-видимому, в этом случае возникает своего рода комбинационный параметрический резонанс [9] $2k \approx a_{P1} + a_{P2}$ (при комбинации возмущающих, а не собственных частот).

Анализ движения КА с ГСС в случае, когда $2k \approx 3$, дал следующие результаты. Область неустойчивости малых колебаний очень узка: интервал неустойчивости лежит в границах ошибки определения частоты собственных колебаний КА, связанных, например, с неточностью задания моментов инерции КА. Изменения амплитуды колебаний при параметрическом резонансе не превосходят единиц процентов от амплитуды вынужденных колебаний на рассматриваемом промежутке времени (порядка 50 витков по орбите).

Так, при движении КА с ГСС по круговым орбитам произведение $A_P \varepsilon$ определяется следующим образом: $A_P \varepsilon = 3Is\sigma_a b_3 \cos \varphi_0$, где $I = (A - C)/B$. Ранее было показано [7], что для рассматриваемых движений КА с ГСС $0.5 \leq I < 1$, $s \leq 0.1$, $\sigma_a \leq 0.5$, $b_3 \leq 0.02$, $\varphi_0 \leq 6^\circ$. Тогда для рассматриваемых круговых орбит максимальное значение произведения

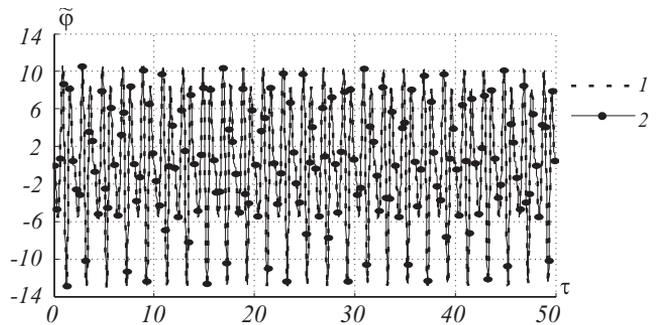


Рис. 4. Колебания КА при параметрическом резонансе.

$A_P \varepsilon$, которое определяет изменение амплитуды колебаний и ширину области неустойчивости движения при параметрическом резонансе, очень мало $A_P \varepsilon \approx 0,003$. Области неустойчивости движения будут очень узкими. Экспоненциальный рост амплитуды колебаний на круговых орбитах будет наблюдаться в случаях, когда приведенная частота собственных колебаний изменяется в диапазоне $1.4995 \leq k \leq 1.5005$, т.е. отличается от резонансной частоты на

десятитысячные величины. Диапазон изменения частоты, при котором амплитуда будет увеличиваться более, чем в 3 раза, также довольно узкий и слабо отличается от резонансной частоты: $1.4994 \leq k \leq 1.5006$.

На рис. 4 представлены результаты расчетов движения КА практически с максимально возможным эффектом параметрического резонанса. Изображено изменение угла $\tilde{\varphi}$ в градусах в зависимости от времени τ , выраженного в количестве витков КА по орбите. Расчеты приводятся для КА с $I = 0.8078$, $\sigma_a = 0.5$, $s = 0.1$, $\varphi_0 \leq 6^\circ$, тогда $k = 1.5$ при движении по круговой полярной орбите на высоте 625 км; плоскость орбиты проходит через максимальное значение плотности в ее суточном распределении, $b_3 = 0.018$; начальные условия нулевые.

Результаты численных расчетов уравнения (2) (пунктир 1) и результаты расчетов согласно предложенной методике (линия 2) на интервале времени τ , соответствующем 50 виткам по орбите, практически совпадают. На рис. 4 представлен случай движения КА при параметрическом резонансе, когда амплитуда сначала убывает. Как видим, убывание амплитуды продолжается на протяжении всех 50 витков, при этом амплитуда $\tilde{\varphi}$ уменьшилась приблизительно на 0.4° .

Выводы. Исследовано движение КА при параметрическом резонансе, обусловленном переменностью аэродинамического момента, когда удвоенная частота собственных колебаний близка к утроенной частоте орбитального движения. Показано, что малые колебания КА относительно центра масс на слабоэллиптических орбитах описываются уравнением типа Хилла. Разработана методика исследований уравнений типа Хилла, позволяющая определять основные закономерности решений. Показано, что область неустойчивости малых колебаний очень узка: интервал неустойчивости лежит в границах ошибки определения частоты собственных колебаний КА, связанных, например, с неточностью задания моментов инерции КА. Изменения амплитуды колебаний КА при параметрическом резонансе не превосходят единиц процентов от амплитуды вынужденных колебаний на рассматриваемом промежутке времени порядка 50 витков по орбите.

1. Маслова А.И., Пироженко А.В. Изменения плотности атмосферы при движении космических аппаратов на низких околоземных орбитах // Космічна наука і технологія. – 2009. – 15, № 1. – С. 13–18.
2. Маслова А.И., Пироженко А.В. Аппроксимация момента аэродинамических сил, действующих на космический аппарат с гравитационной системой стабилизации // Техн. механика. – 2008. – № 1. – С. 9–20.
3. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
4. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1975. – 308 с.
5. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники: исследование космического пространства. – М.: ВИНТИ, 1978. – 223 с.

6. Сарычев В.А. Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли // Космич. исслед. – 1964. – 2, № 1. – С. 23–32.
7. Маслова А.И., Пироженко А.В. Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно-стабилизированного КА в плоскости круговой орбиты // Техн. механика. – 2009. – № 3. – С. 87–97.
8. Маслова А.И. Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно стабилизированного КА в плоскости слабоэллиптической орбиты // Там же. – 2009. – № 4. – С. 68–76.
9. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
11. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
12. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984. – 272 с.

A.I. Maslova, A.V. Pirozhenko

Parametric resonance in oscillations of the spacecraft at effect of the variable aerodynamic moment

The motion of a spacecraft in a mode of gravitational stabilization when the double frequency of own oscillations is close to triple frequency of orbital motion is considered. Researches are carried in view of atmosphere density changes at spacecraft orbital motion and relation of the aerodynamic moment coefficient to orientation of spacecraft. On the basis of a method of averaging the technique of research of Hilla's type equations solutions is constructed and main laws of spacecraft motion in a considered case are determined.

Keywords: *spacecraft motion, parametric resonance, Hilla's equations, method of averaging.*

Г.І. Маслова, О.В. Пироженко

Параметричний резонанс в коливаннях космічного апарату при впливі змінного аеродинамічного моменту

Розглядається рух космічного апарату (КА) в режимі гравітаційної стабілізації, коли подвоєна частота власних коливань близька до потроєної частоти орбітального руху. Дослідження проводяться з урахуванням змін щільності атмосфери при орбітальному русі КА та залежності коефіцієнта аеродинамічного моменту від орієнтації КА. На основі методу усереднення побудовано методику дослідження розв'язків рівнянь типу Хілла і визначено основні закономірності руху КА в розглянутому випадку.

Ключові слова: *рух космічного апарату, параметричний резонанс, рівняння Хілла, метод усереднення.*

*Ин-т техн. механіки НАН України и НКА України,
Днепропетровск*

maslova_anjyta@mail.ru

Получено 15.03.10