УДК 531.36

©2009. **С.В. Чайкин**

ОБ ОДНООСНЫХ РАВНОВЕСНЫХ ОРИЕНТАЦИЯХ ГИРОСТАТА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Исследуются условия, обеспечивающие гиростату на кеплеровой круговой орбите (за счет подходящего выбора гиростатического момента) относительные равновесия, при которых произвольный орт $\boldsymbol{a}$, заданный в связанной с его корпусом системе координат, совпадает с произвольным ортом $\boldsymbol{b}$, определенным в орбитальной системе координат.

1. Постановка задачи. Рассматривается в ограниченной постановке [1] движение гиростата по кеплеровой круговой орбите вокруг притягивающего центра. Гиростат есть твердое тело с расположенным в нем уравновешенным вращающимся маховиком.

Изучим следующий вопрос. Может ли гиростат при подходящем выборе гиростатического момента системы иметь относительное равновесие, при котором произвольный орт $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$, заданный в связанной с корпусом системе координат направляющими косинусами $a_i \neq 0$, совпадает с произвольным ортом $\boldsymbol{b}(a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$, определенным в орбитальной системе координат его не равными нулю компонентами $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$. Такие относительные равновесия называются одноосными равновесными ориентациями.

Относительное равновесие системы — состояние покоя корпуса гиростата в орбитальной системе координат. Правая система ортов $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ орбитальной системы координат выбрана так, что вектор орбитальной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\beta}$, $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$; орт $\boldsymbol{\alpha}$ направлен по касательной к орбите в центре масс системы в сторону движения последнего.

Ранее были изучены условия, обеспечивающие одноосные равновесные ориентации гиростата, при расположении орта $\boldsymbol{b}$ в плоскости, содержащей орты $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ или $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$ [2]; или когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ произвольны, но эллипсоид инерции гиростата имеет ось симметрии [3].

Уравнения, определяющие одноосные равновесные ориентации гиростата на круговой орбите, запишем следующим образом [3]:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha J\beta} = -\boldsymbol{k\alpha}, \qquad \boldsymbol{\gamma J\beta} = -\boldsymbol{k\gamma}/4, \\ \boldsymbol{\alpha J\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad \boldsymbol{a\alpha} = a_\alpha, \quad \boldsymbol{a\gamma} = a_\gamma.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ — центральный тензор инерции гиростата, $\boldsymbol{k}$ — вектор гиростатического момента, деленный на ω. Первые шесть уравнений — известные уравнения (см., например, [4]), определяющие относительные равновесия гиростата на круговой орбите. Последние два уравнения выделяют из всего множества относительных равновесий интересующие нас одноосные равновесные ориентации гиростата.

При изучении относительных равновесий гиростата на кеплеровой круговой орбите известны так называемые прямая и обратная постановки задачи. В прямой постановке разыскиваются относительные равновесия при заданных $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{k}$. В обратной постановке определяется гиростатический момент системы, обеспечивающий наличие у нее нужного относительного равновесия.

В рамках обратной постановки задачи будем считать, что если при некоторых условиях на параметры $J_i,\ a_i, a_\alpha,\ a_\gamma$ имеются решения $\alpha_i,\ \gamma_i$ последних шести уравнений (1), то за счет выбора гиростатического момента системы в соответствии с уравнениями

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}; \qquad \boldsymbol{\alpha J \beta} = -\boldsymbol{k\alpha}, \qquad \boldsymbol{\gamma J \beta} = -\boldsymbol{k\gamma}/4 \tag{2}$$

у системы будут иметься интересующие нас одноосные равновесные ориентации.

2. Условия, обеспечивающие одноосные равновесные ориентации гиростата. Анализ уравнений (1), определяющих одноосные равновесные ориентации, будем выполнять в правой прямоугольной системе координат, оси которой направлены по главным центральным осям тензора инерции гиростата. Полагаем, что нумерация осей выбрана так, что компоненты тензора инерции удовлетворяют неравенствам $J_1 < J_2 < J_3$, а также верны неравенства $a_1 > 0,\ a_2 > 0$.

Разрешим шесть последних уравнений системы (1) относительно вещественных $\alpha_i,\ \gamma_i$. Под уравнением (неравенством) будем также понимать множество вещественных $\alpha_i,\ \gamma_i$, обращающих его в тождество (удовлетворяющих ему); фигурная скобка означает пересечение соответствующих множеств, прямоугольная скобка — их объединение

$\{\boldsymbol{\alpha J \gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}^2 = 1, \ \ \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \ \ \boldsymbol{\alpha\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{a\alpha} = a_\alpha, \ \ \boldsymbol{a\gamma} = a_\gamma\}$.

Используя для удобства также переменные $\alpha_{03} \equiv 1/\alpha_3,\ \alpha_{13} \equiv \alpha_1/\alpha_3,\ \alpha_{23} \equiv \alpha_2/\alpha_3,\ \gamma_{01} \equiv 1/\gamma_1,\ \gamma_{21} \equiv \gamma_2/\gamma_1,\ \gamma_{31} \equiv \gamma_3/\gamma_1$, с помощью которых $\alpha_i,\ \gamma_i$ определяются очевидным образом, и обозначения $J_{32} = (J_3 - J_2)/(J_3 - J_1),\ \ J_{21} = (J_2 - J_1)/(J_3 - J_1),\ \ a_{ij} = a_i/a_j$, где, вообще говоря, $i, j \in \{1, 2, 3, \alpha, \gamma\}$, получим эквивалентную систему уравнений

$$\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \pm 1;\ \pm a_2 = a_\alpha, \\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = a_{\gamma 3} - a_{13}\gamma_1,\ \left(1 + a_{13}^2\right)\gamma_1^2 - 2a_{\gamma 3}a_{13}\gamma_1 + a_{\gamma 3}^2 - 1 = 0, \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 = \pm 1;\ \pm a_1 = a_\alpha, \\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_3 = a_{\gamma 3} - a_{23}\gamma_2,\ \left(1 + a_{23}^2\right)\gamma_2^2 - 2a_{\gamma 3}a_{23}\gamma_2 + a_{\gamma 3}^2 - 1 = 0, \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = 0,\ \alpha_2 = a_{\alpha 2} - a_{12}\alpha_1,\ \left(1 + a_{12}^2\right)\alpha_1^2 - 2a_{\alpha 2}a_{12}\alpha_1 + a_{\alpha 2}^2 - 1 = 0, \\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = \pm 1;\ \pm a_3 = a_\gamma, \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{l} \gamma_1 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_2 = \pm 1;\ \pm a_2 = a_\gamma,\ \alpha_3 \neq 0,\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_{03} = a_{1\alpha}\alpha_{13} + a_{3\alpha},\ \left(1 - a_{1\alpha}^2\right)\alpha_{13}^2 - 2a_{1\alpha}a_{3\alpha}\alpha_{13} + 1 - a_{3\alpha}^2 = 0, \end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{3}$$

$$\left[\ \left\{\begin{array}{l} \alpha_3 \neq 0,\ \alpha_{03} = a_{3\alpha} + a_{2\alpha}\alpha_{23} - a_{1\alpha}J_{32}\alpha_{23}\gamma_{21},\ \alpha_{13} = -J_{32}\alpha_{23}\gamma_{21}, \\ \gamma_1 \neq 0,\ \gamma_{01} = a_{1\gamma} + a_{2\gamma}\gamma_{21} - a_{3\gamma}J_{21}\alpha_{23}\gamma_{21},\ \gamma_{31} = -J_{21}\alpha_{23}\gamma_{21}, \\ f_1\left(\gamma_{21};\alpha_{23}\right) \equiv \gamma_{21}^2 + \left(J_{21}\alpha_{23}\gamma_{21}\right)^2 + 1 - \left(a_{1\gamma} + a_{2\gamma}\gamma_{21} - a_{3\gamma}J_{21}\alpha_{23}\gamma_{21}\right)^2 = 0, \\ f_2\left(\gamma_{21};\alpha_{23}\right) \equiv \left(J_{32}\alpha_{23}\gamma_{21}\right)^2 + \alpha_{23}^2 + 1 - \left(a_{3\alpha} + a_{2\alpha}a_{23} - a_{1\alpha}J_{32}\alpha_{23}\gamma_{21}\right)^2 = 0. \end{array}\right.\right.$$

Непосредственно из вида полученных уравнений системы (3) заключаем, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *При выполнении одного из условий* $\pm a_i = a_\alpha$ $(\pm a_i = a_\gamma)$ *всегда имеется определяемая векторами наведения* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *одноосная равновесная ориентация гиростата, при которой вдоль касательной (вдоль местной вертикали) к орбите в центре масс гиростата в ту или другую сторону направлена его* i*-ая главная центральная ось.*

Действительно, например, из квадратного уравнения первой группы уравнений, объединенных фигурной скобкой, следует, что его дискриминант всегда неотрицательный

$$\mathrm{d}_1 = a_\gamma^2 a_1^2 - (a_3^2 + a_1^2)(a_\gamma^2 - a_3^2) = a_3^2(a_1^2 + a_3^2 - a_\gamma^2) = a_3^2(1 - a_2^2 - a_\gamma^2) \geq 0$$

при $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,\ a_\alpha^2 + a_\beta^2 + a_\gamma^2 = 1$ и $a_2^2 = a_\alpha^2$. Неотрицательны и соответствующие дискриминанты квадратных уравнений 2-й, 3-й и 4-й групп уравнений. Справедливость утверждения для случая $\pm a_3 = a_\alpha$ $(\pm a_1 = a_\gamma)$ следует из эквивалентных уравнений, полученных при использовании переменных $1/\alpha_1,\ \alpha_2/\alpha_1,\ \alpha_3/\alpha_1,\ 1/\gamma_3,\ \gamma_1/\gamma_3,\ \gamma_2/\gamma_3$.

Утверждение 2. *При выполнении одного из условий* $\pm a_i = a_\alpha,\ (\pm)_1 a_j = = a_\gamma)$ $\ (i,j \in \{1,2,3\},\ i \neq j)$ *всегда имеется одна одноосная равновесная ориентация гиростата (определяемая векторами наведения* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*), при которой вдоль касательной к орбите в центре масс гиростата (в ту или другую сторону зависит от знака* $\pm$*) направлена* i*-я, а вдоль местной вертикали (в ту или другую сторону зависит от знака* $(\pm)_1$*)* j*-я главная центральная ось гиростата.*

Решения первых четырех групп уравнений из (3) очевидны, и поэтому далее займемся решением уравнений пятой группы, а точнее двух ее последних уравнений. Причем считаем, что зависимостей между a_i и a_α, a_γ вида, как в (3), нет. Каждое из этих уравнений запишем в виде полинома относительно α_{23} с коэффициентами, зависящими от параметров задачи и γ_{21}

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 \equiv \left(1 - a_{3\gamma}^2\right)\left(J_{21}\gamma_{21}\right)^2 \alpha_{23}^2 + 2a_{3\gamma}J_{21}\gamma_{21}\left(a_{1\gamma} + a_{2\gamma}\gamma_{21}\right)\alpha_{23} + 1 + \\ \qquad + \gamma_{21}^2 - \left(a_{1\gamma} + a_{2\gamma}\gamma_{21}\right)^2 = 0, \\ f_2 \equiv \left(1 + \left(J_{32}\gamma_{21}\right)^2 - \left(a_{2\alpha} - a_{1\alpha}J_{32}\gamma_{21}\right)^2\right)\alpha_{23}^2 - 2a_{3\alpha}\left(a_{2\alpha} - a_{1\alpha}J_{32}\gamma_{21}\right)\alpha_{23} + \\ \qquad + 1 - a_{3\alpha}^2 = 0. \end{array}\right.$$

Решение данной системы полиномиальных уравнений можно осуществить с использованием результанта – специальным образом составленного определителя из коэффициентов полиномов f_1 и f_2 (считаем их полиномами от α_{23}) [5].

"Результант этих многочленов тогда и только тогда равен нулю, если эти многочлены обладают общим корнем или же если их старшие коэффициенты оба равны нулю" [5, с. 339].

Заметим, что равенство нулю старшего коэффициента полинома f_1 возможно лишь при $\gamma_{21} = 0$ (полагаем, что $\pm a_3 \neq a_\gamma \;\Leftrightarrow\; a_{3\gamma}^2 \neq 1,\ J_i \neq J_j$). Однако при этом старший коэффициент f_2 не обращается в нуль, так как $\pm a_2 \neq a_\alpha \Leftrightarrow a_{2\alpha}^2 \neq 1$. В нашем случае результант $R(f_1, f_2)$ полиномов f_1 и f_2 есть полином восьмой степени относительно γ_{21} с коэффициентами, зависящими от $J_i,\ a_i,\ a_\alpha,\ a_\gamma$. Вид его коэффициентов в работе не приводится.

Укажем условия на параметры задачи и γ_{21}, обеспечивающие наличие вещественных корней квадратного относительно α_{23} уравнения $f_1 = 0$. Для этого потребуем, чтобы его дискриминант был неотрицательным (ниже $c \equiv a_3^2 + a_2^2 - a_\gamma^2$)

$$\mathrm{d} = (J_{21}\gamma_{21})^2 \left[c\gamma_{21}^2 + 2a_1a_2\gamma_{21} + a_3^2 + a_1^2 - a_\gamma^2\right]/a_\gamma^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_\gamma^2 \leq a_3^2\ (a_\gamma^2 \neq a_3^2), \\ \left\{\begin{array}{l} a_3^2 < a_\gamma^2 < a_2^2 + a_3^2, \\ \left[\begin{array}{l} \gamma_{21} \leq (\gamma_{21})_1 \equiv \left(-a_1a_2 - \sqrt{(a_\gamma^2 - a_3^2)(1 - a_\gamma^2)}\right)/c, \\ \gamma_{21} \geq (\gamma_{21})_2 \equiv \left(-a_1a_2 + \sqrt{(a_\gamma^2 - a_3^2)(1 - a_\gamma^2)}\right)/c, \end{array}\right. \end{array}\right. \\ a_\gamma^2 = a_2^2 + a_3^2,\ \ \gamma_{21} \geq \left(a_2^2 - a_1^2\right)/2a_1a_2, \\ a_\gamma^2 > a_2^2 + a_3^2,\ \ (\gamma_{21})_1 \leq \gamma_{21} \leq (\gamma_{21})_2\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Заметим, что в каждом конкретном случае из-за вполне определенного соотношения между a_γ^2 и $a_3^2,\ a_2^2 + a_3^2$, неотрицательность d эквивалентна какой-либо одной группе неравенств в (4). Сами же величины, ограничивающие области допустимых значений γ_{21} (за исключением случая $a_\gamma^2 \leq a_3^2$), зависят в (4) лишь от компонентов векторов наведения $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}\ (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)$, но не от массово-геометрических характеристик гиростата.

Количество действительных корней результанта $R(f_1, f_2)$ полиномов f_1 и f_2 — корней упомянутого выше полинома восьмой степени относительно γ_{21}, заключенных между двумя определенными действительными числами, можно определить с использованием теоремы Штурма [5], корни полинома зависят также от массово-геометрических характеристик гиростата.

Приведенные выше рассуждения убеждают в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3. *Для того, чтобы имелась хотя бы одна одноосная равновесная ориентация гиростата, определяемая векторами наведения* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, необходимо и достаточно, чтобы в области, ограничивающей значения*

γ_{21} *из* (4) *и определяемой соответствующими соотношениями между* a_γ^2 *и* a_3^2, $a_2^2 + a_3^2$, *имелся хотя бы один действительный корень уравнения* $R(f_1, f_2) = 0$.

Заключение. В работе предложен метод решения общей задачи об одноосных равновесных ориентациях гиростата на кеплеровой круговой орбите. Метод предполагает использование пакетов программ аналитических вычислений на ЭВМ и численные расчеты.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (No 06-1000013-9019) и РФФИ (09–01–00274).

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Степанов С.Я.* Аналитическое и численное исследование устойчивости стационарных движений. – Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 219 с.
3. *Чайкин С.В.* Об одной задаче одноосной равновесной ориентации гиростата на круговой орбите // Тр. IX Междунар. Четаевской конф. "Аналитическая механика, устойчивость и управление", посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. – Иркутск, 2007. – **5**. – С. 57–59.
4. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космич. исслед. – 1984. – **22**, № 3. – С. 323–326.
5. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
`schaik@yandex.ru`
Получено 25.12.08