

УДК 531.38

©2010. И.И. Харламова, Г.Е. Смирнов

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Изучаются особые периодические движения (критические точки ранга 1 интегрального отображения), найденные в работе М.П. Харламова (Механика твердого тела, вып. 37, 2007) в интегрируемой задаче о движении гири в двойном поле при условиях Ковалевской на моменты инерции. Исследованы возможные перестройки внутри множества этих решений в зависимости от существенных параметров – одного интегрального и двух физических. Получены аналитические уравнения разделяющего множества и его особенностей, указано количество возникающих областей с различным набором решений. Найден образ разделяющего множества в пространстве параметров, задающих бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях. Вычисления, связанные с преобразованиями многочленов высоких степеней, выполнены в компьютерной системе Mathematica 7.

Ключевые слова: гири в Ковалевской, двойное поле, критические движения.

Введение. В невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе критические точки ранга 1 (так называемые особые периодические движения) организованы в подсистемы с одной степенью свободы. Поэтому в принципе соответствующие траектории образуют однопараметрические семейства (при фиксированных физических параметрах задачи). Сам факт построения периодических решений всегда имеет в динамике особое значение. Но важность исследования таких семейств, кроме этого, состоит также и в том, что в системах с тремя степенями свободы их бифуркации порождают перестройки типов плоских сечений бифуркационных диаграмм задачи в целом. В случае Ковалевской–Реймана–Семенова–Тян–Шанского [1] при отсутствии гири статического момента λ (волчок в двойном поле) явное представление зависимости особых периодических движений (ОПД) от одного интегрального параметра позволили получить [2] полную классификацию бифуркационных диаграмм Σ_h интегрального отображения на изоэнергетических поверхностях $H = h$, т.е. построить разделяющее множество на плоскости (h, γ) , где γ – единственный существенный физический параметр задачи (отношение напряженностей силовых полей). При $\lambda \neq 0$ (гири в двойном поле) все критические точки ранга 1 также найдены [3] и уравнения соответствующих ОПД интегрируются в эллиптических функциях. Однако эти решения удалось выписать лишь в зависимости от двух нефизических параметров, связанных уравнением высокой степени. Через эти же параметры выражены и постоянные общих интегралов. Это удобно для численного построения плоских диаграмм Σ_h , так как при заданном h эффективно вычисляются все

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 10-01-97001.

граничные точки одномерных сегментов. Попытки явно описать соответствующие разделяющие поверхности в пространстве (h, γ, λ) , названные атласом бифуркационных диаграмм [4], еще не привели к окончательному результату. В настоящей работе выполнено исследование условий существования и бифуркаций ОПД, выписаны явные уравнения соответствующих разделяющих поверхностей. Отметим, что многие вычисления выполнены в компьютерной системе Mathematica 7 (Academic License # L3298-7174) ввиду крайне высоких вычислительных сложностей. При этом во всех случаях удалось провести исследование полностью, доказать все утверждения о количестве и характере решений тех или иных уравнений. Несмотря на использование компьютерных технологий, все рассуждения, представленные ниже, являются доказательствами, поскольку описаны все этапы вычислений, предьявлены промежуточные результаты, и любое вычисление при необходимости может быть легко повторено. Ряд результатов вывести “вручную” уже нельзя. В то же время, в большинстве случаев получить ответ напрямую не помогает и компьютер – необходимо увидеть и задать в компьютерной системе нужную подстановку. Поэтому, несмотря на фантастические возможности систем аналитических вычислений, роль исследователя по-прежнему остается решающей.

1. Исходные уравнения. Пусть α, β – характеристические векторы взаимно ортогональных силовых полей с модулями $|\alpha| = a, |\beta| = b$ и

$$a > b > 0. \quad (1)$$

Пусть ω – угловая скорость тела, λ – единственная отличная от нуля, осевая компонента вектора гиригостатического момента. Выражения фазовых переменных через вспомогательную переменную $w = \omega_1^2 + \omega_2^2 \geq 0$ описываются уравнениями (30) работы [3]. В этих выражениях фигурируют физические параметры λ, p, r ($p = \sqrt{a^2 + b^2} > r = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$), а также два параметра σ, u , первый из которых есть неопределенный множитель Лагранжа в линейной зависимости дифференциалов общих интегралов, и потому сам является частным интегралом на рассматриваемых траекториях, а второй – вспомогательный параметр, введенный в процессе вычислений с целью получения простых формул и связанный с σ уравнением

$$L = \lambda^2(\lambda^2 + \sigma)^2 u^5 + (\lambda^2 + \sigma)[2p^2 \lambda^4 - (\lambda^2 + \sigma)^3 \sigma] \sigma u^4 + r^4 \lambda^6 \sigma^2 u^3 + 2r^4 \lambda^4 \sigma^4 (\lambda^2 + \sigma)^2 u^2 - r^8 \lambda^8 \sigma^6 = 0. \quad (2)$$

Зависимость w от времени описывается уравнением

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{4\sigma^2} P_4(w), \quad (3)$$

где $P_4(w) = P_+(w)P_-(w)$ и

$$P_{\pm}(w) = w^2 + 2\sigma^2 \frac{u \pm r^2 \lambda^2}{\lambda^2 u} w + \frac{\sigma[u^3 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma^2 u^2 + r^4 \lambda^4 \sigma^3]}{(\lambda^2 + \sigma)\lambda^2 u^2}.$$

В частности, условия вещественности решений имеют вид системы неравенств

$$P_4(w) \leq 0, \quad w \geq 0, \quad (4)$$

исследование совместности которых будем проводить в плоскости (σ, λ) с учетом зависимости от a, b . Хотя существенным является лишь отношение $\gamma = b/a \in (0, 1)$, сохраним в общих уравнениях оба параметра для возможности в будущем использовать любые предельные переходы. Отметим, что во всех приведенных формулах встречаются лишь четные степени λ , поэтому достаточно рассмотреть полуплоскость $\lambda \geq 0$. Ниже все утверждения формулируются для этой полуплоскости, что особо уже не оговаривается. При фиксированных σ, λ имеется до пяти значений u , удовлетворяющих (2). Некоторым из них соответствуют решения уравнения (3) при условиях (4), причем таких решений может быть и несколько, если множество (4) несвязно. Пусть $\mathcal{P}(\sigma, \lambda, u)$ – набор решений (3) как совокупность геометрических объектов на плоскости (w, \dot{w}) и пусть $\mathcal{P}(\sigma, \lambda) = \cup_u \mathcal{P}(\sigma, \lambda, u)$. Применительно к задаче количественной классификации ОПД назовем *разделяющим множеством* подмножество \mathcal{S} в плоскости (σ, λ) , при переходе через которое меняется набор $\mathcal{P}(\sigma, \lambda)$. Сразу же отметим часть \mathcal{S}_0 разделяющего множества \mathcal{S} , состоящую из координатных осей и особой параболы $\Pi : \lambda^2 + \sigma = 0$. На этом множестве выражения для явных решений, выписанные в [3], имеют особенности. Как показано в [5], особенность на параболе устранима предельным переходом, однако перестройки в множестве $\mathcal{P}(\sigma, \lambda)$ при этом не исключены.

2. Первое разделяющее множество. Периодические решения претерпевают бифуркации при переходе через неподвижные точки, которые соответствуют кратному корню многочлена P_4 . Дискриминанты многочленов P_{\pm} имеют вид

$$\frac{\sigma}{\lambda^4(\lambda^2 + \sigma)u^2} D_{\pm}, \quad D_{\pm} = [r^2\lambda^2\sigma \pm (\lambda^2 + \sigma)u]^2\sigma^2 - \lambda^2u^3.$$

Замечание 1. *Здесь и далее в результатах и дискриминантах нас интересует лишь их зависимость от параметров (возможность обращения в нуль) и, в отдельных случаях, их знак. Поэтому, для простоты записи, пишем выражения, имея в виду равенство с точностью до положительного числового множителя.*

В соответствии с этой договоренностью, результаты многочленов D_{\pm} с многочленом L по переменной u равны $r^{16}(p^2 \pm r^2)^3 \lambda^{30} \sigma^{19} (\lambda^2 + \sigma)^3$. Эти значения не обращаются в нуль за пределами \mathcal{S}_0 . Следовательно, кратный корень P_4 может быть лишь общим корнем P_+ и P_- . Тогда, как и должно быть в неподвижной точке, этот корень нулевой. Поэтому

$$P_0(u) = u^3 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma^2 u^2 + r^4 \lambda^4 \sigma^3 = 0. \quad (5)$$

Приравниваем к нулю результат многочленов L и P_0 по u , получим

$$r^{16} \lambda^{24} \sigma^{15} (\lambda^2 + \sigma)^3 \{ r^8 + r^4 [6p^2 \lambda^4 + \lambda^8 - 4\lambda^2 (p^2 + \lambda^4) \sigma - 2(2p^2 + \lambda^4) \sigma^2 + 4\lambda^2 \sigma^3 + 2\sigma^4] - [\sigma(\lambda^2 + \sigma) - 2p^2]^2 [2p^2 \lambda^4 - \sigma^2 (\lambda^2 + \sigma)^2] \} = 0.$$

Вне \mathcal{S}_0 достаточно найти нули выражения в фигурной скобке, которое разлагается на множители в виде $Q_1Q_2Q_3Q_4$. Поэтому первое разделяющее множество (ПРМ) в составе \mathcal{S} – четыре кривые

$$\begin{aligned} Q_1 &= (a - b)^2 + (a + b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_2 &= (a + b)^2 + (a - b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_3 &= (a + b)^2 - (a - b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_4 &= (a - b)^2 - (a + b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0. \end{aligned}$$

Сами эти кривые будем обозначать так же, как и левые части уравнений – через $Q_1 - Q_4$, а их объединение – через \mathcal{S}_1 . Значения энергии в неподвижных точках тела в двойном поле хорошо известны (см., например, [6]). В работе [3] выполнен сдвиг энергии на константу. Примем здесь стандартное выражение интеграла энергии

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2),$$

тогда его критические значения таковы

$$h = \pm a \pm b. \quad (6)$$

Покажем, как получить их в точках ПРМ. Исключая старшие степени u в многочленах P_0 и L , на кривых Q_i найдем

$$u_{1,2} = (a \pm b)\lambda^2\sigma, \quad u_{3,4} = (-a \pm b)\lambda^2\sigma. \quad (7)$$

Подставим в функцию H значения фазовых переменных, полученные из выражений (8), (30) работы [3]:

$$h = -\frac{u^3\lambda^2 - r^4\lambda^4\sigma^3(\lambda^2 + 2\sigma) + u^2\sigma^2(\lambda^2 + \sigma)(\lambda^2 + 2\sigma)}{2u^2\lambda^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)}. \quad (8)$$

Исключим отсюда u^3 с помощью условия (5), и подставим u_i из (7). Получим критические значения (6), занумерованные в порядке возрастания.

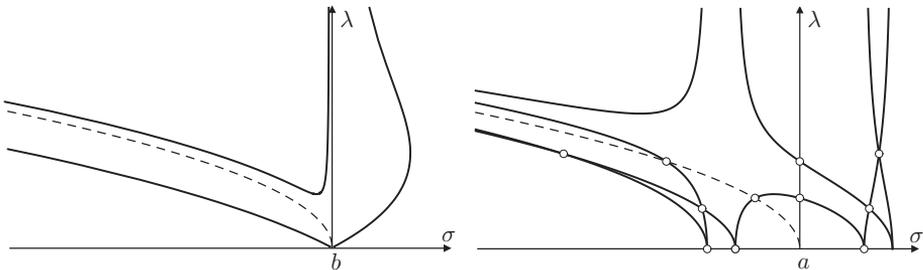


Рис. 1. Первое и второе разделяющие множества.

Геометрия ПРМ определяется следующим непосредственно проверяемым утверждением.

Предложение 1. Первое разделяющее множество имеет ровно четыре кратные точки при $\lambda > 0$

$$Q_1 \cap Q_2 = \{q_+^{(12)}, q_-^{(12)}\}, \quad Q_1 \cap Q_3 = \{q_+^{(13)}, q_-^{(13)}\},$$

где

$$q_{\pm}^{(12)} = (-a \pm \sqrt{4a^2 + b^2}, \sqrt{2a}), \quad q_{\pm}^{(13)} = (-b \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}, \sqrt{2b}); \quad (9)$$

четыре точки пересечения с осью $\lambda = 0$ (каждая принадлежит двум кривым)

$$Q_1 \cap Q_4 \cap \{\lambda = 0\} = \{(-a + b, 0), (a - b, 0)\}, \\ Q_2 \cap Q_3 \cap \{\lambda = 0\} = \{(-a - b, 0), (a + b, 0)\},$$

две точки пересечения с осью $\sigma = 0$

$$Q_3 \cap \{\sigma = 0\} = \left(0, \frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\right), \quad Q_4 \cap \{\sigma = 0\} = \left(0, \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}\right)$$

и две точки пересечения с особой параболой

$$Q_3 \cap \Pi = \left(-\frac{(a+b)^2}{a-b}, \frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\right), \quad Q_4 \cap \Pi = \left(-\frac{(a-b)^2}{a+b}, \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}\right).$$

Из найденных выражений для координат кратных точек следует, что пересечения трех кривых Q_i в одной точке невозможны. Таким образом, множество \mathcal{S}_1 вместе с отмеченным ранее особым множеством \mathcal{S}_0 разбивает верхнюю полуплоскость на 19 областей (рис. 1, a , штриховой линией показана особая парабола).

3. Второе разделяющее множество. Количество решений в зависимости от параметров может изменяться при переходе через такие значения, при которых уравнение (2) имеет кратный корень по u . Назовем это множество параметров вторым разделяющим множеством (ВРМ) и обозначим через \mathcal{S}_2 . Из условия $L'_u = 0$, учитывая, что в (2) $u \neq 0$, получим

$$5u^3\lambda^2(\lambda^2 + \sigma)^2 - 4u^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)[\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4] + \\ + 3r^4u\lambda^6\sigma^2 + 4r^4\lambda^4\sigma^4(\lambda^2 + \sigma)^2 = 0. \quad (10)$$

Условие совместности по u уравнений (2), (10) за пределами \mathcal{S}_0 приводит к уравнению

$$R_L = 27r^8\lambda^{16} - 256\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3[\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4]^3 + \\ + 864r^4\lambda^8\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3[5\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4] = 0. \quad (11)$$

Для его упрощения заметим, что в выражении R_L параметры λ, σ входят в виде определенной комбинации. Обозначим

$$V = \frac{4(\lambda^2 + \sigma)^3\sigma}{\lambda^4}, \quad (12)$$

тогда уравнение (11) переписывается в виде

$$R_L^* = V^4 - 24p^2V^3 + 6(32p^4 - 45r^4)V^2 - 16p^2(32p^4 - 27r^4)V - 27r^8 = 0. \quad (13)$$

Предложение 2. В области параметров (1) уравнение (13) имеет ровно два вещественных корня V_1, V_2 противоположных знаков

$$V_1 = (\varkappa_1 + \varkappa_2)^3 > 0, \quad V_2 = (\varkappa_1 - \varkappa_2)^3 < 0. \quad (14)$$

$$\text{Здесь } \varkappa_1 = \sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} + 2p^2\varkappa_1^{-1}}.$$

Доказательство. Непосредственное вычисление корней обозримых выражений не дает. Выполним подстановку $V = W^3, r = q^3$, получим разложение $R_L^* = P_1P_2$, где

$$P_1 = 3q^8 + 8p^2W + 6q^4W^2 - W^4,$$

$$P_2 = 9q^{16} - 24p^2q^8W + 64p^4W^2 - 18q^{12}W^2 - 48p^2q^4W^3 + 39q^8W^4 - 16p^2W^5 + 6q^4W^6 + W^8.$$

Дискриминант P_2 равен $r^{40/3}(512p^4 - 169r^4)^2(p^4 - r^4)^4$ (см. замечание 1), поэтому в области (1) многочлен P_2 кратных корней не имеет, а численная проверка дает все комплексные корни. Вычисление корней P_1 приводит к выражениям

$$\varepsilon_1 \sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}} + \varepsilon_2 \sqrt{2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} + \varepsilon_1 \frac{2p^2}{\sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}}},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Заметим, что

$$\left[\frac{2p^2}{\sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}} \right]^2 - \left[2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} \right]^2 = 3(p^4 - r^4)^{2/3} > 0,$$

поэтому вещественные корни отвечают только значению $\varepsilon_1 = 1$. Произведение всех корней отрицательно, поэтому пара вещественных корней имеет разные знаки, но, очевидно, что корень с $\varepsilon_2 = 1$ положительный. Утверждение доказано. \square

Теперь кривые в составе ВРМ легко строятся численно (рис. 1, b). Удобно ввести параметризацию, положив $\sigma = s\lambda^2$. Тогда из (12) получим следующие три ветви ВРМ:

$$\begin{aligned} D_A : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_1}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_1}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (-\infty, -1); \\ D_B : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_1}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_1}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (0, +\infty); \\ D_C : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_2}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_2}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (-1, 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно из рис. 1, b , кривые в составе \mathcal{S}_2 вместе с множеством \mathcal{S}_0 делят верхнюю полуплоскость на шесть областей. В каждой из них сохраняется количество корней многочлена $L(u)$. Заметим, что $L(0) = -r^8\lambda^8\sigma^6$ обращается в нуль только на осях координат. Поэтому в каждой из областей не могут изменяться и знаки корней. Теперь всю необходимую информацию о корнях $L(u)$ легко получить численно.

Для нахождения значения энергии, отвечающего этим разделяющим случаям, необходимо выразить общий корень u уравнений (2), (10). Для этого в дополнение к (12) выполним подстановку $u = \sigma\sqrt[3]{\lambda^2\sigma}Z$. Система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} (2V)^{1/3}Z^4[8p^2 - V + 2(2V)^{1/3}Z] + 4r^4[(2V)^{2/3} + 2Z]Z^2 - 8r^8 &= 0, \\ (2V)^{1/3}Z^2[16p^2 - 2V + 5(2V)^{1/3}Z] + 4r^4[(2V)^{2/3} + 3Z] &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Условие ее совместности по Z , естественно, дает уравнение (13) с решениями (14). Приравняем к нулю результат левых частей (16) по переменной $V^{1/3}$, получим

$$r^4(p^4 - r^4)Z^{14}(Z^3 - 4r^4)^4 = 0,$$

а поскольку из первого уравнения (16) следует, что $Z \neq 0$, то $Z = r\sqrt[3]{4r}$, и, следовательно, кратный корень $L(u)$ равен $u = r\sigma\sqrt[3]{4r\lambda^2\sigma}$. Подставляя это значение вместе с (15) в (8), найдем

$$h = -\frac{s(2s+1)V^{2/3} + (2s^2 + s - 1)r^{4/3}}{4\sqrt{s(1+s)}^3V^{1/6}}. \quad (17)$$

Здесь $V = V_{1,2}$ согласно (14), а промежуток изменения параметра s определяется в соответствии с уравнениями (15). Из (15) возьмем формулы и для $\lambda(s)$. Получим, после перехода к безразмерным переменным $b/a, h/a, \lambda/\sqrt{a}$, параметрические уравнения разделяющей поверхности для классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях, разрешающие неявные уравнения работы [4]. Более того, промежутки изменения s определяют условия, при которых действительно реализуются перестройки таких диаграмм. В силу ограниченности объема публикации, мы не приводим иллюстраций, которые теперь легко могут быть построены.

4. Пересечения разделяющих множеств. Для того чтобы получить общую картину на плоскости (σ, λ) , найдем пересечения \mathcal{S}_2 с кривыми Q_i , составляющими \mathcal{S}_1 .

Остановимся более подробно на пересечении $\mathcal{S}_2 \cap Q_1$. Из уравнения Q_1 выразим

$$\lambda^2 = \frac{\sigma^2 - (a-b)^2}{a+b-\sigma} \quad (18)$$

и подставим в уравнение (11). Получим $M_1^2(\sigma)N_1(\sigma) = 0$, где

$$M_1 = (a-b)^4(a+b) - 4(a^2-b^2)^2\sigma + 6(a-b)^2(a+b)\sigma^2 - 4(a-b)^2\sigma^3 + (a+b)\sigma^4,$$

$$N_1 = (a-b)^{10} \sum_{i=0}^{12} (a-b)^{-i} A_i \sigma^i$$

и

$$A_0 = 27(a-b)^2(a+b)^6,$$

$$A_1 = -4(a+b)(53a^6 - 270a^5b + 1131a^4b^2 - 1188a^3b^3 + 1131a^2b^4 - 270ab^5 + 53b^6),$$

$$A_2 = 2(a+b)^2(331a^6 - 3342a^5b + 9525a^4b^2 - 12516a^3b^3 + 9525a^2b^4 - 3342ab^5 + 331b^6),$$

$$A_3 = -12(a^2-b^2)(75a^6 - 286a^5b - 1547a^4b^2 + 2236a^3b^3 - 1547a^2b^4 - 286ab^5 + 75b^6),$$

$$A_4 = -(75a^8 - 14492a^7b + 39404a^6b^2 + 12444a^5b^3 - 50286a^4b^4 + 12444a^3b^5 + 39404a^2b^6 - 14492ab^7 + 75b^8),$$

$$A_5 = 8(a^2-b^2)(267a^6 - 2986a^5b - 1627a^4b^2 + 6068a^3b^3 - 1627a^2b^4 - 2986ab^5 + 267b^6),$$

$$A_6 = -12(273a^8 - 5492a^6b^2 + 6342a^4b^4 - 5492a^2b^6 + 273b^8),$$

$$A_{12-i}(a, b) = A_i(a, -b) \quad (i = 0, \dots, 5).$$

Корни M_1 отвечают за точки касания кривых \mathcal{S}_2 и Q_1 , а корни N_1 отвечают за точки трансверсального пересечения кривых \mathcal{S}_2 и Q_1 . Из этих корней необходимо взять лишь те, которые обеспечивают вещественный корень уравнения (18) относительно λ , т.е. удовлетворяющие неравенству

$$P_1(\sigma) = [\sigma^2 - (a-b)^2](a+b-\sigma) \geq 0. \quad (19)$$

Количество и взаимное расположение таких корней может измениться лишь в следующих случаях: один из многочленов M_1, N_1 имеет общий корень с P_1 , либо один из этих многочленов имеет кратный корень в области (19). Вычисляем результаты

$$\begin{aligned} \text{Res}(M_1, P_1, \sigma) &= -a^4b^4(a-b)^6(a+b); \\ \text{Res}(N_1, P_1, \sigma) &= -a^{16}b^{16}(a-b)^{20}(a+b)^2; \\ \text{Res}(M_1, M'_1, \sigma) &= -a^4b^4(a-b)^8(a+b)^3; \\ \text{Res}(N_1, N'_1, \sigma) &= a^{66}b^{66}(a-b)^{106}(a+b)^{16}(343a^4 + 1362a^2b^2 + 343b^4)^4. \end{aligned}$$

Самым удивительным является, конечно, последний. В нем отброшенный здесь числовой множитель содержит 76 цифр и равен $2^{212} \times 3^{24}$, однако, вычисляется точно. Ни одно из полученных выражений в нуль не обращается,

поэтому качественная структура множества $\mathcal{S}_2 \cap Q_1$ не зависит от параметров a, b в выбранной области их изменения. Следовательно, численное решение полностью определяет и качественную картину. Находим, что M_1 имеет единственный корень в области (19) и он дает точку касания Q_1 с кривой D_B . Многочлен N_1 также имеет единственный корень в указанной области. Он порождает точку трансверсального пересечения Q_1 с кривой D_A (рис. 2, a).

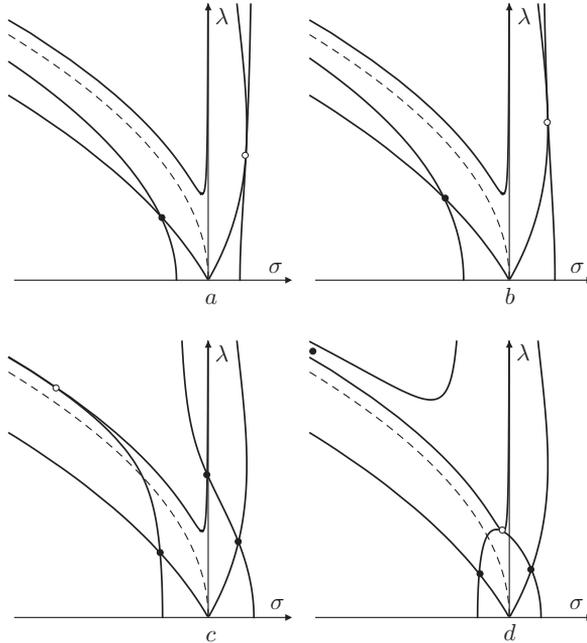


Рис. 2. Пересечения $\mathcal{S}_2 \cap Q_i$.

Рассмотрим пересечение $\mathcal{S}_2 \cap Q_2$. Отметим, что все уравнения получаются из уравнений для Q_1 заменой $b \rightarrow -b$, поэтому верны выводы об отсутствии каких-либо общих или кратных корней у соответствующих многочленов P_2, M_2, N_2 , т.е. качественная картина от параметров снова не зависит. Находим, что кривая Q_2 имеет ровно одну точку пересечения с \mathcal{S}_2 на ветви D_A и ровно одну точку касания с ветвью D_B (рис. 2, b).

Замечая, что случай с кривой Q_3 получается из предыдущего заменой $\lambda^2 \rightarrow -\lambda^2, \sigma \rightarrow -\sigma$, с помощью аналогичных выкладок и рассуждений находим, что кривая Q_3 имеет ровно по одной точке пересечения с каждой из ветвей D_A, D_B, D_C и одну точку касания с ветвью D_C (рис. 2, c).

Для пересечения $\mathcal{S}_2 \cap Q_4$ все уравнения получаются из уравнений для Q_3 заменой $b \rightarrow -b$. Находим, что кривая Q_4 имеет ровно по одной точке пересечения с каждой из ветвей D_A, D_B, D_C и одну точку касания с ветвью D_C . Точка $Q_4 \cap D_C$ имеет отрицательную координату σ по модулю на порядки больше остальных (например, для $a = 1, b = 0.5$ эта точка имеет координаты $\sigma \approx -1104.12; \lambda \approx 33.25$), поэтому на рис. 2, d она показана условно.

5. Перестройки разделяющего множества. Для почти всех значений физических параметров a, b структура разделяющего множества \mathcal{S} полностью определена. Перестройки этой структуры по указанным параметрам могут отвечать лишь случаям наличия в составе разделяющего множества точек кратности три и выше. Как отмечено ранее, пересечения трех Q_i всегда пусты, поэтому точек кратности четыре не существует, а точки кратности три возможны лишь для таких значений параметров a, b , при которых для некоторой пары индексов $i \neq j$

$$\mathcal{S}_2 \cap Q_i \cap Q_j \neq \emptyset. \quad (20)$$

Заметим, что это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы при переходе параметров a, b через заданные значения могло измениться и взаимное расположение точек двух различных множеств $\mathcal{S}_2 \cap Q_i$.

Согласно предложению 1 имеется всего четыре точки, принадлежащие при $\lambda > 0$ паре множеств Q_i , а именно, точки (9). Для исследования случая (20) необходимо проверить возможность $q_{\pm}^{(ij)} \in \mathcal{S}_2$, что означает равенство $R_L(q_{\pm}^{(ij)}) = 0$. Имеем

$$R_L(q_{\pm}^{(13)}) = 1024 a^{20} (A_1 \pm A_2) X, \quad X = (b/a)^2 > 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + 32X + 118X^2 - 1756X^3 - 10511X^4 + 8388X^5 + \\ &\quad + 143104X^6 + 221840X^7 - 768X^8); \\ A_2 &= 8(1 + 3X)\sqrt{1 + 4X}(1 + 10X - 60X^2 - 370X^3 + 891X^4 + \\ &\quad + 4632X^5 + 16X^6). \end{aligned}$$

Обозначая $\gamma = b/a \in [0, 1]$, вычислим

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_2^2 &= -(1 + 4\gamma + 9\gamma^2 + 18\gamma^3 + 20\gamma^4 + 12\gamma^5)^2 \times \\ &\quad \times (-1 + 4\gamma - 9\gamma^2 + 18\gamma^3 - 20\gamma^4 + 12\gamma^5)^2 \times \\ &\quad \times (-1 + 4\gamma^2 + 602\gamma^4 + 7140\gamma^6 + 24863\gamma^8 + 32928\gamma^{10}). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение $A_1^2 - A_2^2 = 0$ уже не содержит параметров и имеет ровно два положительных корня

$$\begin{aligned} b/a &= \gamma_* \approx 0.17865486876 \quad (\text{точка } q_-^{(13)}, \sigma < 0), \\ b/a &= \gamma^* \approx 0.44041017065 \quad (\text{точка } q_+^{(13)}, \sigma > 0). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом первый из них является корнем многочлена в последней скобке (21), т.е. простым корнем, и поэтому в соответствующем случае все три кривые пересекаются трансверсально, а второй является корнем многочлена во

второй скобке (21), входящей в это уравнение в квадрате, и поэтому, являясь кратным корнем, связан с точками касания. Разделяющее множество для значений (22) показано на рис. 3. Видно, что первое значение (рис. 3, а) отвечает случаю, когда кривые Q_1 и Q_3 пересекаются на ветви D_A , второе (рис. 3, б) – случаю, когда точка касания кривых D_C и Q_1 находится на кривой Q_3 , что и объясняет кратность данного значения b/a в уравнении (21).

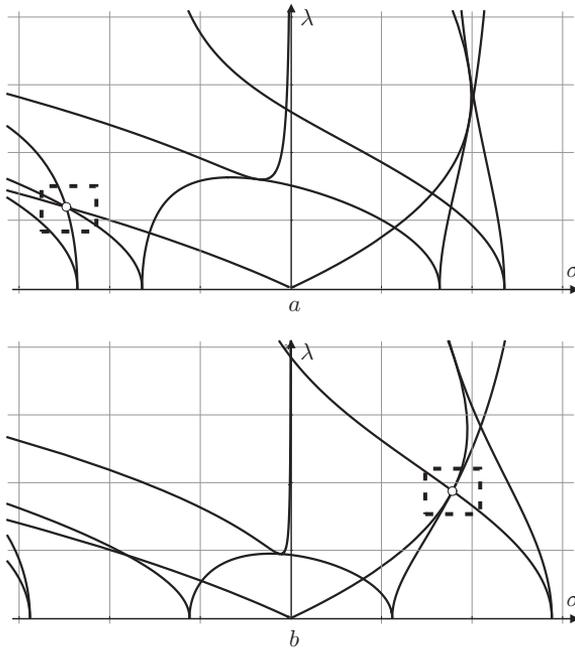


Рис. 3. Перестройки областей в окрестности $b/a = \gamma_*, \gamma^*$.

Заметим теперь, что точки $q_{\pm}^{(12)}$ получаются из $q_{\pm}^{(13)}$ перестановкой значений a и b , а функция R_L от такой перестановки не изменяется. Поэтому, проводя аналогичные вычисления для точек $q_{\pm}^{(12)}$, приходим к уравнению вида (21), в котором уже $Y = a/b$. Для этого отношения найденные выше корни являются посторонними, так как $a/b > 1$. Таким образом, этот случай не реализуется при допустимых значениях параметров.

Итак, построенное множество \mathcal{S} разбивает верхнюю полуплоскость параметров (σ, λ) на 35 открытых областей, которые несложно закодировать в соответствии с номерами пары областей, порожденных первым и вторым разделяющими множествами. При переходе через значения (22) одна из таких областей исчезает, взамен появляется область уже с другим кодом и, соответственно, с другим количеством порожденных периодических траекторий. Поскольку внутри каждой из образовавшихся областей количество траекторий измениться уже не может, то численный анализ дает полную картину. В четырех областях движений нет, в остальных количество траекторий ва-

рируется от одной до пяти. Исследование разделяющего множества, определяющего условия существования и количества периодических траекторий закончено.

Закключение. В работе представлено полное аналитическое исследование разделяющих множеств в пространстве параметров задачи о движении гиристора Ковалевской в двойном поле, связанных с наличием и бифуркациями внутри совокупности критических точек ранга 1 интегрального отображения. Образ этого множества в трехмерном пространстве существенных параметров изоэнергетических многообразий определяет атлас бифуркационных диаграмм. Получены явные уравнения (6) и (17) для поверхностей в составе такого атласа, фактически решающие неявные уравнения высокой степени, полученные в работе [4] и, что еще более важно, исключают посторонние решения этих уравнений. В результате получена аналитическая основа для полной классификации и визуализации бифуркационных диаграмм гиристора Ковалевской в двойном поле.

1. Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функциональный анализ и его приложения. – 1988. – **22**, 2. – С. 87-88.
2. Харламов М.П. Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – № 36. – С. 13-22.
3. Харламов М.П. Особые периодические движения гиристора Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2007. – № 37. – С. 85-96.
4. Рябов П.Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела. – 2007. – № 37. – С. 97-111.
5. Kharlamov M.P. Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // Hiroshima Math. J. – 2009. – **39**, 3. – P. 327-350.
6. Харламов М.П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47-58.

I.I. Kharlamova, G.E. Smirnov

The existence conditions for periodic motions of the Kowalevski gyrostat in double force field

Consider the integrable problem of motion of a gyrostat with the Kowalevski type inertia tensor in a double force field. We study the special periodic motions (the rank 1 critical points of the integral mapping) found by M.P. Kharlamov (Mekh. Tverd. Tela, No 37, 2007). Possible transformations inside the set of such motions depending on three essential parameters are studied. We obtain the analytical equations of the separating set and its singularities, point out the regions with different sets of motions. We find the image of the separating set in the space of parameters defining the bifurcation diagrams on iso-energetic levels. The most complicated calculations are fulfilled with the help of the computer system Mathematica 7.

Keywords: *Kowalevski gyrostat, double field, critical motions.*

І.І. Харламова, Г.Є. Смирнов

Умови існування періодичних рухів гіростата Ковалевської у подвійному полі

Вивчаються особливі періодичні рухи (критичні точки рангу 1 інтегрального відображення), знайдені в роботі М.П. Харламова (Механіка твердого тіла, вип. 37, 2007) в інтегровній задачі про рух гіростата в подвійному полі при умовах Ковалевської на моменти інерції. Досліджено можливі перебудови усередині множини цих розв'язків залежно від суттєвих параметрів – одного інтегрального і двох фізичних. Отримано аналітичні рівняння поділяючої множини та його особливостей, зазначено кількість виникаючих областей з різним набором розв'язків. Знайдено образ поділяючої множини в просторі параметрів, що задають біфуркаційні діаграми на ізоенергетичних рівнях. Обчислення, пов'язані з перетвореннями багаточленів високих степенів, виконано в комп'ютерній системі Mathematica 7.

Ключові слова: *гіростат Ковалевської, подвійне поле, критичні рухи.*

*Волгоградская академия гос. службы, Россия;
МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия*

Получено 13.08.10

mharlamov@vags.ru, irinah@vags.ru, glebevgen@yandex.ru