УДК 531.38

©2010. **О.С. Волкова**

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Изучены регулярные прецессии гиростата вокруг неподвижной наклонной оси. В предположении, что переменный гиростатический момент сохраняет направление в подвижном базисе, получены необходимые и достаточные условия их существования. Указана зависимость угла между осью прецессии и вертикалью от параметров гиростата и направления оси собственного вращения. Выписана абсолютная величина гиростатического момента и соответствующие решения уравнений движения. В явном виде получено решение, вырождающееся в решение Гриоли при отсутствии гиростатического момента. Найдено новое решение, соответствующее регулярной прецессии тяжелого гиростата вокруг наклонной оси со скоростью, вдвое большей скорости собственного вращения.

Ключевые слова: *гиростат, переменный гиростатический момент, точные решения, регулярная прецессия.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из тела-носителя S и жестко закрепленных на нем тел S^i, $i = 1, 2, .. n$, для каждого из которых общая с носителем ось будет главной центральной осью инерции. Пусть несомые тела обладают динамической симметрией относительно своей оси крепления. Будем считать, что относительные угловые скорости тел S^i – заданные функции времени либо известна составляющая момента сил, действующих на S^i со стороны S, относительно их общей оси. Такая система удовлетворяет определению гиростата, данному в работе [1] П.В. Харламовым. Твердое тело с закрепленными на нем симметричными роторами, кинетические моменты которых переменны, рассматривали также К. Магнус [2], В.В. Румянцев, Й. Виттенбург [3] и другие. На основании теоремы об изменении момента количества движения вращение гиростата вокруг неподвижной точки описывается уравнениями

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции гиростата, приведенный к главным осям, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость носителя в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\mathbf{e}$ – радиус-вектор центра масс, а $\boldsymbol{\lambda}$ – переменный гиростатический момент. Считаем, что уравнения движения записаны в безразмерной форме.

Уравнения (1) допускают первые интегралы

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = g, \qquad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Предположим, что $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, где $\lambda(t)$ – непрерывная и ограниченная вместе со своей производной функция времени. В [4] исследованы регулярные прецессии такого гиростата вокруг вертикали. В настоящей работе будут изучены те регулярные прецессии вокруг наклонной оси, которые не являются маятниковыми либо равномерными вращениями.

Итак, пусть $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – постоянные соответственно в абсолютном и относительном пространстве единичные векторы. Движение гиростата называют [5,6] *регулярной прецессией*, если угол между $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ не изменяется, а скорости прецессии $\dot{\psi}$ и собственного вращения $\dot{\varphi}$ постоянны: $\dot{\psi}(t)=m$, $\dot{\varphi}(t)=n$. Тогда для вектора угловой скорости справедливо разложение $\boldsymbol{\omega} = m\boldsymbol{\gamma} + n\boldsymbol{\beta}$. Отметим, что в этом случае система (1) допускает линейное инвариантное соотношение $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = c$, где $c = n + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})m$; при этом абсолютная величина угловой скорости также постоянна: $|\boldsymbol{\omega}|^2 = n^2 + m^2 + 2mn(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$.

Будем считать, что направление векторов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ выбрано таким образом, чтобы выполнялось $mn > 0$. Постоянные в абсолютном пространстве векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ в относительном базисе удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\gamma}), \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = n(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}). \tag{3}$$

Введем обозначения $\cos\chi := (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$, $\cos\mu := (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$. В предположении, что $\Delta := \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$, зависимость $\boldsymbol{\gamma}(t)$ можно записать в виде $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}(t)$, где

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \beta_1 \\ \dfrac{-\beta_1\beta_2}{\Delta} & \dfrac{\beta_3}{\Delta} & \beta_2 \\ \dfrac{-\beta_1\beta_3}{\Delta} & \dfrac{-\beta_2}{\Delta} & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{\beta}}{|(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{\beta}|} \\ \dfrac{\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}|} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \boldsymbol{i} = (1,0,0), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\sin\mu \sin(nt + \phi_0),\ \sin\mu\cos(nt + \phi_0),\ \cos\mu)^{\mathsf{T}}. \tag{5}$$

Начальную фазу ϕ_0 в (5) положим нулевой. Для $\boldsymbol{\nu}$ выпишем разложение по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}$, удовлетворяющее системе (3) и геометрическому интегралу:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}(t) = {}& \Big[\cos\chi + \frac{\sin\chi}{\sin\mu}\cos\mu\sin(mt + \varphi_0)\Big]\boldsymbol{\gamma} - \\ & - \frac{\sin\chi}{\sin\mu}\big[\sin(mt + \varphi_0)\boldsymbol{\beta} + \cos(mt + \varphi_0)\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь φ_0 – произвольная постоянная, которая впоследствии подлежит определению из условий существования регулярных прецессий.

Цель работы: указать угол между осями прецессии и собственного вращения и соотношение между скоростями m и n; получить условия на распределение масс системы и направление гиростатического момента, при которых существует функция $\lambda(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = {}& m^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}) + mn(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}) + \\ & + n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}) + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times (m\boldsymbol{\gamma} + n\boldsymbol{\beta})) + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Регулярные прецессии уравновешенного гиростата. Отдельно рассмотрим случай, когда центр масс совпадает с неподвижной точкой $|\boldsymbol{e}|=0$. Покажем, что с точностью до замены индексов верна следующая теорема.

Теорема 1. Если уравновешенный гиростат с гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ совершает регулярную прецессию, то выполняются условия

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad (J_3 - J_1)\alpha_2\beta_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3\beta_3 = 0, \tag{8}$$

причем только в следующих случаях:

(I) $\quad \boldsymbol{J\alpha} \parallel \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{J\beta}: \quad \alpha_2 = \beta_3 = 0,\ (J_1 - J_2)(J_1 - J_3) \neq 0,$

(II) $\quad \boldsymbol{J\alpha} \nparallel \boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta} \nparallel \boldsymbol{J\beta}: \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(J_2\beta_3^2 + J_3\beta_2^2 - J_1) \neq 0,$

(III) $\quad \boldsymbol{J\alpha} \nparallel \boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}: \quad J_1 = J_2\beta_3^2 + J_3\beta_2^2,\ (J_3 - J_1)(J_1 - J_2) > 0$

существует непрерывная и ограниченная вместе со своей производной функция $\lambda(t) \neq \mathrm{const}$:

$$\text{(I–II):}\quad \lambda(t) = (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^{-2}[m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) + n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})],$$

$$(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = J_1(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2 m\cos\mu; \tag{9}$$

$$\text{(III):}\quad \lambda(t) = -[m(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\gamma}) + n(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta})] - nJ_1, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}) = m\cos\mu + n = 0.$$

Доказательство. При $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}$ в качестве полной системы скалярных уравнений возьмем проекции (7) на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ соответственно:

$$m(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}) + \dot{\lambda} = m^2(\boldsymbol{J\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + mn(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{J\gamma}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + n^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{10}$$

$$\dot{\lambda} n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = m^2(\boldsymbol{J\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \lambda m(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) = {} & -[m(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}) + n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]\,[\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\gamma})] + \\ & + (n + m\cos\mu)\,(\lambda + m(\boldsymbol{J\gamma},\boldsymbol{\alpha})) - mn(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}) + \\ & + mn(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\alpha})\cos\mu + n^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом разложения $\boldsymbol{\omega} = m\boldsymbol{\gamma} + n\boldsymbol{\beta}$ интеграл площадей (2) принимает вид

$$m(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \lambda(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + n(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = g, \tag{13}$$

причем производная левой части (13) представляет собой проекцию (7) на $\boldsymbol{\gamma}$. Найдем условия совместности уравнений (10)–(13) относительно λ при $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}$ (см. (4)–(5)). Анализ (10) и (13) показал, что $\lambda(t)$ – линейная по $\sin nt$, $\cos nt$ функция, при этом выражение $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ должно содержать члены второго порядка, а в $(\boldsymbol{J\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})$, напротив, они должны отсутствовать. Тогда из (12) следует, что

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{const}, \quad \text{т.е.}\quad \boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta} \Longleftrightarrow \boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\beta} \quad \text{при}\quad \dot{\lambda}\neq 0. \tag{14}$$

Теперь продифференцируем соотношение (13) и вычтем из результата уравнение (11), умноженное на $2/m$. В итоге получим равенство

$$m[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\dot{\lambda} - (\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda] + n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\dot{\lambda} = 0, \tag{15}$$

откуда заключаем, что разложение Фурье выражения $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\dot{\lambda} - (\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda$ не содержит постоянного члена. С учетом линейности λ по $\cos nt$ и $\sin nt$ имеем

$$\lambda = c_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + c_2; \quad c_1 = \mathrm{const},\, c_2 = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Подстановка (14) в (13) и подсчет слагаемых, содержащих $\cos nt$ и $\sin nt$, дают

$$[c_1(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\cos\mu + c_2](\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + [n + m\cos\mu](\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathrm{const},$$

откуда следует либо $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, либо $n+m\cos\mu=0$. В последнем случае условие отсутствия свободного члена в правой части (10) снова приводит к равенству $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$. Обратимся к интегралу (13). Ясно, что выражение

$$m(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + c_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})^2 \tag{17}$$

не должно содержать $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$. Воспользовавшись разложением

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\frac{\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}}{(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2} + (\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\frac{\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2},$$

для скалярного произведения $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ можно получить выражение вида

$$(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = -\zeta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})^2 + \frac{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta})}{n(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^4}[(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})^2]' + L_n,$$

$$\zeta := \frac{(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{\beta}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}))}{(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^4}, \tag{18}$$

где L_n линейно по $\boldsymbol{\gamma}$. Очевидно, что в (17) старшие члены исчезают тогда и только тогда, когда $c_1 = m\zeta$ и $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = 0$, что вместе с $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ дает $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}) \parallel \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$. При этом условии в $(\boldsymbol{J\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})$ отсутствуют $\cos 2nt$, $\sin 2nt$, только если ζ дополнительно удовлетворяет равенству $\zeta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^{-2} = 0$, которое в координатной форме принимает вид (8). Если оно выполнено, то ζ упрощается, и систему (7) обращает в тождество указанное при формулировке теоремы $\lambda(t)$; причем m, n и $\cos\mu$ связаны уравнением (9). Вспомогательные условия (I)–(II) обеспечивают разрешимость (9) при $mn \neq 0$ и невырождение $\lambda(t)$ в постоянную.

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$. Систему (11),(13) дополним проекцией (7) на $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}&\frac{m}{n}(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + m\sin^2\!\mu\,\lambda = m(n + m\cos\mu)(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) +\\ &+(n^2 - m^2)(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\gamma}) - n(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\beta})(m + n\cos\mu).\end{aligned} \tag{19}$$

Положим $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} + 2(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\gamma})\cos\mu + \mathrm{const}$, где $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n}$ содержит только $\sin 2nt$ и $\cos 2nt$. Подставим (11) в (13) и выпишем члены второго порядка:

$$(2n + m\cos\mu)(\boldsymbol{J\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n} = 0. \tag{20}$$

Несложно доказать равенство $(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})^{\cdot} = -n^2(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})^{\cdot}_{2n}$, позволяющее из (19) получить

$$((2n + m\cos\mu)^2 - 2mn\cos\mu - m^2)(\boldsymbol{J\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n} = 0,$$

что в совокупности с равенством (20) и условием $\boldsymbol{\gamma} \nparallel \boldsymbol{\beta}$ влечет $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} = 0$.

Аналогично, подсчитывая в (13),(19) линейные по $\cos nt, \sin nt$ члены, имеем

$$(\boldsymbol{J\beta}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})(n + m\cos\mu) = 0.$$

Согласно (11), $\boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\beta}$ приводит к $\lambda(t) \equiv \mathrm{const}$. Таким образом, $n+m\cos\mu = 0$ и $\boldsymbol{J\beta} \nparallel \boldsymbol{\beta}$, что вместе с $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} = 0$ дает (III). Уравнения (11), (13), (19) обращает в тождества $\lambda(t) = -(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\omega}) - nJ_1$. Доказательство завершено. □

Охарактеризуем полученные классы движений. В случаях (I)–(II) величина λ пропорциональна проекции угловой скорости на направление гиростатического момента:

$$\lambda(t) = \frac{(J_1 - J_3)\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} \left[m\sin\mu(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\cos nt + (n + m\cos\mu)(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \right],$$

где скорости m и n связаны равенством (9), которое при $\boldsymbol{J\beta} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$ и условиях (I)–(II) позволяет однозначно выразить n через m. Если же в случае (II) выполняется $\boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\alpha}$, то угол нутации $\mu = \pi/2$, а m и n произвольны. Зависимость постоянной g от параметров задачи определяется равенством

$$g = (n + m\cos\mu)(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\beta})\cos\mu + J_1 m \sin^2\mu\,.$$

Случай (III) соответствует условию Гриоли существования регулярных прецессий вокруг наклонной оси для твердого тела [5] и гиростата с постоянным гиростатическим моментом [7, § 3.1]: центр масс лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции. Зависимость $\lambda(t)$ такова:

$$\lambda(t) = -m\sqrt{(J_2 - J_1)(J_1 - J_3)}\,\sin\mu\cos nt - nJ_1.$$

Здесь $\cos\mu = -n/m \neq 0$; постоянная интеграла площадей $g = mJ_1 \neq 0$.

3. Условия существования регулярных прецессий тяжелого гиростата вокруг наклонной оси. Пусть $\boldsymbol{\gamma} \nparallel \boldsymbol{\nu}$, то есть $\sin\chi \neq 0$. В первую очередь выясним, каким может быть соотношение между скоростями прецессии и собственного вращения. Начнем с доказательства леммы:

Лемма 1. Если скорость прецессии m не кратна скорости собственного вращения n, то прецессионные движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом невозможны.

Доказательство. Умножим динамическое уравнение системы (1) скалярно на $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})$. Получим соотношение, не содержащее λ:

$$(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})) = (\boldsymbol{J\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})) + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})).$$

От скорости прецессии m в нем зависит только выражение

$$\frac{\sin\chi}{n\sin\mu}\left(\sin(mt + \varphi_0)(\boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\eta}) - \cos(mt + \varphi_0)(\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\eta})\right), \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\eta} := (\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega})) \times \boldsymbol{e}$. Остальные слагаемые – многочлены не выше третьей степени относительно $\cos nt$ и $\sin nt$. Следовательно, функция (21) также должна быть периодической по t с периодом $2\pi/n$, откуда получаем

$$\sin\frac{\pi m}{n}\Big[(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)\sin\big(m(t+\frac{\pi}{n})+\varphi_0\big)+\cos\big(m(t+\frac{\pi}{n})+\varphi_0\big)(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)\Big]=0. \quad (22)$$

Пусть $\dfrac{m}{n}\notin\mathbb{Z}$ – значит, множитель в квадратной скобке равен нулю. Предположим, что $(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)^2+(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)^2\neq 0$, тогда из (22) и (21) следует, что функция

$$\cos(m\tilde t+\varphi_0)\Big[(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t}(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t-\frac{\pi}{n}}+(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t}(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t-\frac{\pi}{n}}\Big]$$

должна быть многочленом относительно $\cos n\tilde t$ и $\sin n\tilde t$. Значит, при всех $\tilde t$

$$(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t}(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t-\frac{\pi}{n}}+(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t}(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)_{t=\tilde t-\frac{\pi}{n}}=0. \quad (23)$$

Отделим в $(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)$, $(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)$ члены первого и второго порядков по $\sin nt$, $\cos nt$: пусть $(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)=R_1+R_2$, $(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)=S_1+S_2$, где

$$\ddot R_1=-n^2R_1,\ \ \ddot R_2=-4n^2R_2+\mathrm{const};$$
$$\ddot S_1=-n^2S_1,\ \ \ddot S_2=-4n^2S_2+\mathrm{const}.$$

С учетом тождеств $\cos(nt-\pi)=-\cos nt$ и $\sin(nt-\pi)=-\sin nt$ условие (23) принимает вид $R_1^2+S_1^2=R_2^2+S_2^2$. Значит, $R_1=R_2=S_1=S_2=0$ и $(\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)=(\boldsymbol\gamma\times\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\eta)=0$. Так как $\boldsymbol\gamma\perp\dot{\boldsymbol\gamma}$, то должно выполняться $\boldsymbol\eta\times\boldsymbol\gamma=0$, т.е.

$$((\boldsymbol\alpha\times(\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\omega))\times\boldsymbol e)\times\boldsymbol\gamma=0. \quad (24)$$

Проектируя (24) на $\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol e$, получаем условия 1) $\boldsymbol e\parallel\boldsymbol\beta\perp\boldsymbol\gamma$ или 2) $(\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol e)\times\boldsymbol\beta=0$.

1. В первом случае (24) сводится к $[(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\omega)(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)-m]\boldsymbol\beta=0$, или

$$m(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)^2+n(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)=m,$$

откуда $(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)=\mathrm{const}$, $\boldsymbol\alpha\parallel\boldsymbol\beta$. Но тогда $(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)=0$ и $m=0$, что приводит к равномерным вращениям.

2. Проектируя (24) на $\boldsymbol\alpha$, получаем равенство

$$(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol e)[m(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)^2+n(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta)(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)-m-n\cos\mu]=0.$$

Возможность $\boldsymbol\alpha\parallel\boldsymbol\beta$ не рассматривается, так как снова приводит к $m=0$. Условие $\boldsymbol\alpha\perp\boldsymbol e$ в совокупности с $\boldsymbol\alpha\perp\boldsymbol\beta\perp\boldsymbol e$ и $n+m\cos\mu=0$ обращает (24) в тождество. Выпишем при этих условиях проекцию (7) на вектор $\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta$:

$$m(\boldsymbol J\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta)=-m(\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\gamma)[m(\boldsymbol J\boldsymbol\beta,\boldsymbol\gamma)+n(\boldsymbol J\boldsymbol\beta,\boldsymbol\beta)].$$

Правая часть не должна содержать членов второго порядка, поэтому $\boldsymbol J\boldsymbol\beta\parallel\boldsymbol\beta$ и $(\boldsymbol J\boldsymbol\beta,\boldsymbol\gamma)=(\boldsymbol J\boldsymbol\beta,\boldsymbol\beta)\cos\mu$. Тогда $(\boldsymbol J\dot{\boldsymbol\gamma},\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta)=0$, а значит $\boldsymbol J(\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta)\parallel\boldsymbol\beta$, что приводит к невозможному равенству $(\boldsymbol J(\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta),\boldsymbol\alpha\times\boldsymbol\beta)=0$. Таким образом, условие (24) невыполнимо, но справедливо $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{N}$. Лемма доказана. □

Покажем, что отношение скоростей ограничено. Для этого можно воспользоваться утверждением, которое здесь приведем без доказательства:

Предложение 1. Пусть $\boldsymbol{\nu}(t)$ имеет вид (6). Тогда, если при некотором $\boldsymbol{\vartheta} = \mathrm{const}$ степень тригонометрического полинома $(\boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\vartheta})$ меньше $n+m$, то она равна m и выполняется условие $\boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{\beta} = 0$.

Лемма 2. Если тяжелый гиростат совершает регулярную прецессию вокруг наклонной оси, то скорости прецессии и собственного вращения связаны равенствами $m = n$ либо $m = 2n$. При этом $\lambda(t)$ – тригонометрический полином степени не выше $2n$.

Доказательство. Выпишем проекции уравнения движения гиростата (7) на векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{gathered} m(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha}) + \dot{\lambda} = m^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + mn(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}), \end{gathered} \tag{25}$$

$$\dot{\lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{m^2}{n}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \frac{m}{n}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}), \tag{26}$$

$$[m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\lambda + n(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})]' = (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{27}$$

$$\begin{gathered} m(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = -[m(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})]\,[\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})] + \\ + (n + m\cos\mu)\,(\lambda + m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})) - mn(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) + \\ + (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) + n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) + mn(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\cos\mu, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \frac{m}{n}(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \frac{1}{n}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\dot{\lambda} = (n + m\cos\mu)[m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})\lambda] - \\ -(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\lambda(m + n\cos\mu) + (n^2 - m^2)(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) + \\ +\mathrm{const}, \quad \mathrm{const} = -(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})n(m + n\cos\mu) - (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})\cos\chi. \end{gathered} \tag{29}$$

1°. Рассмотрим случай $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$. Исключим λ из уравнений (26) и (27):

$$\begin{gathered} m(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})(2n + m\cos\mu) + n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) + \cos\mu\cos\chi(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \\ = \sin\mu\sin\chi\,[(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\sin(mt + \varphi_0) - n(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})\cos(mt + \varphi_0)]\,. \end{gathered}$$

Слева – тригонометрический полином степени не выше $2n$, значит степень правой части также не может быть большей. Поскольку $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})^2 + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})^2 \neq 0$, то $m \leq 2n$. Причем, если $m = 2n$, то обязательно $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta}$.

2°. Теперь рассмотрим случай $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}$. Предположим, что $\dfrac{m}{n} \geq 3$. Из (26) видно, что степень λ как тригонометрического полинома не больше m, поскольку степень $(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda$ не должна превышать степени $(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$. Значит, (25) не содержит членов порядка $m+n$, т.е. степень выражения $(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha})$ не больше m. Тогда, согласно предложению 1, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e} = 0$ или $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}) = 0$.

Изучим первую возможность: пусть $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{e}$. Из (25) следует, что λ не может быть тригонометрическим полиномом степени выше $2n$. Значит, в уравнении (26) нет членов степени выше $3n$. Отсюда $m \leq 2n$.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{e}$. Продифференцируем (28) по t и выпишем члены порядка m с точностью до множителя $\sin\mu\sin\chi \neq 0$:

$$[m(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\cos{(mt+\varphi_0)} + (n+m\cos\mu)(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta})\sin{(mt+\varphi_0)}]. \qquad (30)$$

При доказательстве леммы 1 было показано, что если одновременно $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{e}$ и $n + m\cos\mu = 0$, то уравнение (28) неразрешимо. При $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}) \neq 0$ степень полинома (30) понизить невозможно. Полученное противоречие показывает, что $m/n < 3$. Доказательство завершено. □

Теперь сформулируем лемму о расположении центра масс гиростата. Для ее доказательства снова понадобится вспомогательное утверждение:

Предложение 2. Пусть $f(t)$, $g(t)$– тригонометрические полиномы степеней k_1, k_2. Тогда выражение $\dot{f}\dot{g} + k_1k_2fg$ не содержит членов степени $k_1 + k_2$.

Лемма 3. Условие $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta}$ является необходимым для существования регулярных прецессий тяжелого гиростата вокруг наклонной оси.

Доказательство. 1°. Пусть сначала $\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}$. Обозначим $k := \dfrac{m}{n} \in \{1,2\}$. Умножим уравнение (26) на $(k+1)n/m$ и вычтем его из (27):

$$\begin{aligned} &m\,[(1-k)(\boldsymbol{J\gamma},\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\dot{\lambda} - k\,(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda]+ \\ &\quad + n\,[m(\boldsymbol{J\beta},\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + (k+1)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot{\lambda}] = \\ &\quad = m\,(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\gamma}) + (k+1)\,n\,(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \qquad (31)$$

Сравним в полученном соотношении члены старшей степени относительно $\cos nt$ и $\sin nt$. Поскольку $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) = -(\boldsymbol{\alpha},\ddot{\boldsymbol{\gamma}})/n^2 + \mathrm{const}$, из предложения 2 следует, что слагаемое $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\dot{\lambda} - k(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda$ не содержит $(k+1)$-ой степени. Максимально возможный порядок выражения $(\boldsymbol{J\gamma},\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ – второй. Значит, правая часть (31) также не должна в разложении по $\sin nt$, $\cos nt$ содержать $(k+1)$-ой степени. Выпишем старшие члены без учета множителя $\sin\chi/\sin\mu$:

$$\begin{aligned} &[m + n(k+1)\cos\mu]\sin{(mt+\varphi_0)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta})+ \\ &\quad + [m\cos\mu + n(k+1)]\cos{(mt+\varphi_0)}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \qquad (32)$$

Применяя предложение 2, заключаем, что (32) не содержит старшей степени только при выполнении равенства

$$(2k+1)(m\cos\mu + kn)(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta}) = 0.$$

Поскольку $\cos\mu + 1 \neq 0$, то обязательно должно выполняться $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta}$. 2°. Теперь исследуем возможность $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$. Предположим, что $\boldsymbol{e} \nparallel \boldsymbol{\beta}$. Тогда из (26) следует, что $m = n$. Приравняем в (27) старшие члены:

$$n(\boldsymbol{J\gamma},\dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n}(2+\cos\mu) = \sin\mu\sin\chi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta})\sin{(nt+\varphi_0)}, \qquad (33)$$

Продифференцируем уравнение (29) и подставим $\dot\lambda$ из (26). Принимая во внимание тождество $(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})^{\cdot} = -2n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n}$, заключаем, что выражение

$$n(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n}(1-\cos\mu) - 2\sin\mu\sin\chi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma})\cos(nt+\varphi_0) \tag{34}$$

не должно содержать членов порядка $2n$. Сопоставляя (33) и (34) делаем вывод, что функция

$$2(2+\cos\mu)(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma})\cos(nt+\varphi_0) - (1-\cos\mu)(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta})\sin(nt+\varphi_0) \tag{35}$$

представляет собой полином первой степени по $\cos nt$, $\sin nt$. Учитывая, что $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}$, где $\mathcal{U}$ и $\boldsymbol{\xi}$ определены в (4), (5), выпишем в (35) старшие коэффициенты:

$$3(\cos\mu+1)\,[(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})\cos\varphi_0 + (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i})\sin\varphi_0] = 0,$$
$$3(\cos\mu+1)\,[(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{i})\cos\varphi_0 - (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})\sin\varphi_0] = 0.$$

Первый сомножитель при $\boldsymbol{\gamma}\nparallel\boldsymbol{\beta}$ в нуль не обращается. Чтобы система была разрешима относительно $\cos\varphi_0$ и $\sin\varphi_0$, должно выполняться

$$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})^2 + (\boldsymbol{e}, (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{\beta})^2 = 0,$$

а это возможно лишь в случае $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\beta}$. Что и требовалось доказать. □

Приведем теорему о необходимых и достаточных условиях существования регулярных прецессий вокруг наклонной оси. Достаточность условий понимается здесь в том смысле, что они обеспечивают возможность прецессионного движения, если моменты инерции системы удовлетворяют некоторым дополнительным неравенствам. Указанные неравенства, а также зависимости угла наклона оси и скорости прецессии от параметров будут выписаны при доказательстве теоремы.

Теорема 2. Тяжелый гиростат с переменным гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ может совершать регулярную прецессию вокруг наклонной оси, только если справедливо условие

$$(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta})^2 + (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})^2 + (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta})^2 = 0.$$

Допустимые скорости прецессии и собственного вращения связаны соотношением $(m-n)(m-2n) = 0$, причем равенство $m = 2n$ возможно тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$. Функция $\lambda(t)$ при этом – многочлен соответственно первой или второй степени относительно $\cos nt$, $\sin nt$.

Доказательство. Необходимость выполнения условий $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\beta} = 0$ и $(m-n)(m-2n) = 0$ установлена в леммах $2, 3$. Докажем остальные утверждения теоремы.

1°. Начнем с основного случая $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{\beta}$. Поскольку в уравнении (26) два первых члена – полиномы не выше второй степени относительно $\cos nt$ и $\sin nt$, то и $(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda$ не содержит третьей степени т.е. $m = n$ и $\lambda(t)$– линейная комбинация $\cos nt$ и $\sin nt$. Выпишем выражение (31) при $k = 1$:

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\dot\lambda - (\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\gamma}})\lambda + n(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\gamma}}) + 2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\dot\lambda = (\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta}).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 отсюда получаем, что $\lambda(t)$ линейно относительно $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$, а анализ старших членов в (27) дает условия $c_1 = n\zeta$ и $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta}) = 0$, или, что то же самое,

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}). \tag{36}$$

Итак, осталось показать, что $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}) = 0$. Предположим противное: пусть $\cos\mu \neq 0$. Анализ линейных по $\boldsymbol{\gamma}$ членов в (26) дает условие

$$n\cos\mu(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}) = [c_2 + n\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\cos\mu - 1)](\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}),$$

проектированием которого на $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ получаем $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = 0$ и

$$c_2 = n\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(1-\cos\mu) + n\cos\mu(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})/(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2.$$

Из (36) следует, что и $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = 0$, т.е. $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ принадлежат главной плоскости эллипсоида инерции. Далее будем считать, что $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Подсчет линейного члена в уравнении (27) позволяет выразить $\cos(nt+\varphi_0)$:

$$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta})\sin\chi\sin\mu\cos(nt+\varphi_0) = -\Phi(\dot{\boldsymbol{\gamma}},\boldsymbol{\alpha}), \tag{37}$$

$$\Phi := n\,[\cos\mu + 1]\,((J_1 - J_3)\alpha_2\beta_2 + (J_1 - J_2)\alpha_3\beta_3)/(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})^2.$$

Ввиду (36) и (37) требование тождественности (25) по членам второго порядка сводится к условию $\Phi\,[(\cos\mu+1)^2 - \sin^2\mu]\,n^2 = 0$. Поскольку $n\cos\mu \neq 0$, то выражение в квадратной скобке в нуль не обращается. Но и равенство $\Phi = 0$ также невозможно: левая часть (37) представляет собой ненулевое выражение. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение $\cos\mu \neq 0$ не верно. Итак, далее полагаем $\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{\beta}$.

Покажем, что найденные условия являются не только необходимыми, но и достаточными. В качестве полного набора скалярных уравнений возьмем проекции динамического уравнения на взаимноортогональные векторы $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\beta}$. Они выписаны ранее под номерами (26), (27) и (29) соответственно.

Рассмотрим (26). Учитывая, что λ задается формулой (16), а $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})$ в случае $\cos\mu = 0$ содержит только $\cos 2nt$, $\sin 2nt$ и постоянную, сравним в обеих частях (26) линейные члены. Получим $c_2 = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})c_1$,

$$\lambda = n\zeta\,[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]\,, \tag{38}$$

где постоянная ζ определена в (18) при выполнении условия (36). Подстановка (38) в уравнение (26) обращает его в тождество. В уравнении (27) осталось обеспечить равенство по членам первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})}{n(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2}(\boldsymbol{\alpha},\dot{\boldsymbol{\gamma}}) - \left[\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \frac{(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2}\right](\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) =\\ = \frac{\sin\chi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta})}{n^2}\sin(nt+\varphi_0).\end{aligned} \tag{39}$$

Если слева коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ одновременно не равны нулю, то полученное соотношение позволяет найти φ_0 и зависимость $\sin\chi$ от распределения масс гиростата, направления оси собственного вращения и скорости прецессии. Левая часть выражения (39) не постоянна только тогда, когда

$$(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2 + \left[\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \frac{(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2}\right]^2 \neq 0. \qquad (40)$$

Рассмотрим (29) – последнее из выбранного нами набора уравнений. При выполнении всех изложенных выше требований оно сводится к равенству

$$\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 + (\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta}) = -\frac{\cos\chi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta})}{n^2}. \qquad (41)$$

Условия (39) и (41) совместны. Выразив из них $\sin\chi$ и $\cos\chi$ и записав основное тригонометрическое тождество $\sin^2\chi + \cos^2\chi = 1$, получим зависимость n от параметров гиростата и направлений векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$:

$$[\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\alpha})]^2 + \frac{(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2 + (\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})^2} = \frac{|\boldsymbol{e}|^2}{n^4}. \qquad (42)$$

Итак, если выполняются условия (36), (40), то λ вида (38) обращает в тождества уравнения (26), (27), (29). Если при этом $\zeta \neq 0$, то и $\lambda(t) \neq \mathrm{const}$. Совместность условий на моменты инерции будет продемонстрирована ниже.

2°. Положим $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. В качестве системы независимых уравнений снова возьмем (26), (27) и (29). Дифференцируем (29), подставляем $\dot\lambda$ из (26) и исключаем из полученного выражения $(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\beta}) = m(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$ с помощью соотношения (27). В результате имеем

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{J\beta}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) \left[\frac{2m}{n}\cos^3\mu + 4\cos^2\mu + \left(\frac{3n}{m} - \frac{m}{n}\right)\cos\mu + \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1\right] + \\ +(\boldsymbol{J\gamma}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})_{2n}\left[\frac{2m}{n}\cos^2\mu + 4\cos\mu + \frac{4n}{m} - \frac{m}{n}\right] = 0.\end{gathered} \qquad (43)$$

Очевидно, что оба слагаемых должны быть равны нулю. При $m = n$ это возможно лишь когда $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} = 0$ и $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}) = 0$. Но в этом случае $(\boldsymbol{J\gamma},\boldsymbol{\gamma}) \equiv \mathrm{const}$ и, соответственно, $\lambda \equiv \mathrm{const}$.

При $m = 2n$ условие (43) выполняется, только если $\boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{\gamma}$. Кроме того, должно быть справедливым $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} \neq 0$, иначе $\lambda \equiv \mathrm{const}$. Эти условия позволяют из указанного набора уравнений определить $\lambda(t)$, φ_0 и m. Таким образом, и в случае $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$ утверждение теоремы верно. □

4. Решения уравнений движения, соответствующие регулярным прецессиям тяжелого гиростата. Пусть условия теоремы 2 выполнены. Выпишем явные решения уравнений движения гиростата с фиксированным направлением гиростатического момента.

а) Случай $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{m = 2n}$. С точностью до перестановки индексов совместное выполнение условий $\boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\beta}$ и $(\boldsymbol{J\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_{2n} \neq 0$ возможно лишь при

$$\beta_1 = (J_2 - J_3)\beta_2 = 0, \quad J_1 \neq J_2.$$

Выбором главных осей всегда можно обеспечить $\boldsymbol{\beta} = (0, 0, 1)$. Тогда в разложении (6) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, скорость прецессии $m = \sqrt{\dfrac{2(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta}) \sin\chi}{(J_1 - J_2)}}$,

$$\lambda(t) = n\left[(J_2 - J_1)\cos 2nt - J_3\right] - \frac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})\cos\chi}{2n}.$$

Фазовые переменные $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ зависят от времени следующим образом:

$$\omega_1 = 2n\sin nt, \quad \omega_2 = 2n\cos nt, \quad \omega_3 = n,$$
$$\nu_1 = \cos\chi\sin nt + \sin\chi\cos nt\sin 2nt,$$
$$\nu_2 = \cos\chi\cos nt - \sin\chi\sin nt\sin 2nt,$$
$$\nu_3 = -\sin\chi\cos 2nt.$$

Отметим, что для гиростата с *постоянным* гиростатическим моментом регулярные прецессии вокруг наклонной оси возможны только с равными скоростями прецессии и собственного вращения [8, § 3.1].

***б)* Случай $\boldsymbol{J(\alpha \times \beta)} \parallel \boldsymbol{\alpha \times \beta}$, $\boldsymbol{m = n}$.** Пусть вектор $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ направлен вдоль первой главной оси, т.е. $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Условие (36) в этом случае выполнено, а постоянная $\zeta = \dfrac{J_1 - J_2\beta_3^2 - J_3\beta_2^2}{(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})^2}$. Очевидно, что $\zeta \neq 0$ тогда и только тогда, когда *не выполняется условие Гриоли.* Кроме того, левая часть неравенства (40) принимает вид (8), т.е. условие существования регулярных прецессий уравновешенного гиростата также выполняться не должно. Угол наклона оси прецессии и скорость n задаются равенствами

$$\sin\chi = \frac{n^2}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})}\left(\frac{(J_3 - J_1)\alpha_2\beta_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3\beta_3}{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}\right),$$
$$n^4 = |\boldsymbol{e}|^2\left(\zeta^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 + 2\zeta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + |\boldsymbol{J\beta}|^2\right)^{-1},$$

причем неравенство $|\sin\chi| < 1$ определяет дополнительные условия на параметры. Зависимость $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = \frac{(J_1 - J_2\beta_3^2 - J_3\beta_2^2)\,n}{(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})^2}\left[(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\cos nt + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\right],$$

при этом система уравнений движения гиростата (1) имеет решение

$$\omega_1 = n\sin nt, \;\; \omega_2 = n(\beta_2 + \beta_3\cos nt), \;\; \omega_3 = n(\beta_3 - \beta_2\cos nt),$$
$$\nu_1 = \sin nt(\cos\chi + \sin\chi\cos nt),$$
$$\nu_2 = \cos nt(\beta_3\cos\chi - \beta_2\sin\chi) - \beta_3\sin\chi\sin^2 nt,$$
$$\nu_3 = -\cos nt(\beta_2\cos\chi + \beta_3\sin\chi) + \beta_2\sin\chi\sin^2 nt.$$

Выписанное $\boldsymbol{\nu}(t)$ удовлетворяет разложению (6) с $\varphi_0 = \pi/2$, что характерно и для решения Гриоли. Для найденного решения также верны тождества

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2n^2 \quad \text{и} \quad n(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) + \sin\chi(\omega_2\beta_3 - \omega_3\beta_2) = 0.$$

в) Случай $(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = 0$, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, но векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ не лежат в одной главной плоскости. Тогда $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0$ и неравенство (40) справедливо, т.е. угол наклона оси прецессии (см. (41)) не равен нулю, а скорость прецессии определяется из (42). При $\zeta \neq 0$ функция $\lambda(t)$ вида (38) обеспечивает возможность прецессионного движения. Полученные ограничения на моменты инерции совместны. Пусть, например,

$$J_2 = J_3 \neq J_1, \quad \alpha_1 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\beta_1 \neq 0. \tag{44}$$

Несложно проверить, что условие (36) при этом выполняется. Постоянная ζ в этом случае равна $(J_1 - J_2)(\beta_2^2 + \beta_3^2) \neq 0$. Функция $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = n(J_1 - J_2)\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\cos nt,$$

а зависимости n^2 и $\cos\chi$ от распределения масс выражаются формулами

$$n^2 = |\boldsymbol{e}||\boldsymbol{J\beta}|^{-1}, \quad \cos\chi = -(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{J\beta}|^{-1}.$$

Итак, если параметры подчинены условиям (44), то система (1) уравнений движения гиростата имеет решение $(\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\nu}(t))$, где $\boldsymbol{\omega} = n(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta})$,

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}\sin nt, \;\; \gamma_2 = \frac{\beta_3\cos nt - \beta_1\beta_2\sin nt}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}}, \;\; \gamma_3 = \frac{-\beta_2\cos nt - \beta_1\beta_3\sin nt}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}},$$

а $\boldsymbol{\nu}(t)$ удовлетворяет разложению (6) с $\varphi_0 = 0$, и $\cos\mu = 0$. Остальные решения этого семейства, определяемые условиями теоремы 2, могут быть выписаны аналогичным образом.

Таким образом, в случае, когда направление гиростатического момента фиксировано в относительном базисе, проведено полное исследование возможных регулярных прецессий гиростата вокруг неподвижной наклонной оси.

1. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел// Механика твердого тела – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
2. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. – М: Мир, 1974. – 526 с.
3. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
4. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси// Тр. ИПММ НАНУ. – 2009. – **19**. – С. 30-35.
5. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura ed Appl. Ser.4. – 1947.– **26** (4). – P. 271-281.

6. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 288 с.
7. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
8. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

O.S. Volkova

Regular precessions of a gyrostat with fixed point in the gravity field

This article represents an investigation of regular precessions of a gyrostat about the fixed inclined axis. For a gyrostat with variable gyrostatic momentum, whose direction is fixed in the rotating frame, necessary and sufficient conditions of regular precession existence are obtained. The inclination angle of precession axis dependence on both gyrostat parameters and the proper rotation axis direction is computed. The respective value of gyrostatic momentum and solutions of the motion equations are explicitly found. Among them the exact solution, which becomes the Grioli one in the case of zero gyrostatic momentum, is presented. New solution, which correspondents to the regular precession of a gyrostat when the precession velocity is twice as much than proper rotation one, is also obtained.

Keywords: *gyrostat, variable gyrostatic momentum, exact solutions, regular precession.*

О.С. Волкова

Регулярні прецесії гіростата з нерухомою точкою в полі сили тяжіння

Вивчено регулярні прецесії гіростата навколо нерухомої похилої осі. У припущенні, що змінний гіростатичний момент зберігає напрямок у відносному базисі, отримано необхідні і достатні умови існування таких рухів. Вказано залежність кута між віссю прецесії та вертикаллю від параметрів гіростата та напрямку осі власного обертання. Знайдено величину гіростатичного моменту та відповідні розв'язки рівнянь руху. В явному вигляді отримано розв'язок, який у відсутності гіростатичного момента вироджується у розв'язок Гріолі. Знайдено також новий розв'язок, що відповідає регулярній прецесії важкого гіростата навколо похилої осі зі швидкістю, вдвічі більшою за швидкість власного обертання.

Ключові слова: *гіростат, змінний гіростатичний момент, точні розв'язки, регулярна прецесія.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
volkova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.09.10