ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

УРАВНЕНИЯ ПОДВИЖНЫХ И НЕПОДВИЖНЫХ АКСОИДОВ ДЛЯ КЛАССА ДВИЖЕНИЙ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Для решения задачи, указанного в работе [1], получены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов тел системы при условии, что одно из тел закреплено в центре масс.

В статье [1] дана постановка задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным и идеальным сферическим шарнирами. Там же получено точное решение задачи при нулевом значении постоянной интеграла, выражающего сохранение момента количества движения системы. Это решение при условии, что одно из тел системы закреплено в центре масс, примет вид

$$\Omega_1(u) = -\frac{2A}{A+A_0}\kappa(u), \tag{1}$$

$$\Omega_2(u) = -\frac{(1+bu^2)n(u)}{A_0\sqrt{1-u^2}}, \tag{2}$$

$$\Omega_3(u) = -\frac{un(u)}{1-u^2}\Big(\frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{1+b}{A}\Big), \tag{3}$$

$$n_0(u) = bun(u), \tag{4}$$

$$\omega_1(u) = \frac{2A_0}{A+A_0}\kappa(u), \tag{5}$$

$$\omega_2(u) = \frac{(1+b)un(u)}{A\sqrt{1-u^2}}, \tag{6}$$

$$\omega_3(u) = -\frac{n(u)}{1-u^2}\Big[\frac{1+bu^2}{A_0} + \frac{(1+b)u^2}{A}\Big], \tag{7}$$

$$n(u) = \frac{CJ}{\sqrt{1+bu^2}}, \tag{8}$$

где CJ – постоянная интегрирования, $b = \dfrac{(A-J)J_0}{(A+J_0)J}$ – безразмерный параметр,

$$u = \cos\theta, \tag{9}$$

$$N = \frac{mm_0 ll_0}{m+m_0} = 0. \tag{10}$$

В этом решении потенциальная энергия $\Pi(u)$ упругого элемента является произвольной дифференцируемой функцией угла θ. Переменная $\kappa(u)$ и потенциальная энергия $\Pi(u)$ упругого элемента связаны соотношением [1]

$$\kappa^2(u) = \frac{A + A_0}{4AA_0}\Big\{2h - 2\Pi(u) - \frac{C^2J^2}{AA_0(1-u^2)}\Big[A_0(1+b)u^2 + A(1+bu^2) + \frac{AA_0}{J}(1-u^2)\Big]\Big\}.$$

Углы собственных вращений тел S и S_0 определим из уравнений [1]

$$\dot\varphi = \frac{n(u)}{J} - \omega_3(u), \tag{11}$$

$$\dot\Phi = \Big[\frac{n(u)}{J} - \omega_3(u)\Big]u. \tag{12}$$

При построении аксоидов в [2–4] использовался вектор $\mathbf{g}$, сохраняющий направление в неподвижном пространстве. В исследуемом решении такой вектор отсутствует. Чтобы образовать базис в неподвижном пространстве, выделим класс движений, для которых траектория шарнира представляет плоскую кривую. Для этого необходимо найти векторы бинормали и нормали, которые вместе с вектором $\mathbf{V}_*$ – скоростью шарнира O – образуют ортогональный базис. Для плоских движений шарнира бинормаль перпендикулярна к плоскости траектории шарнира и сохраняет направление в пространстве.

Запишем при этом вектор $\mathbf{r}_*$, указывающий шарнир, его скорость $\mathbf{V}_*$ и ускорение $\mathbf{W}_*$, используя формулы (5.22), (5.24), (5.27) – (5.29) монографии [5], полагая в них $a = 0$ (обращение в нуль параметра a означает, что тело S закреплено в центре масс).

$$\mathbf{r}_* = -a_0\mathbf{e}_3^0, \tag{13}$$

$$\mathbf{V}_* = a_0(-\Omega_2\mathbf{e}_1 + \Omega_1\mathbf{e}_2^0), \tag{14}$$

$$\mathbf{W}_* = a_0\big[-(\dot\Omega_2 + \Omega_3\Omega_1)\mathbf{e}_1 + (\dot\Omega_1 - \Omega_3\Omega_1)\mathbf{e}_2^0 + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\mathbf{e}_3^0\big]. \tag{15}$$

Для сокращения записей наряду с явными зависимостями (1)–(3) будем использовать уравнения движения, найденные в [1], записанные при ограничении (10),

$$\dot\Omega_1 - \Omega_2\Omega_3 = -[\Omega_2 n_0 + \Pi'(\theta)]/A_0, \tag{16}$$

$$\dot\Omega_2 + \Omega_1\Omega_3 = \Omega_1 n_0/A_0, \tag{17}$$

из которых получим

$$\Omega_1\dot\Omega_1 + \Omega_2\dot\Omega_2 = -\frac{\Omega_1}{A_0}\Pi'(\theta). \tag{18}$$

Вместо Ω_2 введем новую переменную

$$\sigma^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \tag{19}$$

и представим уравнение (18) в виде

$$\sigma\dot{\sigma} = -\frac{\Omega_1}{A_0}\Pi'(\theta) \tag{20}$$

(точка обозначает дифференцирование по t, штрих – по θ).

При условии (10) переменные Ω_1, ω_1, как следует из (1), (7), связаны соотношением $A\omega_1 + A_0\Omega_1 = 0$, из которого имеем

$$\omega_1 = -\frac{A_0}{A}\Omega_1, \tag{21}$$

а так как [1] $\dot{\theta} = \Omega_1 - \omega_1$, с учетом (21) получим

$$\dot{\theta} = \big(1 + \frac{A_0}{A}\big)\Omega_1. \tag{22}$$

Теперь уравнение (20) запишем так

$$\Big[\sigma^2 + \frac{2A}{A_0(A + A_0)}\Pi(\theta)\Big]^{\boldsymbol{\cdot}} = 0.$$

Выполнив интегрирование, находим

$$\Pi(\theta) = h_1 - \frac{A + A_0}{2A}A_0\sigma^2. \tag{23}$$

Соотношение (23) является интегралом энергии системы.

Подставим (16), (17), (23) в (15) и получим

$$\mathbf{W}_* = a_0\Big[-\Omega_1\frac{n_0}{A_0}\mathbf{e}_1 + \big(-\Omega_2\frac{n_0}{A_0} + \frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1}\big)\mathbf{e}_2^0 + \sigma^2\mathbf{e}_3^0\Big]. \tag{24}$$

Теперь находим бинормаль

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{V}_* \times \mathbf{W}_*, \tag{25}$$

используя (14), (24),

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\Big[\mathbf{e}_1\Omega_1\sigma^2 + \mathbf{e}_2^0\Omega_2\sigma^2 + \mathbf{e}_3^0\big(\sigma^2\frac{n_0}{A_0} - \sigma\dot{\sigma}\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\big)\Big]. \tag{26}$$

Как указано в [6], кривизна κ^* и кручение κ^0 траектории определяются по формулам

$$\kappa^* = B_*/V_*^3, \qquad \kappa^0 = (\mathbf{z}_* \cdot \mathbf{B}_*)/B_*^2, \tag{27}$$

где $\mathbf{z}_* = \dot{\mathbf{W}}_*$.

Вектор

$$\mathbf{z}_* = \dot{\mathbf{W}}_* = \dot{w}_1\mathbf{e}_1 + \dot{w}_2^0\mathbf{e}_2^0 + \dot{w}_3^0\mathbf{e}_3^0 + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{W}_*, \tag{28}$$

$$w_1 = -a_0\Omega_1 n_0/A_0, \quad w_2^0 = a_0(-\Omega_2 n_0/A_0 + \sigma\dot{\sigma}/\Omega_1), \quad w_3^0 = a_0\sigma^2. \tag{29}$$

С учетом (29), (26), (28) вычислим скалярное произведение

$$\mathbf{z}_*\cdot\mathbf{B}_* = a_0^3\Big[-\sigma^4\frac{\dot{n}_0}{A_0} + 2\sigma\dot{\sigma}\sigma^2\frac{n_0}{A_0} - 3\big(\frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1}\big)^2\Omega_1\Omega_2 + \big(\frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1}\big)^{\cdot}\Omega_2\sigma^2 - \sigma\dot{\sigma}\sigma^2\Omega_3\Big]. \tag{30}$$

Траектория шарнира будет плоской, если кручение (27) обращается в нуль, а это означает, что правая часть в (30) обращается в нуль:

$$-\sigma^4\frac{\dot{n}_0}{A_0} + 2\sigma\dot{\sigma}\sigma^2\frac{n_0}{A_0} - 3\big(\frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1}\big)^2\Omega_1\Omega_2 + \big(\frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1}\big)^{\cdot}\Omega_2\sigma^2 - \sigma\dot{\sigma}\sigma^2\Omega_3 = 0. \tag{31}$$

Введем безразмерный параметр

$$k_* = A/(A + A_0)$$

и представим (22) в виде

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega_1}{k_*}, \tag{32}$$

тогда

$$\frac{\sigma\dot{\sigma}}{\Omega_1} = \frac{\sigma\sigma'}{k_*}, \tag{33}$$

а из уравнения (17) с учетом (32) находим

$$\Omega_3 = \frac{n_0}{A_0} - \frac{\Omega_2'}{k_*}. \tag{34}$$

Подставив (33), (34) в (31), получим уравнение второго порядка для определения пока произвольной функции $\sigma(u)$

$$A_0\Omega_2(\sigma\sigma')' + A_0\Omega_2'(\sigma\sigma') - \sigma\sigma' n_0 k_* - \sigma^2 n_0' k_* + 2n_0 k_*\sigma\sigma' - 3A_0\Omega_2(\sigma')^2 = 0,$$

которое представим в виде

$$(A_0\Omega_2\sigma\sigma' - \sigma^2 n_0 k_*)' = \frac{3\sigma'}{\sigma}(A_0\Omega_2\sigma\sigma' - \sigma^2 n_0 k_*).$$

Порядок уравнения можно понизить

$$A_0\Omega_2\sigma\sigma' - \sigma^2 n_0 k_* = C_2\sigma^3, \tag{35}$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Общее решение уравнения Бернулли (35) будет содержать интеграл $C_2 \int (1+bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}} du$, который согласно теореме Чебышева в элементарных функциях не выражается, поэтому для гиростата считаем

$$C_2 = 0. \tag{36}$$

При этом уравнение (35) принимает вид

$$A_0 \Omega_2 \sigma \sigma' - \sigma^2 n_0 k_* = 0. \tag{37}$$

Подставив в него (2), (4), (8), получим интеграл

$$\sigma^2(u) = K^2 (1+bu^2)^{k_*}, \tag{38}$$

где K^2 – вторая постоянная интегрирования.

Теперь из (38) с учетом (19), (2), (8), находим

$$\Omega_1(u) = R(u) \frac{(1+bu^2)^{k_*/2}}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{39}$$

где

$$R^2(u) = K^2(1-u^2) - \frac{J^2 C^2}{A_0^2} (1+bu^2)^{1-k_*}. \tag{40}$$

Заметим, что при условии (35) кривизна постоянна и равна

$$k^* = \frac{1}{a_0} \sqrt{1 + \frac{C_2^2}{A_0^2}} \ . \tag{41}$$

Поясним механический смысл соотношения (41). Траектория шарнира – это сферическая кривая $r_*^2 = a_0^2$, которая при равном нулю кручении является окружностью, и для нее кривизна постоянна. При ограничении (36), как следует из (41), радиус кривизны равен a_0. Таким образом, при σ^2, определяемой из (38), шарнир совершает круговое движение по окружности радиуса a_0.

Так как траектория шарнира – плоская кривая, то с ее помощью можно ввести неподвижный базис. Положение точки O на окружности радиуса a_0 будем характеризовать углом ψ между радиус-вектором $\mathbf{r}_*$ и положительным направлением первой оси. Ортонормированный неподвижный базис с центром в точке C_* (центр масс системы) обозначим $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, тогда

$$\mathbf{r}_* = x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2, \tag{42}$$

$$\mathbf{r}_* = a_0 (\mathbf{E}_1 \cos\psi + \mathbf{E}_2 \sin\psi). \tag{43}$$

Теперь скорость шарнира $\mathbf{V}_*$ получим, дифференцируя (42) и (43),

$$\mathbf{V}_* = \dot{\mathbf{r}}_* = \dot{x}_1\mathbf{E}_1 + \dot{x}_2\mathbf{E}_2, \tag{44}$$

$$\mathbf{V}_* = a_0\dot{\psi}(-\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi). \tag{45}$$

Для определения $\dot{\psi}$ используем (45), (14) и обозначение (19). Тогда $\dot{\psi}^2 = \mathbf{V}_* \cdot \mathbf{V}_* = \sigma^2$ или

$$\dot{\psi} = \sigma(u). \tag{46}$$

Переходя от дифференцирования по времени к дифференцированию по переменной (9), учитывая (32), (19), (38), (40), находим

$$\psi - \psi_0 = -Kk_* \int\limits_{u_0}^{u} \frac{du}{R(u)}.$$

Стоящий справа интеграл относится к “неберущимся”.

Ускорение шарнира $\mathbf{W}_*$ находим, дифференцируя (44), (45) с учетом (46)

$$\mathbf{W}_* = \ddot{x}_1\mathbf{E}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{W}_* = a_0\big[-(\dot{\sigma}\sin\psi + \sigma^2\cos\psi)\mathbf{E}_1 + (\dot{\sigma}\cos\psi - \sigma^2\sin\psi)\mathbf{E}_2\big]. \tag{47}$$

Подставив (45)–(47) в (25), определяем вектор $\mathbf{B}_*$ в неподвижном базисе

$$\mathbf{B}_* = a_0^2\sigma^3\mathbf{E}_3. \tag{48}$$

Установим связь между полуподвижным базисом $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ и неподвижным $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$, воспользовавшись соотношением (14) и (45), (13) и (43), (26) и (48), а также (37):

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{E}_1\sin\psi + \mathbf{E}_2\cos\psi = -\mathbf{e}_1\sin\beta + \mathbf{e}_2^0\cos\beta,\\
&-\mathbf{E}_1\cos\psi - \mathbf{E}_2\sin\psi = \mathbf{e}_3^0,\\
&\ \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1\cos\beta + \mathbf{e}_2^0\sin\beta.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_1\sin\beta\sin\psi - \mathbf{e}_2^0\cos\beta\sin\psi - \mathbf{e}_3^0\cos\psi,\\
\mathbf{E}_2 &= -\mathbf{e}_1\sin\beta\cos\psi + \mathbf{e}_2^0\cos\beta\cos\psi - \mathbf{e}_3^0\sin\psi,\\
\mathbf{E}_3 &= \mathbf{e}_1\cos\beta + \mathbf{e}_2^0\sin\beta
\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1\sin\beta\sin\psi - \mathbf{E}_2\sin\beta\cos\psi + \mathbf{E}_3\cos\beta, \tag{49}$$

$$\mathbf{e}_2^0 = -\mathbf{E}_1\cos\beta\sin\psi + \mathbf{E}_2\cos\beta\cos\psi + \mathbf{E}_3\sin\beta, \tag{50}$$

$$\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{E}_1\cos\psi - \mathbf{E}_2\sin\psi, \tag{51}$$

где

$$\cos\beta = \Omega_1/\sigma, \qquad \sin\beta = \Omega_2/\sigma.$$

Так как

$$\mathbf{\Omega}_* = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^0, \tag{52}$$

с учетом (49)–(51) запишем представление этого вектора в неподвижном базисе

$$\mathbf{\Omega}_* = p_1\mathbf{E}_1 + p_2\mathbf{E}_2 + p_3\mathbf{E}_3, \tag{53}$$

где

$$p_1 = -\frac{n_0}{J_0}\cos\psi, \qquad p_2 = -\frac{n_0}{J_0}\sin\psi, \qquad p_3 = \sigma.$$

Неподвижный аксоид тела S_0 [5, (10.96)] имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}^0 = \mu\frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\Omega_*^2} + \mathbf{r}_* = \zeta_1^0\mathbf{E}_1 + \zeta_2^0\mathbf{E}_2 + \zeta_3^0\mathbf{E}_3.$$

Подставив сюда (53), (45), (46), (43), получим компоненты

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0(\mu, u) &= -F_0(\mu, u)\frac{n_0(u)}{J_0}\cos\psi,\\
\zeta_2^0(\mu, u) &= -F_0(\mu, u)\frac{n_0(u)}{J_0}\sin\psi,\\
\zeta_3^0(\mu, u) &= F_0(\mu, u)\sigma(u),
\end{aligned} \tag{54}$$

где

$$F_0(\mu, u) = \frac{\mu}{\Omega_*(u)} - \frac{a_0}{\Omega_*^2(u)}\frac{n_0(u)}{J_0}, \qquad \Omega_*^2(u) = \sigma^2(u) + \frac{n_0^2(u)}{J_0^0}. \tag{55}$$

Подвижный аксоид тела S_0 имеет вид [5, (10.90)]

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \mu\frac{\mathbf{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\mathbf{\Omega}_* \times \mathbf{V}_*}{\Omega_*^2}. \tag{56}$$

Вначале запишем его представление в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^0\mathbf{e}_1 + \xi_2^0\mathbf{e}_2^0 + \xi_3^0\mathbf{e}_3^0.$$

Подставив в (56) соотношения (52), (14), получим компоненты

$$\begin{aligned}
\xi_1^0(\mu, u) &= F_0(\mu, u)\Omega_1(u),\\
\xi_2^0(\mu, u) &= F_0(\mu, u)\Omega_2(u),\\
\xi_3^0(\mu, u) &= a_0 + F_0(\mu, u)\frac{n_0(u)}{J_0},
\end{aligned}$$

где $F_0(\mu, u)$ определена в (55).

Зная компоненты аксоидов в полуподвижном базисе, сможем определить его компоненты в неизменно связанном с телом S_0 базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^{0*}$, используя формулы перехода [2]

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*}\cos\Phi - \mathbf{e}_2^{0*}\sin\Phi,\\
&\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_1^{0*}\sin\Phi + \mathbf{e}_2^{0*}\cos\Phi,\\
&\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^{0*}\mathbf{e}_1^{0*} + \xi_2^{0*}\mathbf{e}_2^{0*} + \xi_3^0\mathbf{e}_3^0,\\
&\xi_1^{0*} = \xi_1^0\cos\Phi + \xi_2^0\sin\Phi,\\
&\xi_2^{0*} = -\xi_1^0\sin\Phi + \xi_2^0\cos\Phi,\\
&\xi_3^{0*} = \xi_3^0,
\end{aligned}
\tag{57}
$$

где угол Φ определим квадратурой из (12) с учетом (9), (10), (22), (39):

$$
\Phi - \Phi_0 = -\frac{Ck_*}{AA_0}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{\{A(A_0+J) + [A_0(J+A) + (A+A_0)bJ]u^2\}u\,du}{R(u)(1-u^2)(1+bu^2)^{\frac{k_*+1}{2}}}.
$$

Скорость скольжения подвижного аксоида (57) по неподвижному $v = (\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{V}_*)/\Omega_*$, как следует из (52), (14), обращается в нуль.

Таким образом, при движении тела S подвижный аксоид (57) катится по неподвижному аксоиду (54) без скольжения.

Неподвижный аксоид тела S имеет вид

$$
\boldsymbol{\zeta} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{V}_*}{\omega_*^2} + \mathbf{r}_*
\tag{58}
$$

и в неподвижном пространстве имеет представление

$$
\boldsymbol{\zeta} = \zeta_1\mathbf{E}_1 + \zeta_2\mathbf{E}_2 + \zeta_3\mathbf{E}_3.
$$

Так как векторы $\mathbf{r}_*$ и $\mathbf{V}_*$ соотношениями (43), (45) уже представлены в неподвижном базисе, то необходимо лишь получить выражение для $\boldsymbol{\omega}_*$ в этом же базисе.

Для этого вначале воспользуемся формулами [2]

$$
\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0\cos\theta - \mathbf{e}_3^0\sin\theta, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0\sin\theta + \mathbf{e}_3^0\cos\theta,
$$

и следующими из них

$$
\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta, \qquad \mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta.
\tag{59}
$$

Запишем вектор

$$
\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \frac{n}{J}\mathbf{e}_3
\tag{60}
$$

в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \big(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\mathbf{e}_2^0 + \big(-\omega_2\sin\theta + \frac{n}{J}\cos\theta\big)\mathbf{e}_3^0.$$

С учетом соотношения $\dfrac{n_0}{J_0} = -\omega_2\sin\theta + \dfrac{n}{J}\cos\theta$ из [1] имеем

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \big(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\big)\mathbf{e}_2^0 + \frac{n_0}{J_0}\mathbf{e}_3^0. \tag{61}$$

Подставив соотношения (21), (39), (6), (8), (4), (49)–(51) в (61), представим вектор $\boldsymbol{\omega}_*$ в неподвижном базисе:

$$\boldsymbol{\omega}_* = q_1\mathbf{E}_1 + q_2\mathbf{E}_2 + q_3\mathbf{E}_3, \tag{62}$$

где

$$\begin{gathered}
q_1(u) = -\frac{1}{\sqrt{1+bu^2}}\Big[\frac{(A-J)C}{AK}R(u)\sin\psi + \frac{JCbu}{J_0}\cos\psi\Big],\\
q_2(u) = \frac{1}{\sqrt{1+bu^2}}\Big[\frac{(A-J)C}{AK}R(u)\cos\psi - \frac{JCbu}{J_0}\sin\psi\Big],\\
q_3(u) = -\frac{(1+bu^2)^{-k_*/2}}{K}\Big[\frac{A}{A_0}K^2(1+bu^2)^{k_*} + \frac{(A-J)JC^2}{AA_0}\Big].
\end{gathered} \tag{63}$$

Внесем (62), (43), (45) в (58) и получим компоненты

$$\begin{gathered}
\zeta_1(u) = \mu\frac{q_1(u)}{\omega_*(u)} + a_0\Big[1 - \frac{\sigma(u)q_3(u)}{\omega_*^2(u)}\Big]\cos\psi,\\
\zeta_2(u) = \mu\frac{q_2(u)}{\omega_*(u)} + a_0\Big[1 - \frac{\sigma(u)q_3(u)}{\omega_*^2(u)}\Big]\sin\psi,\\
\zeta_3(u) = \mu\frac{q_3(u)}{\omega_*(u)} + \frac{a_0\sigma(u)}{\omega_*^2(u)}[q_1(u)\cos\psi + q_2(u)\sin\psi].
\end{gathered} \tag{64}$$

С учетом (5), (6), (8), (21), (19) определяем

$$\omega_*^2(u) = \frac{A_0^2}{A^2}\sigma^2(u) + \frac{J^2C^2}{A^2}\Big[b + \Big(\frac{A^2}{J^2} - 1 - b\Big)\frac{1}{bu^2+1}\Big]. \tag{65}$$

Отметим, что $q_1(u)\cos\psi + q_2(u)\sin\psi$, как следует из (63), имеет вид

$$q_1(u)\cos\psi + q_2(u)\sin\psi = -\frac{JCbu}{J_0\sqrt{1+bu^2}} = -\frac{n_0(u)}{J_0}.$$

Теперь запишем (64) в виде

$$\zeta_1(\mu, u) = \mu\frac{q_1(u)}{\omega_*(u)} + a_0\Big[1 - \frac{\sigma(u)q_3(u)}{\omega_*^2(u)}\Big]\cos\psi,$$

$$\zeta_2(\mu,u)=\mu\frac{q_2(u)}{\omega_*(u)}+a_0\Big[1-\frac{\sigma(u)q_3(u)}{\omega_*^2(u)}\Big]\sin\psi,$$

$$\zeta_3(\mu,u)=\mu\frac{q_3(u)}{\omega_*(u)}-a_0\frac{\sigma(u)JCbu}{J_0\omega_*^2(u)\sqrt{1+bu^2}}\ ,$$

где $\sigma(u), q_i(u), \omega_*(u), n_0(u)$ определены в (38), (63), (65), (4), (8).

Подвижный аксоид тела S имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}=\mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*}+\frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\mathbf{V}_*}{\omega_*^2}. \tag{66}$$

Запишем его вначале в полуподвижном базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$

$$\boldsymbol{\xi}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+\xi_3\mathbf{e}_3.$$

Так как вектор $\mathbf{V}_*$ имеет разложение (14), необходимо иметь также его разложение в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, которое выполним, используя формулы (59),

$$\mathbf{V}_*=a_0[-\Omega_2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\Omega_1\cos\theta+\mathbf{e}_3\Omega_1\sin\theta]. \tag{67}$$

Внесем (60), (67) в (66), получим компоненты

$$\xi_1=\mu\frac{\omega_1}{\omega_*}+\frac{a_0}{\omega_*^2}\frac{n_0}{J_0}\Omega_1,$$

$$\xi_2=\mu\frac{\omega_2}{\omega_*}-\frac{a_0}{\omega_*^2}\big(\Omega_1\omega_1\sin\theta+\Omega_2\frac{n}{J}\big),$$

$$\xi_3=\mu\frac{n}{J\omega_*}+\frac{a_0}{\omega_*^2}(\Omega_1\omega_1\cos\theta+\Omega_2\omega_2).$$

Подставив сюда (2), (4), (6), (8), (21), (39), находим

$$\xi_1(\mu,u)=\left[\frac{a_0JCb}{J_0\omega_*^2(u)\sqrt{1+bu^2}}-\frac{A_0\mu}{A\omega_*(u)}\right]\frac{R(u)(1+bu^2)^{k_*/2}}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$\xi_2(\mu,u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left\{\frac{\mu JC(1+b)u}{A\omega_*(u)\sqrt{1+bu^2}}+\right. \tag{68}$$

$$\left.+\frac{a_0}{\omega_*^2(u)}\frac{A_0}{A}\left[K^2(1+bu^2)^{k_*}(1-u^2)+\frac{J^2C^2}{A_0^2}\big(\frac{A}{J}-1-bu^2\big)\right]\right\},$$

$$\xi_3(\mu,u)=\frac{C\mu}{\omega_*(u)\sqrt{1+bu^2}}-\frac{a_0A_0u}{A\omega_*^2(u)}\left[K^2(1+bu^2)^{k_*}+\frac{J^2C^2b}{A_0^2}\right].$$

Запишем разложение вектора $\boldsymbol{\xi}$ в неизменно связанном с телом базисе $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$

$$\boldsymbol{\xi}=\xi_1^*\mathbf{e}_1^*+\xi_2^*\mathbf{e}_2^*+\xi_3\mathbf{e}_3.$$

Так как
$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi,$$
то
$$\xi_1^* = \xi_1 \cos\varphi + \xi_2 \sin\varphi, \qquad \xi_2^* = -\xi_1 \sin\varphi + \xi_2 \cos\varphi, \tag{69}$$
а угол φ определим квадратурой из (11) с учетом (7), (8), (22), (39)
$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{Ck_*}{AA_0}\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\{A(A_0+J) + [A_0(J-A) + (A+A_0)Jb]u^2\}du}{(1-u^2)(1+bu^2)^{\frac{k_*+1}{2}}R(u)}.$$

Вычисляем $\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_*$, воспользовавшись (60), (67):
$$\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_* = a_0\bigl[-\omega_1\Omega_2 + \Omega_1\bigl(\omega_2\cos\theta + \frac{n}{J}\sin\theta\bigr)\bigr].$$

С учетом (39), (21), (2), (6), (8) имеем
$$\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_* = a_0\bigl(1 - \frac{J}{A}\bigr)CR(u)(1+bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}}$$
и, следовательно, скорость скольжения
$$\frac{\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{V}_*}{\omega_*} = \frac{a_0}{\omega_*(u)}\frac{A-J}{A}CR(u)(1+bu^2)^{\frac{k_*-1}{2}} \tag{70}$$
отлична от нуля.

Следовательно, движение подвижного аксоида (69), (68) по неподвижному аксоиду (64) сопровождается скольжением вдоль общей образующей аксоидов со скоростью (70).

1. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15–21.
2. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнение аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных упругим и неголономным шарниром // Сб. научн.-метод. работ. – Вып. 4. – Донецк: ДонНТУ, 2006. – С. 63–80.
3. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Аксоиды для нового точного решения в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром. / Там же. – Вып. 5. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – С. 96–125.
4. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Уравнение аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром при нулевом значении момента количества движения системы. / Там же. – Вып. 5. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – С. 70–96.
5. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.

Национальный техн. ун-т, Донецк, Украина Получено 19.12.07