ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **Д.А. Данилюк**

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В СПЕЦИАЛЬНЫХ ОСЯХ

Уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, записаны в специальных осях с использованием параметров Родрига–Гамильтона. Получена функция Гамильтона в обобщенных координатах и дано ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. Рассмотрены линейные колебания.

Задача о колебаниях твердого тела, имеющего неподвижную точку, в поле силы тяжести играет важную роль в динамике твердого тела. Значительный вклад в ее решение внесли работы [1, 2], в которых рассматривались нелинейные колебания около устойчивого положения равновесия. Исследование этих вопросов продолжено в работах [3, 4] с использованием параметров Родрига–Гамильтона.

Настоящая работа опирается на исследования [3, 4] и использует в дополнение к специальной неподвижной системе координат, введенной в работах [3, 4], специальные подвижные оси [5], успешно примененные в статье [2]. Записаны уравнения движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона в специальных осях. Получена функция Гамильтона в обобщенных координатах и дано ее разложение в окрестности нижнего положения равновесия. При использовании избыточных координат применены подходы, предложенные в работах [6, 7]. Рассмотрены линейные колебания.

1. Уравнения и интегралы движения. Для описания движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в поле силы тяжести в качестве подвижной системы примем специальную систему координат [5]. Обозначим через $x, y, z;\ w_i, \nu_i, e_i,\ i = 1, 2, 3$ – проекции на эти оси векторов кинетического момента, угловой скорости, единичного вектора вертикали, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела; a, a_1, a_2, b_1, b_2 – компоненты гирационного тензора; Γ – произведение веса тела и расстояния до центра масс. В качестве неподвижной системы, следуя [3, 4], выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν'_i вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели следующие значения: $\nu'_i = -e_i,\ i = 1, 2, 3$. По таблице направляющих косинусов [8] с учетом $e_1 = 1,\ e_2 = e_3 = 0$ находим выражения для ν_i через параметры Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2,\\
\nu_2 &= 2(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1),\\
\nu_3 &= -2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Для компонент угловой скорости w_i имеем выражения [5]

$$w_1 = ax + b_1y + b_2z, \quad w_2 = a_1y + b_1x, \quad w_3 = a_2z + b_2x. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения движения получим, подставив формулы (1), (2) в динамические уравнения П.В. Харламова [5]

$$\begin{gathered} \dot{x} = y(a_2z + b_2x) - z(a_1y + b_1x), \\ \dot{y} = z(ax + b_1y + b_2z) - x(a_2z + b_2x) - 2\Gamma(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \\ \dot{z} = -y(ax + b_1y + b_2z) + x(a_1y + b_1x) - 2\Gamma(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2) \end{gathered} \tag{3}$$

и кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона [8]

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_2(a_1y + b_1x) - \lambda_3(a_2z + b_2x), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0(ax + b_1y + b_2z) + \lambda_2(a_2z + b_2x) - \lambda_3(a_1y + b_1x), \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0(a_1y + b_1x) + \lambda_3(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_1(a_2z + b_2x), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0(a_2z + b_2x) + \lambda_1(a_1y + b_1x) - \lambda_2(ax + b_1y + b_2z). \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) допускают три первых интеграла – энергии, постоянства кинетического момента и геометрический:

$$\begin{gathered} ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x + 2\Gamma(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) = h, \\ x(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2) + 2y(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_2\lambda_1) - 2z(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1) = k, \\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

2. Функция Гамильтона в обобщенных координатах. Получим функцию Гамильтона в обобщенных координатах. В качестве обобщенных координат примем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а параметр λ_0 определим из равенства

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Запишем выражение для функции Гамильтона $H = T + \Pi$, где

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2}(A_{11}w_1^2 + A_{22}w_2^2 + A_{33}w_3^2) + A_{12}w_1w_2 + A_{23}w_2w_3 + A_{13}w_1w_3, \\ \Pi = \Gamma(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_0^2). \end{gathered}$$

Здесь A_{ij} – компоненты тензора инерции в неподвижной точке относительно фиксированных в теле осей. Величины w_i выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} w_1 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ w_2 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ w_3 &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2). \end{aligned}$$

Введем обобщенные импульсы по формулам

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^{3}(A_{j1}w_1 + A_{j2}w_2 + A_{j3}w_3)\left(\frac{\partial w_j}{\partial \dot\lambda_i} - 2\lambda_j \frac{\dot\lambda_0}{\dot\lambda_i}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

и заменим выражения в скобках соответствующими компонентами кинетического момента $x_i = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij} w_j,\ i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{2}{\lambda_0}[x_1(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) + x_2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + x_3(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)],\\
p_2 &= \frac{2}{\lambda_0}[x_1(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + x_2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) + x_3(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)],\\
p_3 &= \frac{2}{\lambda_0}[x_1(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + x_2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) + x_3(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)].
\end{aligned} \tag{6}$$

Разрешая эти соотношения относительно x_1, x_2, x_3

$$x_1 = \frac{1}{2}(\lambda_0 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_2 p_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-\lambda_3 p_1 + \lambda_0 p_2 + \lambda_1 p_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(\lambda_2 p_1 - \lambda_1 p_2 + \lambda_0 p_3),$$

и подставляя найденные значения в выражение кинетической энергии в специальной системе координат

$$T = \frac{1}{2}(a x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2) + (b_1 x_2 + b_2 x_3)x_1,$$

получаем выражение для функции Гамильтона

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{8}\{&[a(1-\lambda_1^2) + (a_1 - a)\lambda_2^2 + (a_2 - a)\lambda_3^2 - 2\lambda_0(b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3)]p_1^2 + [a_1(1-\lambda_2^2) +\\
&+ (a_2 - a_1)\lambda_1^2 + (a - a_1)\lambda_3^2 + 2\lambda_3(b_1\lambda_0 - b_2\lambda_1)]p_2^2 + [a_2(1-\lambda_3^2) + (a_1 - a_2)\lambda_1^2 + (a - a_2)\lambda_2^2 -\\
&- 2\lambda_2(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_0)]p_3^2 + 2[b_1(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2) + (a - a_1)\lambda_0\lambda_3 - b_2(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) -\\
&- a_2\lambda_1\lambda_2]p_1p_2 + 2[b_2(1 - \lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + b_1\lambda_0\lambda_1 + (a_2 - a)\lambda_0\lambda_2 - a_1\lambda_1\lambda_3 + b_1\lambda_2\lambda_3]p_1p_3 +\\
&+ 2[(a_1 - a_2)\lambda_0\lambda_1 - b_1(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3) + b_2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) + a\lambda_2\lambda_3]p_2p_3\} + 2\Gamma(\lambda_2^2 + \lambda_3^2).
\end{aligned} \tag{7}$$

3. Разложение функции Гамильтона. Как показано в работе [3], нижнему положению равновесия соответствуют нулевые значения λ_i, w_i и, как следует из формул (6), нулевые значения импульсов p_i и x_i, $i = 1, 2, 3$. Поэтому функция (7) описывает возмущенное движение твердого тела в окрестности нижнего положения равновесия. Для получения разложения функции Гамильтона воспользуемся формулами

$$\lambda_0^2 = 1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2,$$

$$\lambda_0 = (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) - \frac{1}{8}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)^2 - \dots.$$

Разлагая функцию (7) с точностью до членов четвертого порядка, получаем

$$H = H_2 + H_3 + H_4,$$

$$H_2 = \frac{1}{8}(ap_1^2 + a_1p_2^2 + a_2p_3^2) + \frac{1}{4}(b_1p_1p_2 + b_2p_1p_3) + 2\Gamma(\lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$

$$H_3 = \frac{1}{4}[\lambda_1p_2p_3(a_1 - a_2) + \lambda_2p_1p_3(a_2 - a) + \lambda_3p_1p_2(a - a_1) + \lambda_1p_1(b_1p_3 - b_2p_2) + \\ + \lambda_2(b_2p_1^2 - b_2p_3^2 - b_1p_2p_3) + \lambda_3(-b_1p_1^2 + b_1p_2^2 + b_2p_2p_3)],$$

$$H_4 = -\frac{1}{8}[\lambda_1^2(ap_1^2 + (a_1 - a_2)(p_2^2 - p_3^2) + p_1(b_1p_2 + b_2p_3)) + \\ + \lambda_2^2(a_1p_2^2 + (a - a_2)(p_1^2 - p_3^2) + p_1(3b_2p_3 + b_1p_2)) - \\ - \lambda_3^2(a_2p_3^2 + (a - a_1)(p_1^2 - p_2^2) + p_1(3b_1p_2 + b_2p_3)) + \\ + 2\lambda_2\lambda_3(ap_2p_3 - p_1(b_2p_2 + b_1p_3)) + \\ + 2\lambda_1(p_1(a_2\lambda_2p_2 - a_1\lambda_3p_3) + (\lambda_2p_3 - \lambda_3p_2)(b_1p_3 - b_2p_2))].$$

4. Линейные колебания. Изучим линейные колебания твердого тела в специальной системе координат около нижнего положения равновесия. Обратимся к системе уравнений (3), (4). Нижнему положению равновесия соответствует решение

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0. \tag{8}$$

Используем выражения второго и третьего интегралов (5) для того, чтобы исключить из уравнений переменные x и λ_0 соответственно. Поскольку $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_0^2 - \lambda_1^2 \neq 0$ в окрестности решения (8), имеем

$$\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}, \quad x = kh_0 + h_1y + h_2z,$$

где

$$h_0 = -\frac{1}{1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}, \quad h_1 = \frac{2(\lambda_3\sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2} - \lambda_1\lambda_2)}{1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)},$$

$$h_2 = \frac{-2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\ \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2})}{1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнения (3), (4), получим систему уравнений для оставшихся переменных:

$$\begin{gathered}
\dot{y} = -b_2k^2h_0^2 - 2b_2kh_0h_1y + kh_0(a - a_2 - 2b_2h_2)z - b_2h_1^2y^2 + \\
+[(a - a_2)h_2 + b_2(1 - h_2^2)]z^2 + [(a - a_2)h_1 + b_1 - 2b_2h_1h_2]yz - 2\Gamma(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \\
\dot{z} = b_1k^2h_0^2 + kh_0(a_1 - a + 2b_1h_1)y + 2b_1kh_0h_2z + [(a_1 - a)h_1 - \\
-b_1(1 - h_1^2)]y^2 + b_1h_2^2z^2 + [(a_1 - a)h_2 - b_2 + 2b_1h_1h_2]yz - 2\Gamma(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2), \\
2\dot{\lambda}_1 = kh_0(a\lambda_0 - b_1\lambda_3 + b_2\lambda_2) + [\lambda_0(b_1 + ah_1) + b_2\lambda_2h_1 - \lambda_3(a_1 + b_1h_1)]y + \\
+[\lambda_0(b_2 + ah_2) + \lambda_2(a_2 + b_2h_2) - b_1\lambda_3h_2]z, \\
2\dot{\lambda}_2 = kh_0(b_1\lambda_0 - b_2\lambda_1 + a\lambda_3) + [\lambda_0(a_1 + b_1h_1) - b_2\lambda_1h_1 + \lambda_3(b_1 + ah_1)]y + \\
+[b_1\lambda_0h_2 - \lambda_1(a_2 + b_2h_2) + \lambda_3(b_2 + ah_2)]z, \\
2\dot{\lambda}_3 = kh_0(b_2\lambda_0 + \lambda_1(a_1 + b_1h_1) - a\lambda_2) + [b_2\lambda_0h_1 + \lambda_1(b_1 + ah_1) - \lambda_2(b_1 + ah_1)]y + \\
+[\lambda_0(a_2 + b_2h_2) + b_1\lambda_1h_2 - \lambda_2(b_2 + ah_2)]z.
\end{gathered} \tag{9}$$

Оставляя за вариациями переменных $y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ те же обозначения, находим уравнения в вариациях для системы (9):

$$\begin{gathered}
\dot{y} = -2\Gamma\lambda_2, \qquad \dot{z} = -2\Gamma\lambda_3, \\
\dot{\lambda}_1 = -\frac{ak}{2} + \frac{b_1}{2}y + \frac{b_2}{2}z, \qquad \dot{\lambda}_2 = \frac{a_1}{2}y, \qquad \dot{\lambda}_3 = \frac{a_2}{2}z.
\end{gathered} \tag{10}$$

Общее решение системы (10) имеет вид

$$\begin{gathered}
y = C_1\cos\sqrt{a_1\Gamma}t + C_2\sin\sqrt{a_1\Gamma}t, \\
z = C_3\cos\sqrt{a_2\Gamma}t + C_4\sin\sqrt{a_2\Gamma}t, \\
\lambda_1 = \frac{b_1}{2\sqrt{a_1\Gamma}}(C_1\sin\sqrt{a_1\Gamma}t - C_2\cos\sqrt{a_1\Gamma}t) + \\
+\frac{b_2}{2\sqrt{a_2\Gamma}}(C_3\sin\sqrt{a_2\Gamma}t - C_4\cos\sqrt{a_2\Gamma}t) - \frac{ak}{2}t + C_5, \\
\lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{\Gamma}}(C_1\sin\sqrt{a_1\Gamma}t - C_2\cos\sqrt{a_1\Gamma}t), \\
\lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_2}{\Gamma}}(C_3\sin\sqrt{a_2\Gamma}t - C_4\cos\sqrt{a_2\Gamma}t), \\
C_i = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1,5},
\end{gathered}$$

и описывает малые колебания тела около положения равновесия.

1. *Старжинский В.М.* Колебания тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в общем случае // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – Вып. 4. – С. 121–128.
2. *Илюхин А.А., Ковалев А.М.* Нормальные колебания твердого тела около положения устойчивого равновесия // Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 65–71.
3. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.
4. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Там же. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.
5. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
6. *Козлов В.В.* Уравнение Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теорет. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.
7. *Ковалев А.М.* Получение уравнений Гамильтона движения механических систем со связями на основе принципа максимума Понтрягина // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 67–73.
8. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
daniljuk@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 20.10.09