ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2009. Вып. 39

УДК 531.38

©2009. **О.С. Волкова, И.Н. Гашененко**

МАЯТНИКОВЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Получены необходимые и достаточные условия существования маятниковых вращений тела-носителя в задаче о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. Предполагается, что направление переменного во времени вектора гиростатического момента постоянно в подвижном базисе. Исследовано множество перманентных осей, занимающих при движении неизменное положение и в теле и в пространстве. Показано, что вращения тела могут происходить вокруг вертикальной, горизонтальных и наклонных осей. Найдены точные решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

1. Постановка задачи. Механическую систему, состоящую из тела-носителя и закрепленных на нем роторов, имеющих возможность совершать вращения вокруг осей, жестко связанных с телом, будем называть гиростатом. При этом предполагается, что роторы симметричны относительно осей вращения, так что распределение масс всей системы не изменяется со временем. Более общие определения гиростата приведены в работах [1, 2]. Обозначим через $\boldsymbol{\lambda}$ гиростатический момент, характеризующий циклические движения роторов. На основании теоремы об изменении момента количества движения, суммарный кинетический момент $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\lambda}$ гиростата удовлетворяет уравнению

$$\dot{\boldsymbol{K}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{M}, \tag{1}$$

обобщающему известные уравнения Эйлера движения твердого тела. Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата в подвижном базисе, $\boldsymbol{M}$ – результирующий момент внешних сил относительно неподвижной точки. Следуя В. Вольтерра [3], мы можем заметить, что если определено вращательное движение теланосителя и известен результирующий момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил, действующих на систему, то дифференциальные уравнения (1) позволяют определить компоненты гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$.

Для гиростата, вращающегося вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести, уравнение (1) приводит к системе

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции гиростата в главных осях, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\mathbf{e}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс системы, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$ – гиростатический момент. Уравнения (2) допускают первые интегралы

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = g, \qquad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{3}$$

Движения, при которых вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сохраняет постоянное направление, являются наиболее простыми и важными для приложений. Для твердого тела с неподвижной точкой допустимые перманентные оси вращений исследованы О. Штауде [4] и Б.К. Млодзеевским [5]. В задаче о движении гиростата по инерции анализ равномерных вращений провел В. Вольтерра [3]. П.В. Харламов [6] нашел множество осей равномерных вращений тяжелого гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Э.И. Дружинин [7] изучил перманентные вращения гиростата с закрепленным центром тяжести и показал, что при $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ перманентные вращения гиростата с переменным $\boldsymbol{\lambda}(t)$ возможны только вокруг главных осей инерции.

Рассмотрим тяжелый гиростат с гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda}$, направленным вдоль постоянного в теле вектора: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$. Достаточно полное описание равномерных вращений такого гиростата приведено в [8]. Теперь исследуем маятниковые вращения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. Положим $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\boldsymbol{\beta}$, где $\boldsymbol{\beta}$ – орт оси вращения, $\omega(t) \neq \mathrm{const}$. При заданных условиях система дифференциальных уравнений

$$\dot\omega\, \boldsymbol{J\beta} = \omega^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta}) + \lambda\omega\,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu} - \dot\lambda\boldsymbol{\alpha}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \omega\,(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}) \tag{4}$$

позволяет определить зависимость ω, λ и $\boldsymbol{\nu}$ от времени. Функции времени $\omega(t)$, $\lambda(t)$ далее будем полагать непрерывно дифференцируемыми, ограниченными для всех $t \in \mathbb{R}$ вместе со своей производной.

Цель работы – определение необходимых и достаточных условий существования маятниковых вращений гиростата вокруг неподвижной точки; получение в явном виде точных решений уравнений (4), описывающих эти вращения; нахождение множества перманентных осей, занимающих при движении неизменное положение и в теле и в пространстве.

2. Необходимые условия существования маятниковых вращений. Преобразуем систему уравнений (4). Для этого умножим обе части первого уравнения (4) скалярно на $\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J\beta}$ и $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{J\beta}$:

$$2A\dot\omega = B\omega^2 + 2(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\xi}), \tag{5}$$

$$A\lambda\omega = \omega^2\,(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J\beta}) + (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\eta}), \tag{6}$$

$$A\dot\lambda = \omega^2\,(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\chi}), \tag{7}$$

где обозначены величины

$$A = (\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}), \quad B = 2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}\times(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}))\times\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{J\beta})\times\mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\chi} = ((\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{J\beta})\times\mathbf{e}.$$

На интервале знакопостоянства функции $\omega(t)$ произведем замену времени $t\to\tau$: $\dot\tau = \omega$. Тогда зависимость $\boldsymbol{\nu}(\tau)$ найдем интегрированием уравнения

$$\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}, \tag{8}$$

где штрих обозначает дифференцирование по τ.

Из (5) получим линейное дифференциальное уравнение относительно $\omega^2(\tau)$

$$A(\omega^2)' = B\omega^2 + 2(\boldsymbol{\nu}(\tau), \boldsymbol{\xi}). \tag{9}$$

Исключением λ из уравнений (6), (7) найдем конечное уравнение, связывающее переменные ω, τ. Например, подставим в тождество

$$\dot{\lambda}\omega^2 = (\lambda\omega)'\omega^2 - \frac{1}{2}\,\lambda\omega(\omega^2)'$$

выражения $\dot{\lambda}, (\lambda\omega), (\omega^2)'$, определяемые уравнениями (6), (7), (9). В результате получим

$$C\omega^4 + (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\sigma})\omega^2 + (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{10}$$

где

$$C = (\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})\left[A^2 + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 |\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\alpha}|^2\right],$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2B^{-1}C\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}B\boldsymbol{\eta} - A(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\eta}) + A^2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}.$$

Необходимые условия существования маятниковых решений системы (4) найдем из условий совместности уравнений (8) – (10).

Рассмотрим невырожденный случай $AB \neq 0$. Тогда $\omega_0^2 \exp \dfrac{B}{A}(\tau - \tau_0)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а общее решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$\omega^2(\tau) = \omega_0^2 \exp \frac{B}{A}(\tau - \tau_0) - \frac{2A}{A^2 + B^2}\,(\boldsymbol{\nu}(\tau), \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi} + A^{-1}B\boldsymbol{\xi} + AB^{-1}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\beta}). \tag{11}$$

Если $\omega_0 \neq 0$, то подстановка выражения (11) в (10) приводит к тождеству только при условии $C = 0$, что противоречит предположению $AB \neq 0$. Следовательно, $\omega_0 = 0$. Рассмотрим случай, когда (9) допускает частное решение

$$\omega_*^2(\tau) = -\frac{2A}{A^2 + B^2}\,(\boldsymbol{\nu}(\tau), \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi} + A^{-1}B\boldsymbol{\xi} + AB^{-1}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\beta}). \tag{12}$$

Без ограничения общности положим $\Delta^2 := \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$. Решение уравнения (8) запишем в виде $\boldsymbol{\nu} = \mathcal{U}\boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma} = (\sin\mu \sin\tau,\ \sin\mu\cos\tau,\ \cos\mu)^T$, $\cos\mu = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \mathrm{const}$. Ортогональная матрица $\mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \beta_1 \\ \dfrac{-\beta_1\beta_2}{\Delta} & \dfrac{\beta_3}{\Delta} & \beta_2 \\ \dfrac{-\beta_1\beta_3}{\Delta} & \dfrac{-\beta_2}{\Delta} & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{\beta}}{|(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{\beta}|} \\ \dfrac{\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{i}|} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T, \quad \boldsymbol{i} = (1, 0, 0)^T. \tag{13}$$

Тогда $|\boldsymbol{\nu}|^2 = 1$ и для произвольного вектора $\mathbf{u}$ получим $(\boldsymbol{\nu},\, \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\gamma}, \mathcal{U}^T\mathbf{u})$.

Подстановка зависимостей $\omega^2(\tau), \boldsymbol{\nu}(\tau)$ должна обращать в тождество уравнение (10). В результате такой подстановки левая часть (10) будет периодической функцией $f(\tau) = a_2 \sin 2\tau + b_2 \cos 2\tau + a_1 \sin \tau + b_1 \cos \tau + a_0$. Приравнивая нулю коэффициенты a_2, b_2, a_0 при $\sin 2\tau, \cos 2\tau$, 1, найдем условия

$$(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}) = 0, \qquad A(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) + B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = 0. \tag{14}$$

Непосредственной подстановкой в (14) соответствующих выражений величин $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, A, B$ через векторы $\boldsymbol{J\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}$ получим, что в случае $AB \neq 0$ условия (14) не выполняются.

Рассмотрим случай $A = 0, B \neq 0$. Так как уравнения (5) – (7) в этом случае являются зависимыми, умножим обе части первого уравнения (4) скалярно на $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$:

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \left[(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\omega} + \dot{\lambda} \right] = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\zeta}), \tag{15}$$

$$\omega |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|^2 \left[(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \omega + \lambda \right] = \dot{\omega} (\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{\nu}, (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{e}), \tag{16}$$

$$B\omega^2 + 2(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{17}$$

После исключения ω, λ из системы (15) – (17) получим уравнение

$$\begin{gathered} u_1 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi})^2 + u_2 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi})^2 + u_3 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi}) + \\ + u_4 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) + u_5 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\quad u_1 = 8(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}) u_0 - 2, \quad u_2 = 1 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}) u_0, \quad u_3 = 6(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}) u_0,$

$$u_4 = 2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})[(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}) u_0 - 1], \quad u_5 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}) u_1,$$

$$u_0 = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}) / [(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e})^2 + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e})^2].$$

Подстановка $\boldsymbol{\nu}(\tau)$ должна обращать в тождество уравнение (18). В результате несложных вычислений можно показать, что в случае $A = 0, B \neq 0$ условие (18) не выполняется.

Пусть $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, $(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, $B = 0$, $A \neq 0$. При таких ограничениях получим $\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\zeta}$, а уравнения (12), (10) примут вид

$$\begin{aligned} &\omega^2 + \frac{2}{A} (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\xi}) = \mathrm{const}, \\ &(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) A^2 \omega^4 + A (\boldsymbol{\nu}, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \omega^2 + (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\chi} + (\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\eta})$. Условия совместности системы уравнений (8), (19) не выполняются. Таким образом, маятниковые вращения гиростата с переменным моментом могут существовать лишь в случае $(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \ \boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Пусть $(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, $B = 0$, $A \neq 0$. При этом из уравнений (5) – (7) следует равенство

$$A (\boldsymbol{\nu}, (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{e}) + |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|^2 (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = 0.$$

Зависимость $\omega^2(\tau)$ найдем из уравнения (9). Подстановкой в (4) выясним, что выражение $\omega^2(\tau)$ не содержит линейных слагаемых по переменной τ. Это возможно лишь при условии $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\mathbf{e})\cos\mu=0$. Дальнейший анализ системы (4) показал, что в случае $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\mathbf{e})=0,\cos\mu\neq 0$ маятниковые вращения отсутствуют. Однако, если выполнено условие $\cos\mu := (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})=0$, то при дополнительном ограничении $(\boldsymbol{\beta},\mathbf{e})=0$ маятниковые вращения гиростата возможны. Явные решения уравнений (4) будут выписаны далее (см. п. 3, вариант 4).

Условию $A=B=0$ соответствуют случаи

$$\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}\parallel\boldsymbol{J\beta},\quad \boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}\nparallel\boldsymbol{J\beta},\quad \boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J\beta}\nparallel\boldsymbol{\beta}, \tag{20}$$

в каждом из которых система уравнений (4) исследована отдельно.

Результат сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Необходимое условие существования маятниковых движений тяжелого гиростата вокруг оси, направленной вдоль $\boldsymbol{\beta}$, имеет вид*

$$(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\,\boldsymbol{\alpha})^2+|\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha}|^2(\boldsymbol{\beta},\mathbf{e})^2=0. \tag{21}$$

3. Описание возможных вращений. Приведем описание четырех классов маятниковых вращений, которые были получены в результате исследования условий разрешимости системы (4) при ограничении $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\,\boldsymbol{\alpha})=0$.

1) *Вращения вокруг вертикальной главной оси, несущей центр масс.* В этом случае гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}$ также направлен вдоль оси вращения. Параметры гиростата и начальные условия движения подчинены условиям $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\beta}\parallel\boldsymbol{\nu}\parallel\mathbf{e}$. Вектор $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\lambda}$ суммарного кинетического момента гиростата является постоянным и в подвижном, и в неподвижном базисе:

$$\omega(t)\,\boldsymbol{J\beta}+\lambda(t)\,\boldsymbol{\alpha}\equiv\pm g\,\mathbf{e}. \tag{22}$$

2) *Вращения вокруг горизонтальной главной оси.* Ось, несущая центр масс, ортогональна оси вращения, а гиростатический момент направлен вдоль нее. В векторной форме условия имеют вид $\boldsymbol{\nu}\perp\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{e}\perp\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}\parallel\boldsymbol{J\beta}$. Вектор угловой скорости вращения тела фиксирован в горизонтальной плоскости, в то время как $\omega(t)$ – *произвольная функция времени.* Функция $\lambda(t)$ с точностью до константы определяется из уравнения

$$\dot\lambda=(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})-\dot\omega\,(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\alpha}), \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\nu}(\tau)=\mathcal{U}\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, $\boldsymbol{\gamma}=(\sin\tau,\,\cos\tau,\,0)^T$, $\dot\tau=\omega(t)$. Суммарный кинетический момент $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\lambda}\equiv\omega\,\boldsymbol{J\beta}+\lambda\,\boldsymbol{\alpha}$ направлен вдоль оси вращения $\boldsymbol{\beta}$, его абсолютная величина меняется с течением времени. При этом константа площадей $g=0$.

3) *Вращения вокруг наклонной оси.* Маятниковые вращения возможны вокруг неглавной наклонной оси, составляющей с вертикалью меньший угол, чем с осью, содержащей центр масс, т.е. $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})^2>(\mathbf{e},\boldsymbol{\beta})^2$. Кроме того, должны выполняться условия $\boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\alpha}\perp\mathbf{e}$ и $(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e},\,\boldsymbol{\beta})=0$. Очевидно, что тогда

справедливы неравенства $(\mathbf{e},\boldsymbol{\beta})\neq 0$ и $\mathbf{e}\times\boldsymbol{\beta}\neq 0$. Для данного вида вращений зависимость $\omega(t)$ определена с точностью до постоянного множителя, зависящего от начальных условий: $\omega = g^{-1}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})^2/(\mathbf{e},\boldsymbol{\beta})$. По найденным $\boldsymbol{\nu}(t)$ и $\omega(t)$ абсолютная величина гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}$ определяется однозначно:

$$\lambda = -(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\alpha})\omega + \frac{g}{(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})}, \qquad (\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})\neq 0, \tag{24}$$

что и влечет за собой ограничение на угол наклона оси вращения. В отличие от двух предыдущих случаев, вектор $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{\lambda}\equiv\omega\boldsymbol{J\beta}+\lambda\boldsymbol{\alpha}$ направлен не по оси вращения, а вдоль вектора $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{J\beta}\nparallel\boldsymbol{\beta}$. Постоянная площадей $g\neq 0$.

Пусть $\varkappa := \cos\tau$, где $\dot\tau=\omega(t)$. Тогда $\varkappa(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot\varkappa = c\,(\varkappa+a)^2\sqrt{1-\varkappa^2}, \qquad \varkappa+a\neq 0, \tag{25}$$

где $|a| = |\operatorname{ctg}\langle\widehat{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}}\rangle\operatorname{ctg}\langle\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\rangle| = |\operatorname{ctg}\langle\widehat{\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}}\rangle\operatorname{tg}\langle\widehat{\mathbf{e},\boldsymbol{\beta}}\rangle| > 1$ при $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})^2 > (\mathbf{e},\boldsymbol{\beta})^2$, а c – постоянная, значение которой здесь приводить не будем. Запись $\langle\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\rangle$ обозначает угол между векторами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Уравнение (25) интегрируется в элементарных функциях:

$$\boldsymbol{|a|>1}: \quad c(t-t_0) = \frac{1}{(a^2-1)^{3/2}}\left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\sqrt{a^2-1}}{(\varkappa+a)} + a\arcsin\frac{a\varkappa+1}{\varkappa+a}\right). \tag{26}$$

В случае $|a|\leq 1$ решение уравнения (25) также несложно выписать в явном виде. Тогда $\omega(t)\to 0$, $\lambda(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, что противоречит исходному предположению об ограниченности решения системы (4).

Формула (26) не позволяет выписать явную зависимость $\varkappa(t)$, поскольку представляет собой трансцендентное уравнение. Тем не менее ясно, что она определяет непрерывно дифференцируемую, периодическую с периодом $T=\dfrac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}c}$ функцию времени $\varkappa(t)$. Следовательно, функции $\omega(t)$, $\boldsymbol{\nu}(t)$ и $\lambda(t)$ также будут периодическими.

4) *Вращения вокруг горизонтальной неглавной оси.* Векторы $\boldsymbol{J\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ компланарны, но среди них нет коллинеарных; центр масс лежит на оси, ортогональной оси вращения. Если при этом выполнено условие

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3(J_1-J_2)(J_2-J_3)(J_3-J_1)\neq 0, \tag{27}$$

то допустимые оси маятниковых вращений принадлежат пересечению конуса $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\,\boldsymbol{\alpha})=0$ с плоскостью $\mathbf{e}\perp\boldsymbol{\beta}$, проходящей через начало координат. В зависимости от распределения масс и направления гиростатического момента, в пересечении могут лежать одна, две либо ни одной образующей конуса. Этому соответствуют случаи $D=0$, $D>0$ и $D<0$, где

$$D = [(J_2-J_3)e_1\alpha_1+(J_3-J_1)e_2\alpha_2+(J_2-J_1)e_3\alpha_3]^2+4e_1e_2\alpha_1\alpha_2(J_2-J_3)(J_1-J_3).$$

Отметим, что все случаи реализуемы. Например, пусть $J_1 = 3$, $J_2 = 4$, $J_3 = 5$, тогда получим

$$D = 0: \ \mathbf{e} = (e_1, 0, e_3)^T, \quad \boldsymbol{\alpha} = (e_3, 0, e_1)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (e_3, 0, -e_1)^T;$$
$$D > 0: \ \mathbf{e} = (e_1, 0, e_3)^T, \quad \boldsymbol{\alpha} = (-e_1, 0, e_3)^T, \quad \boldsymbol{\beta} = (e_3, 0, -e_1)^T;$$
$$D < 0: \ \boldsymbol{\alpha} \parallel (e_2e_3, -e_1e_3, e_1e_2)^T, \quad \boldsymbol{\beta} \parallel (e_2e_3, -2e_1e_3, e_1e_2)^T, \quad e_1e_2e_3 \neq 0.$$

Если условие (27) не выполняется и, кроме того,

$$\alpha_1^2(J_2 - J_3)^2 + \alpha_2^2(J_3 - J_1)^2 + \alpha_3^2(J_1 - J_2)^2 \neq 0,$$

то уравнение $(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ определяет пару пересекающихся плоскостей. Допустимой осью маятниковых вращений может быть любая ось, проходящая через начало координат, если вектор $\mathbf{e}$ ортогонален одной из пересекающихся плоскостей.

Так же, как и для вращений вокруг горизонтальной *главной* оси, вектор $\omega\boldsymbol{J\beta}+\lambda\boldsymbol{\alpha}$ здесь направлен вдоль $\boldsymbol{\beta}$, хотя $\boldsymbol{\beta} \nparallel \boldsymbol{J\beta}$ и $\boldsymbol{\beta} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$. Константа площадей $g = 0$. В отличие от предыдущего случая, величина λ линейно выражается через ω :

$$\lambda = -(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})\, \omega / |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|^2. \tag{28}$$

Если маятниковое вращение вокруг заданной оси возможно, то система (4) допускает инвариантное соотношение (аналог интеграла энергии)

$$A\omega^2 + 2(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}) = 2h, \tag{29}$$

где константа h определена начальными условиями движения. Выразим ω из (29). На каждом интервале монотонности функция $\tau(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\tau} = \omega(\tau) = \pm\sqrt{\frac{2}{A}(\ h - (\boldsymbol{\nu}(\tau), \mathbf{e}))}, \tag{30}$$

неотрицательность выражения под радикалом ограничивает множество допустимых значений h. Пусть $\varkappa := \cos\widehat{\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}\rangle} = (\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e})$. Тогда $\varkappa(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\varkappa} = c\sqrt{\varepsilon\, 2(h - \varkappa)(1 - \varkappa^2)}, \qquad c = |A|^{-1/2} \neq 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{31}$$

которое интегрируется в эллиптических функциях. Качественно различные решения уравнения (31) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{|h| < 1}: && \varkappa(t) = \varepsilon\, \mathrm{sn}^2(c\,(t - t_0); k) - \varepsilon\, \mathrm{dn}^2(c\,(t - t_0); k),\\
& && \omega(t) = c\sqrt{2(1 + \varepsilon h)}\ \mathrm{cn}(c\,(t - t_0); k), \quad k = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon h}{2}};\\
&\boldsymbol{|h| > 1}: && \varkappa(t) = \varepsilon\, 2\, \mathrm{sn}^2(\frac{c\,(t - t_0)}{k}; k) - \varepsilon,\\
& && \omega(t) = c\sqrt{2(1 + \varepsilon h)}\ \mathrm{dn}(\frac{c\,(t - t_0)}{k}; k), \quad k = \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon h}};\\
&\boldsymbol{|h| = 1}: && \varkappa(t) = \varepsilon\, 2\, \mathrm{th}^2 c(t - t_0) - \varepsilon; \quad \omega(t) = 2c\, \mathrm{ch}^{-1} c(t - t_0).
\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, при $h^2 \neq 1$ решения системы (4) – периодические функции времени. В последнем, асимптотическом, случае гиростат стремится к положению равновесия ($\omega(t) \to 0, \ \lambda(t) \to 0$), при этом вектор центра масс в пределе занимает вертикальное положение, т.е. $\boldsymbol{\nu}(t) \to \pm \mathbf{e}$ при $t \to \pm\infty$.

Выводы. Если векторы $\boldsymbol{J\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\mathbf{e}$ не удовлетворяют ни одному из условий 1)−4), то вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\boldsymbol{\beta}$ вокруг оси, направленной вдоль $\boldsymbol{\beta}$, невозможно. Достаточные условия (условия на распределение масс, угол наклона оси вращения, начальные значения переменных) для каждого семейства вращений выписаны отдельно. Указаны явные зависимости ω, λ и $\boldsymbol{\nu}$ от времени. Таким образом, доказана следующая теорема о необходимых и достаточных условиях существования маятниковых вращений тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки:

Теорема. *Маятниковые движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ существуют тогда и только тогда, когда параметры, характеризующие распределение масс системы и начальные условия движения, подчинены следующим ограничениям:*

- $\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e} \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta} = 0;$
- $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{e}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \qquad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta} = 0;$
- $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{e}) = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}) = 0, \qquad \boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\alpha} = 0, \qquad (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})^2 > (\mathbf{e}, \boldsymbol{\beta})^2 > 0;$
- $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{e}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \qquad (\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \neq 0, \ \ D \geq 0.$

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд–во иностр. лит. – Т. 2, Ч. 2. – 1951. – 555 с.
2. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
3. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
4. *Staude O.* Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reine und angew. Math. – 1894. – **113**, H. 4. – S. 318–334.
5. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **7**, вып. 1. – С. 46–48.
6. *Харламов П.В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373–375.
7. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Там же. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
8. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`applmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 22.09.09