УДК 531.38

©2010. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

# УРАВНЕНИЯ ГОДОГРАФОВ ТЕЛ В ОПОРНОМ БАЗИСЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Рассмотрен случай, когда траектория точки $O$ является пространственной сферической кривой. На траектории этой точки опорная система координат определена естественным базисом. Получены уравнения годографов тел в опорном базисе.

**Ключевые слова:** *система гироскопов Лагранжа, годограф, неголономный шарнир, опорный базис.*

В работе [1] дана постановка задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром [2], получено точное решение задачи при нулевом значении постоянной интеграла, выражающего сохранение момента количества движения системы. В статье [3] продолжено изучение данного случая при дополнительном ограничении — одно из тел закреплено в центре масс. Выделен класс движений, для которых траектория точки $O$ — плоская кривая. С помощью этой кривой введен неподвижный базис и получены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел.

**Исходные соотношения.** В работе [3] указано решение задачи при нулевом значении момента количества движения системы и дополнительном ограничении — одно из тел системы закреплено в центре масс.

Рассмотрим случай, когда тела $S$ и $S_0$ соединены неголономным шарниром, а входящий в уравнения движения момент упругих сил отсутствует

$$\Pi'(\theta) = 0. \tag{1}$$

Запишем решение работы [1] при этом условии

$$n(u) = \frac{CJ}{\sqrt{1+bu^2}}, \tag{2}$$

$$\omega_2(u) = \frac{(1+b)un(u)}{A\sqrt{1-u^2}}, \tag{3}$$

$$\omega_3(u) = -\frac{n(u)}{1-u^2}\Big[\frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{(1+b)u^2}{A}\Big], \tag{4}$$

$$n_0(u) = bun(u), \tag{5}$$

$$\Omega_2(u) = -\frac{(1+bu^2)n(u)}{A_0\sqrt{1-u^2}}, \tag{6}$$

$$\Omega_3(u) = -\frac{un(u)}{1-u^2}\Big[\frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{1+b}{A}\Big], \tag{7}$$

$$\omega_1(u) = -\frac{A_0}{A}\Omega_1(u), \tag{8}$$

$$\dot{\theta} = \Omega_1(u) - \omega_1(u), \tag{9}$$

где

$$u = \cos\theta, \tag{10}$$

$$b = \frac{(A-J)J_0}{(A+J_0)J} \neq 0 \quad (A \neq J). \tag{11}$$

Так как уравнения движения [1] этой задачи допускают интеграл энергии $A(\omega_1^2+\omega_2^2)+A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2)-2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2)+\dfrac{n^2}{J}+\dfrac{n_0^2}{J_0} = 2h$, то, подставив в него (1)—(3), (5), (6), (8), (10), можем найти $\Omega_1(u)$, а следовательно, и $\omega_1(u)$.

Так как одно из тел закреплено в центре масс, величина

$$N = mm_0ll_0/(m+m_0) = 0. \tag{12}$$

При условиях (1), (12) удобнее использовать уравнения движения (8), (9) работы [1] тела $S_0$:

$$\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\Omega_3 = -\frac{\Omega_2 n_0}{A_0}, \qquad \dot{\Omega}_2 + \Omega_1\Omega_3 = \frac{\Omega_1 n_0}{A_0}. \tag{13}$$

Из (13) получаем

$$\Omega_1\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\dot{\Omega}_2 = 0. \tag{14}$$

Следовательно, переменные $\Omega_1, \Omega_2$ связаны соотношением

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \sigma_0^2 = \text{const}, \tag{15}$$

откуда с учетом (6), (2) устанавливаем, что

$$\Omega_1(u) = \sqrt{\sigma_0^2 - \frac{C^2J^2(1+bu^2)}{A_0^2(1-u^2)}}. \tag{16}$$

Подставив (8) в (9), представим его в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \tag{17}$$

где введен безразмерный параметр $k_* = A/(A+A_0)$. Внесем (16) в (17), получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{k_*}\sqrt{\sigma_0^2 - \frac{C^2J^2(1+bu^2)}{A_0^2(1-u^2)}}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(-\sin\theta)$, учтем обозначение (10), представим
$$\frac{du}{dt} = -\frac{\sigma_0}{k_* a_*}\sqrt{a_*^2 - 1 - (a_*^2 + b)u^2}, \tag{18}$$
где вместо постоянной интегрирования $C$ введен безразмерный параметр $a_* = A_0\sigma_0/(JC)$.

Ввиду произвольности $C$, а, следовательно, и $a_*$, будем рассматривать те значения $C$, для которых
$$a_*^2 > 1. \tag{19}$$

Отметим, что из (11) следует
$$1 + b = \frac{A(J + J_0)}{J(A + J_0)} > 0, \tag{20}$$
тогда с учетом (19)
$$a_*^2 + b = a_*^2 + b > 0. \tag{21}$$

Зависимость времени $t$ от переменной $u$ находим из (18)
$$t - t_0 = \frac{1}{v}\arccos\frac{u}{u_1}, \tag{22}$$
где введены обозначения $v = \dfrac{\sigma_0\sqrt{a_*^2 + b}}{k_* a_*}$, $u_1^2 = \dfrac{a_*^2 - 1}{a_*^2 + b}$. Как следует из (19)—(21), $0 < u_1^2 < 1$. Из (22) определим
$$u(t_*) = u_1 \cos vt_*, \qquad t_* = t - t_0. \tag{23}$$

С помощью (23) основные переменные (2)—(7) можно представить посредством функций времени $t_*$. Например,
$$n_0(t_*) = \frac{A_0\sigma_0 b u_1 \cos vt_*}{a_*\sqrt{1 + bu_1^2\cos^2 vt_*}}. \tag{24}$$

Таким образом, указаны зависимости компонент угловых скоростей тел $S$ и $S_0$ в полуподвижных базисах.

В случае нулевого значения момента количества движения системы тел при решении задачи отсутствует имеющий физический смысл вектор, фиксированный в неподвижном пространстве и задаваемый своими компонентами в осях, связанных с телом. Это затрудняет построение аксоидов, указанных в [3, 4].

Но в современной технике важны задачи, в которых движение тел необходимо отслеживать по отношению к базису, определяемому самой траекторией – естественному базису, который в каждой точке траектории определяют ее касательная, главная нормаль и бинормаль. Для построения такого базиса в рассматриваемой задаче имеется вектор, касающийся траектории точки $O$ и заданный своими компонентами в соответствующем движению системы базисе. В таком базисе точка $O$ неподвижна, аксоиды – конические поверхности, для построения полных решений достаточно иметь их направляющие линии – соответствующие годографы угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах и в опорном базисе.

В осях, связанных с телом, определен вектор абсолютной скорости точки $O$ тела, это дает возможность строить уравнения годографов, используя алгоритм, предложенный в [6].

В соответствии с [6] назначим опорным естественный базис, формирующийся на траектории точки $O$. Первую ось базиса направим по вектору $\mathbf{V}_*$. Запишем указывающий точку $O$ радиус-вектор $\mathbf{r}_*$, его скорость $\mathbf{V}_*$ [7, (5.22), (5.24), (5.23)]

$$\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3 - a_0\mathbf{e}_3^0, \qquad \mathbf{V}_* = -a(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2) - a_0(\Omega_2\mathbf{e}_1 - \Omega_1\mathbf{e}_2^0),$$

$$a = \frac{ml}{m+m_0}, \qquad a_0 = \frac{m_0 l_0}{m+m_0}.$$

Предположим, что тело $S$ закреплено в центре масс ($l = 0$), тогда

$$a = 0 \tag{25}$$

(случай, когда $l_0 = 0$ ($a_0 = 0$), рассматривается аналогично).

Запишем векторы $\mathbf{r}_*, \mathbf{V}_*, \mathbf{W}_* = \dot{\mathbf{V}}_*$ при ограничении (25):

$$\mathbf{r}_* = -a_0\mathbf{e}_3^0, \tag{26}$$

$$\mathbf{V}_* = -a_0(\Omega_2\mathbf{e}_1 - \Omega_1\mathbf{e}_2^0), \tag{27}$$

$$\mathbf{W}_* = a_0\Big(-\Omega_1\frac{n_0}{A_0}\mathbf{e}_1 - \Omega_2\frac{n_0}{A_0}\mathbf{e}_2^0 + \sigma_0^2\mathbf{e}_3^0). \tag{28}$$

Введем векторы нормали $\mathbf{N}_*$ и бинормали $\mathbf{B}_*$

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{V}_* \times \mathbf{W}_*, \tag{29}$$

$$\mathbf{N}_* = \mathbf{B}_* \times \mathbf{V}_*. \tag{30}$$

Естественный опорный базис $\text{э}_1\text{э}_2\text{э}_3$ вводят так [6, 8]:

$$\text{э}_1 = \frac{\mathbf{V}_*}{V_*}, \qquad \text{э}_2 = \frac{\mathbf{B}_* \times \mathbf{V}_*}{|\mathbf{B}_* \times \mathbf{V}_*|}, \qquad \text{э}_3 = \frac{\mathbf{B}_*}{B_*}. \tag{31}$$

Подставив (27), (28) в (29) с учетом (14) вычислим вектор бинормали

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\sigma_0^2\Big(\Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{A_0}\mathbf{e}_3^0\Big). \tag{32}$$

Теперь можно записать вектор нормали, внеся (27), (32) в (30):

$$\mathbf{N}_* = \mathbf{B}_* \times \mathbf{V}_* = a_0^3\sigma_0^2\big(-\mathbf{e}_1\Omega_1 n_0/A_0 - \mathbf{e}_2^0\Omega_2 n_0/A_0 + \mathbf{e}_3^0\sigma_0^2\big). \tag{33}$$

Из (27), (32), (33) с учетом (15) следуют выражения для модулей векторов:

$$V_* = a_0\sigma_0, \tag{34}$$

$$B_*^2 = a_0^4\sigma_0^4(\sigma_0^2 + n_0^2/A_0^2), \qquad N_*^2 = a_0^6\sigma_0^6(\sigma_0^2 + n_0^2/A_0^2). \tag{35}$$

Отметим, что

$$N_* = |\mathbf{B}_* \times \mathbf{V}_*| = B_*V_*. \tag{36}$$

Внесем (27), (32)—(36) в (31) и установим связь между естественным базисом (31) и полуподвижным базисом $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$:

$$\begin{gathered}
\text{э}_1 = \big(-\Omega_2\mathbf{e}_1 + \Omega_1\mathbf{e}_2^0\big)/\sigma_0,\\
\text{э}_2 = \big(-\mathbf{e}_1\Omega_1 n_0/A_0 - \mathbf{e}_2^0\Omega_2 n_0/A_0 + \mathbf{e}_3^0\sigma_0^2\big)\Big/\Big(\sigma_0\sqrt{\sigma_0^2 + n_0^2/A_0^2}\Big),\\
\text{э}_3 = \big(\mathbf{e}_1\Omega_1 + \mathbf{e}_2^0\Omega_2 + \mathbf{e}_3^0 n_0/A_0\big)\Big/\sqrt{\sigma_0^2 + n_0^2/A_0^2}.
\end{gathered} \tag{37}$$

Вместо $\Omega_1$ введем переменную $\beta$ следующим образом

$$\Omega_1 = \sigma_0\cos\beta, \tag{38}$$

тогда, как следует из (15),

$$\Omega_2 = \sigma_0\sin\beta. \tag{39}$$

Вместо $n_0$ вводим переменную $\chi$

$$n_0 = A_0\sigma_0\operatorname{tg}\chi. \tag{40}$$

Компоненты $E_{ij}$ матрицы вложения $\|E\|$, определяемой соотношением $\text{э}_i = E_{ij}\mathbf{e}_j^0$ (или, что то же, $\mathbf{e}_j^0 = E_{ij}\text{э}_i$), устанавливаются из (37), которые с учетом обозначений (38)–(40) принимают вид:

$$\begin{gathered}
\text{э}_1 = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2^0\cos\beta,\\
\text{э}_2 = -\mathbf{e}_1\cos\beta\sin\chi - \mathbf{e}_2^0\sin\beta\sin\chi + \mathbf{e}_3^0\cos\chi,\\
\text{э}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta\cos\chi + \mathbf{e}_2^0\sin\beta\cos\chi + \mathbf{e}_3^0\sin\chi,
\end{gathered} \tag{41}$$

откуда находим также

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_1 = -\text{э}_1\sin\beta - \text{э}_2\cos\beta\sin\chi + \text{э}_3\cos\beta\cos\chi,\\
\mathbf{e}_2^0 = \text{э}_1\cos\beta - \text{э}_2\sin\beta\sin\chi + \text{э}_3\sin\beta\cos\chi, \qquad \mathbf{e}_3^0 = \text{э}_2\cos\chi + \text{э}_3\sin\chi.
\end{gathered} \tag{42}$$

Из (41) следует, что $\beta$ – это угол между векторами $\mathbf{э}_1, \mathbf{e}_2^0$, а $\chi$ – это угол между $\mathbf{э}_2, \mathbf{e}_3^0$.

Кривизну $\kappa^0$ и кручение $\kappa^*$ траектории шарнира можно определить по формулам [6]

$$\kappa^0 = \frac{B_*}{V_*^3}, \tag{43}$$

$$\kappa^* = \frac{\dot{\mathbf{W}}_* \cdot \mathbf{B}_*}{B_*^2}. \tag{44}$$

Вычислим производную по времени от ускорения точки $O$:

$$\dot{\mathbf{W}}_* = \dot{w}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{w}_2^0 \mathbf{e}_2^0 + \dot{w}_3^0 \mathbf{e}_3^0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{W}_*,$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + \Omega_3 \mathbf{e}_3^0$ — угловая скорость базиса $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$. Из (28) следуют соотношения

$$w_1 = -a_0 \Omega_1 n_0 / A_0, \qquad w_2^0 = -a_0 \Omega_2 n_0 / A_0, \qquad w_3^0 = a_0 \sigma_0^2. \tag{45}$$

Продифференцировав соотношения (45) с учетом (14), (15) (27), (28), (32), представим $\dot{\mathbf{W}}_* \cdot \mathbf{B}_*$ в виде

$$\dot{\mathbf{W}}_* \cdot \mathbf{B}_* = -a_0^3 \sigma_0^4 \dot{n}_0 / A_0. \tag{46}$$

Подставив (34), (35), (46) в (43), (44), находим кривизну и кручение

$$\kappa^0 = \frac{1}{a_0} \Big( 1 + \frac{n_0^2}{A_0^2 \sigma_0^2} \Big)^{1/2}, \qquad \kappa^* = -\frac{\dot{n}_0}{A_0 a_0 \sigma_0^2 [1 + n_0^2 / (A_0^2 \sigma_0^2)]},$$

которые с учетом (40) имеют вид

$$\kappa^0 = \frac{1}{a_0 \cos\chi}, \tag{47}$$

$$\kappa^* = -\frac{\dot{\chi}}{a_0 \sigma_0}. \tag{48}$$

Абсолютную угловую скорость опорного базиса [8, с. 98]

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = (\kappa^* \mathbf{э}_1 + \kappa^0 \mathbf{э}_3) V_* = p_i^0 \mathbf{e}_i^0$$

с учетом (47), (48) можно записать так:

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = -\mathbf{э}_1 \dot{\chi} + \mathbf{э}_3 \sigma_0 / \cos\chi. \tag{49}$$

Компоненты $p_i^0$ получим после подстановки (41) в (49):

$$p_1^0 = \sigma_0 \cos\beta + \dot{\chi} \sin\beta, \qquad p_2^0 = \sigma_0 \sin\beta - \dot{\chi} \cos\beta, \qquad p_3^0 = \sigma_0 \operatorname{tg}\chi. \tag{50}$$

**Годограф тела $S_0$ в опорном базисе.** Вначале запишем угловую скорость тела $S_0$ $\mathbf{\Omega}_* = \mathbf{e}_1\Omega_1 + \mathbf{e}_2^0\Omega_2 + \mathbf{e}_3^0 n_0/J_0$, с учетом замен (38)–(40) имеем

$$\mathbf{\Omega}_* = \sigma_0\Big(\mathbf{e}_1\cos\beta + \mathbf{e}_2^0\sin\beta + \mathbf{e}_3^0\frac{A_0}{J_0}\operatorname{tg}\chi\Big). \tag{51}$$

По отношению к опорному базису тело $S_0$ имеет угловую скорость

$$\mathbf{\Omega}^{0*} = \mathbf{\Omega}_* - \mathbf{\Omega}_0 = q_1\mathbf{e}_1 + q_2^0\mathbf{e}_2^0 + q_3^0\mathbf{e}_3^0 = \Omega_1^{0*}\text{э}_1 + \Omega_2^{0*}\text{э}_2 + \Omega_3^{0*}\text{э}_3. \tag{52}$$

Подставив сюда (51), (50), (42), получим компоненты вектора $\mathbf{\Omega}^{0*}$ в обоих базисах:

$$q_1 = -\dot\chi\sin\beta, \quad q_2^0 = \dot\chi\cos\beta, \quad q_3^0 = \Big(\frac{A_0}{J_0} - 1\Big)\sigma_0\operatorname{tg}\chi,$$

$$\Omega_1^{0*} = \dot\chi, \quad \Omega_2^{0*} = \Big(\frac{A_0}{J_0} - 1\Big)\sigma_0\sin\chi, \quad \Omega_3^{0*} = \Big(\frac{A_0}{J_0} - 1\Big)\sigma_0\frac{\sin^2\chi}{\cos\chi}. \tag{53}$$

Таким образом, указаны годографы относительной угловой скорости $\mathbf{\Omega}^{0*}$ тела $S_0$ в опорном базисе (53) и в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$.

**Подвижный годограф тела $S_0$.** Между неизменно связанным с телом $S_0$ базисом $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$ и полуподвижным базисом $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ существует связь [9]

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1\cos\Phi + \mathbf{e}_2^0\sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1\sin\Phi + \mathbf{e}_2^0\cos\Phi. \tag{54}$$

Внесем (42) в (54) и представим векторы $\mathbf{e}_i^{0*}$ в опорном базисе

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \text{э}_1\sin(\Phi-\beta) - \text{э}_2\cos(\Phi-\beta)\sin\chi + \text{э}_3\cos(\Phi-\beta)\cos\chi,$$

$$\mathbf{e}_2^{0*} = \text{э}_1\cos(\Phi-\beta) + \text{э}_2\sin(\Phi-\beta)\sin\chi - \text{э}_3\sin(\Phi-\beta)\cos\chi,$$

$$\mathbf{e}_3^{0*} = \mathbf{e}_3^0 = \text{э}_2\cos\chi + \text{э}_3\sin\chi.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\text{э}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\sin(\Phi-\beta) + \mathbf{e}_2^{0*}\cos(\Phi-\beta),$$

$$\text{э}_2 = -\mathbf{e}_1^{0*}\cos(\Phi-\beta)\sin\chi + \mathbf{e}_2^{0*}\sin(\Phi-\beta)\sin\chi + \mathbf{e}_3^{0*}\cos\chi,$$

$$\text{э}_3 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos(\Phi-\beta)\cos\chi - \mathbf{e}_2^{0*}\sin(\Phi-\beta)\cos\chi + \mathbf{e}_3^{0*}\sin\chi.$$

Подставив эти соотношения в (52), учтем (53), получим компоненты подвижного годографа $\mathbf{\Omega}^{0*} = q_1^*\mathbf{e}_1^{0*} + q_2^*\mathbf{e}_2^{0*} + q_3^*\mathbf{e}_3^{0*}$ в виде

$$q_1^{0*} = \dot\chi\sin(\Phi-\beta), \quad q_2^{0*} = \dot\chi\cos(\Phi-\beta), \quad q_3^{0*} = (\frac{A_0}{J_0} - 1)\sigma_0\operatorname{tg}\chi. \tag{55}$$

При вычислении угла $(\Phi - \beta)$ заметим, что из (39) следует $\beta = \arcsin(\Omega_2/\sigma_0)$. Дифференцируя по $t$ это выражение и учитывая (12), находим $\dot\beta = n_0/A_0 - \Omega_3$. Угол $\Phi$ определяется из уравнения [9] $\dot\Phi = n_0/J_0 - \Omega_3$ и поэтому

$$\dot\Phi - \dot\beta = \Big(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\Big) n_0.$$

Теперь, воспользовавшись (24), (18), проинтегрируем это уравнение:

$$\Phi - \beta = \frac{(A_0 - J_0) b\sigma_0}{J_0 a_*} \int \frac{u_1 \cos vt_* dt_*}{\sqrt{1 + bu_1^2 \cos^2 vt_*}}.$$

При вычислении интеграла с учетом (11) возможны два варианта:

$$\Phi - \beta = \frac{(A_0 - J_0) b\sigma_0}{J_0 a_* v\sqrt{b}} \arcsin \frac{\sqrt{b}\, u_1 \sin vt_*}{\sqrt{1 + bu_1^2}}, \quad \text{если} \quad b > 0, \ (A > J),$$

$$\Phi - \beta = \frac{(A_0 - J_0) b\sigma_0}{J_0 a_* v\sqrt{-b}} \ln\Big(u_1 \sin vt_* + \sqrt{u_1^2 \sin^2 vt_* - (1 + bu_1^2)/b}\ \Big),$$

если $b < 0$ $(A < J)$.

Из (40) с учетом (24) получаем

$$\operatorname{tg} \chi(t_*) = \frac{bu_1 \cos vt_*}{a_0 \sqrt{1 + bu_1^2 \cos^2 vt_*}}\,.$$

При движении тела $S_0$ подвижный годограф (55) катится по годографу (53) в опорном базисе.

**Годограф тела $S$ в опорном базисе.** Так как опорный базис уже введен и есть формула перехода от базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ к опорному (42), можно получить представление вектора $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \dfrac{n}{J}\mathbf{e}_3$ в опорном базисе. Для этого, воспользовавшись соотношениями [9]

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0 \cos\theta - \mathbf{e}_3^0 \sin\theta, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0 \sin\theta + \mathbf{e}_3^0 \cos\theta,$$

представим $\boldsymbol{\omega}_*$ в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^0\Big(\omega_2 \cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\Big) + \mathbf{e}_3^0\Big(-\omega_2 \sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\Big). \tag{56}$$

Подставив (8), (3), (2) в (56), находим

$$\boldsymbol{\omega}_* = -\frac{A_0}{A}\Omega_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^0\Big(-\frac{A_0}{A}\Omega_2 + \frac{A - J}{AJ} n \sin\theta\Big) + \mathbf{e}_3^0 \frac{n_0}{J_0}.$$

Внесем сюда (38), (39), (40) и определим

$$\boldsymbol{\omega}_* = -\mathbf{e}_1\frac{A_0}{A}\sigma_0\cos\beta + \mathbf{e}_2^0\Big(-\frac{A_0}{A}\sin\beta + \frac{A-J}{AJ}\frac{A_0}{b}\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\chi\Big)\sigma_0 + \mathbf{e}_3^0\frac{A_0}{J_0}\sigma_0\operatorname{tg}\chi. \quad (57)$$

Используя формулы перехода (41), запишем вектор (57) в опорном базисе

$$\boldsymbol{\omega}_* = \sigma_0\Big\{-\text{э}_1\frac{(A+J_0)A_0 b}{AJ_0\, a_*^2}\operatorname{ctg}\beta + \text{э}_2\Big[\frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{J_0} + \frac{(A+J_0)A_0 b}{AJ_0\, a_*^2}\Big]\sin\chi +$$

$$+\text{э}_3\Big[-\frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{J_0}\operatorname{tg}\chi - \frac{(A+J_0)A_0 b}{AJ_0\, a_*^2}\Big]\cos\chi\Big\}. \quad (58)$$

По отношению к опорному базису тело $S$ имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{0*} = \boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0$, которую с учетом (58), (49) также запишем в опорном базисе $\boldsymbol{\omega}_{0*} = p_1^*\text{э}_1 + p_2^*\text{э}_2 + p_3^*\text{э}_3$, где

$$p_1^* = \text{э}_1\dot{\chi} - B\sigma_0\operatorname{ctg}\beta, \quad p_2^* = \Big(B + \frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{J_0}\Big)\sigma_0\sin\chi,$$

$$p_3^* = \Big[\Big(\frac{A_0}{J_0} - 1\Big)\frac{1}{\cos\chi} - \Big(B + \frac{A_0}{A} + \frac{A_0}{J_0}\Big)\cos\chi\Big]\sigma_0; \quad (59)$$

здесь введен безразмерный параметр $B = \dfrac{(A+J_0)A_0 b}{AJ_0 a_*^2}$.

Используя соотношения (50), (57), представим угловую скорость тела $S$ относительно опорного базиса в виде

$$\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{e}_1[-\dot{\chi}\sin\beta - (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0\cos\beta] +$$

$$+\mathbf{e}_2^0[\dot{\chi}\cos\beta - (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0\sin\beta + \frac{A_0(A+J_0)}{AJ_0}\sigma_0\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\chi] + \mathbf{e}_3^0(\frac{A_0}{J_0} - 1)\sigma_0\operatorname{tg}\chi. \quad (60)$$

Чтобы представить этот вектор в неизменно связанном с телом $S$ базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$, воспользуемся формулами переходов (9)

$$\mathbf{e}_1^0 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta, \qquad \mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta;$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*\cos\varphi - \mathbf{e}_2^*\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^*\sin\varphi + \mathbf{e}_2^*\cos\varphi, \qquad \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3,$$

получим связь между базисами $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ и $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^*\cos\varphi - \mathbf{e}_2^*\sin\varphi,$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_1^*\cos\theta\sin\varphi + \mathbf{e}_2^*\cos\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_3^*\sin\theta,$$

$$\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_1^*\sin\theta\sin\varphi - \mathbf{e}_2^*\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{e}_3^*\cos\theta.$$

Подставив эти соотношения в (60), получим разложение в базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*$ подвижного годографа тела $S$:

$$\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_0 = \omega_{10}^*\mathbf{e}_1^* + \omega_{20}^*\mathbf{e}_2^* + \omega_{30}^*\mathbf{e}_3^*,$$

где

$$\omega_{10}^* - [\dot\chi\sin\beta + (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0\cos\beta)]\cos\varphi +$$

$$+[\dot\chi\cos\beta\ \cos\theta + (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0(-\sin\beta\cos\theta + \sin\theta\,\mathrm{tg}\,\chi)]\sin\varphi,$$

$$\omega_{20}^*[\dot\chi\sin\beta + (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0\cos\beta)]\sin\varphi + \tag{61}$$

$$+[\dot\chi\cos\beta\cos\theta + (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0(-\sin\beta\cos\theta + \sin\theta\,\mathrm{tg}\,\chi)]\cos\varphi,$$

$$\omega_{30}^* = \dot\chi\cos\beta\sin\theta - (\frac{A_0}{A} + 1)\sigma_0(\sin\beta\sin\theta + \cos\theta\,\mathrm{tg}\,\chi)] + \frac{A_0(A + J_0)\sigma_0\,\mathrm{tg}\,\chi}{AJ_0\cos\theta}.$$

Угол $\varphi(u)$ вычислим из уравнения [9] $\dot\varphi = n/J - \omega_3$. Подставив в него (2), (4), (10), (11), получим

$$\varphi(u) = \varphi_0 - \frac{\sigma_0}{a_* v u_1}\int\limits_{u_0}^{u}\Big[\Big(\frac{A_0}{J_0} - 1\Big)b + \frac{1+b}{k_*(1-u^2)}\Big]\frac{du}{\sqrt{(1+bu^2)\,(1-u^2/u_1^2)}}\,.$$

Стоящий справа интеграл можно выразить посредством эллиптических функций.

При движении тела $S$ его подвижный годограф (61) катится по годографу (59) в опорном базисе (41), который имеет угловую скорость (49).

Таким образом, *впервые* в задаче о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром, введен опорный базис, получены уравнения годографов в опорном базисе для каждого из тел системы. Это позволяет представить движение тел качением без скольжения неизменно связанных с телами годографов по соответствующим годографам в опорном базисе.

1. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15–21.
2. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Там же. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.
3. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для одного класса движений по инерции системы двух гироскопов Лагранжа // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 83–93.
4. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 502–507.
5. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. – 1980. — Вып. 12. – С. 3–8.

6. *Харламов М.П., Харламов П.В.* Построение полного решения задачи об относительном движении твердого тела // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 12. – С. 36–38.
7. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. — 238 с.
8. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз., 1961. – 824 с.
9. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов в задаче о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Сб. научн.-метод. работ. – Вып. 4. – Донецк: ДонНТУ, 2006. – С. 63–80.


**M.E. Lesina, N.F. Gogoleva**

**Equations of hodographs in the reference basis for the problem of inertial motion of two Lagrange gyros jointed by a nonholonomic hinge**

The case when the hinge trajectory is a spatial spherical curve is considered in this paper. The reference system of coordinates is defined by the natural basis on the hinge trajectory. The equations of axoids are obtained with respect to the reference frame.

**Keywords:** *system of Lagrange gyros, hodograph, nonholonomic hinge, reference basis.*

**М.Ю. Лесіна, Н.Ф. Гоголєва**

**Рівняння годографів тіл в опорному базисі для задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром**

Розглянуто випадок, коли траєкторія точки $O$ є просторовою сферичною кривою. На траєкторії цієї точки опорну систему координат визначено природним базисом. Отримано рівняння годографів тіл в опорному базисі.

**Ключові слова:** *система гіроскопів Лагранжа, годограф, неголономний шарнір, опорний базис.*

*Национальный техн. ун-т, Донецк*
applmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.06.10