

УДК 531.38

©2009. И.Н. Гашененко

## О РЕШЕНИИ Д.Н. ГОРЯЧЕВА

85-летию со дня рождения замечательного ученого  
Павла Васильевича Харламова  
посвящается.

Изучены аналитические и качественные свойства решения Д.Н. Горячева классической задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Решение записано в явном виде, доказана периодичность движений тела при малых значениях энергии, когда  $|h| < 1$ . Получены условия соизмеримости частот при квазипериодическом движении тела в неподвижном пространстве для  $h > 1$ . Изучена временная эволюция угловой скорости и кинетического момента. Движение тела представлено качением аксоидов угловой скорости.

**Введение.** Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \mathbf{r} \times \nu, \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (1)$$

где  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции тела в неподвижной точке,  $\omega$  – угловая скорость,  $A\omega$  – кинетический момент,  $\nu$  – орт вертикали,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор центра масс тела. Уравнения (1) имеют три первых интеграла

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} A\omega \cdot \omega - \mathbf{r} \cdot \nu = h, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} A\omega \cdot \nu = g, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \nu \cdot \nu = 1. \quad (2)$$

В 1900 г. Д.Н. Горячев [1] нашел новое частное решение уравнений (1) при следующих ограничениях на параметры:

$$A_1 = A_2 = 4A_3, \quad \mathbf{r} = (1, 0, 0), \quad g = 0.$$

При этом в безразмерных переменных уравнения (1) записываются в виде

$$\begin{aligned} 4\dot{\omega}_1 &= 3\omega_2\omega_3, & 4\dot{\omega}_2 &= -3\omega_1\omega_3 - \nu_3, & \dot{\omega}_3 &= \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, & \dot{\nu}_3 &= \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (3) допускает два независимых инвариантных соотношения

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 - b\omega_1^{2/3} = 0, \quad \nu_3\omega_1^{1/3} + b\omega_3 = 0. \quad (4)$$

Впоследствии С.А. Чаплыгин [2] обобщил решение Д.Н. Горячева и указал переменные, в которых на интегральном уровне  $G = 0$  уравнения (3) сводятся к гиперэллиптическим квадратурам. В работе [2] выписаны неявные выражения, связывающие фазовые переменные решения Горячева с эллиптическими функциями Вейерштрасса, однако эти формулы оказались слишком

сложными для изучения движений. Более наглядные преобразования, сводящие уравнения (3),(4) к квадратурам, предложены А.И. Докшевичем [3].

Д.Н. Горячев [1] не ограничился нахождением инвариантных соотношений (4) и постарался выяснить свойства движения тела в пространстве, в итоге он предложил геометрическую интерпретацию найденного решения качением (и скольжением) конуса кинетического момента по неподвижной горизонтальной плоскости. Уравнения П.В. Харламова [5] позволили получить прямое кинематическое истолкование движения в этом решении. В частности, в работе [6] методом годографов исследовано движение тела при ограничении  $4b^3 + 1 = h^2$ . Подвижные годографы угловой скорости были полностью изучены Г.В. Горром [7]. Качественные свойства малых колебаний и быстрых вращений гироскопа Горячева описаны в работах [4, 8, §10]. Недавно [9] в результате применения компьютерных методов А.В. Борисовым и И.С. Мамаевым были выявлены новые свойства движения тела в случае Горячева.

В этой работе мы стремимся объединить результаты всех перечисленных исследований и продемонстрировать общую картину движения тела в случае Горячева. Здесь выписаны явные зависимости фазовых переменных от времени, доказана периодичность движений тела для значений энергии  $h \in (-1, 1)$ , найдены параметрические условия соизмеримости частот при квазипериодическом движении тела в неподвижном пространстве для  $h > 1$ , исследовано движение центра масс, изучено изменение угловой скорости и кинетического момента, движение тела представлено качением (без скольжения) аксоидов угловой скорости.

**1. Зависимость переменных от времени.** Пусть  $h \in (-1, 1)$ , тогда решение Горячева записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= b^{3/4} \sqrt{8s_1^3} \frac{\operatorname{cn}^3 \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau)^{3/2}}, & \omega_2 &= b^{3/4} \sqrt{2s_1} \frac{(1 - s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau) \operatorname{cn} \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau)^{3/2}}, \\
 \omega_3 &= -\frac{4s_1}{1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau} \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau, & \nu_3 &= b^{3/4} \sqrt{8s_1} \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{dn} \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau)^{1/2}}, \\
 \nu_1 &= \left[ (6s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau - 1 - s_1^4 \operatorname{cn}^8 \tau) h + 4(\sqrt{1 + 4b^3 - h^2} - b^{3/2}) s_1 \operatorname{cn}^2 \tau - \right. \\
 &\quad \left. - 4s_1^3 \operatorname{cn}^6 \tau (b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}) \right] \frac{1}{(1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau)^2}, & (5) \\
 \nu_2 &= \left[ 4(1 - s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau) h s_1 \operatorname{cn}^2 \tau - 2b^{3/2} (1 - s_1^4 \operatorname{cn}^8 \tau) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 - 6s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau + s_1^4 \operatorname{cn}^8 \tau) \sqrt{1 + 4b^3 - h^2} \right] \frac{1}{(1 + s_1^2 \operatorname{cn}^4 \tau)^2}, \\
 s_1 &= \frac{h + 1}{2b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}}, & k &= \sqrt{(h + 1)/2}, & \tau &= \frac{1}{2} (t - t_0).
 \end{aligned}$$

Период  $T$  решения (5) не зависит от  $b$  и выражается через полный эллипти-

ческий интеграл первого рода  $K(k)$  по формуле

$$T = 8K(k). \quad (6)$$

В случае  $h > 1$  решение Горячева имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= b^{3/4} \sqrt{8s_1^3} \frac{\operatorname{dn}^3 \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau)^{3/2}}, \quad \omega_2 = b^{3/4} \sqrt{2s_1} \frac{(1 - s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau) \operatorname{dn} \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau)^{3/2}}, \\ \omega_3 &= -\frac{4k s_1}{1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau} \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau \operatorname{dn} \tau, \quad \nu_3 = b^{3/4} \sqrt{8s_1} \frac{k \operatorname{sn} \tau \operatorname{cn} \tau}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau)^{1/2}}, \\ \nu_1 &= \left[ (6s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau - 1 - s_1^4 \operatorname{dn}^8 \tau) h + 4(\sqrt{1 + 4b^3 - h^2} - b^{3/2}) s_1 \operatorname{dn}^2 \tau - \right. \\ &\quad \left. - 4s_1^3 \operatorname{dn}^6 \tau (b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}) \right] \frac{1}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau)^2}, \\ \nu_2 &= \left[ 4(1 - s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau) h s_1 \operatorname{dn}^2 \tau - 2b^{3/2} (1 - s_1^4 \operatorname{dn}^8 \tau) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 6s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau + s_1^4 \operatorname{dn}^8 \tau) \sqrt{1 + 4b^3 - h^2} \right] \frac{1}{(1 + s_1^2 \operatorname{dn}^4 \tau)^2}, \\ s_1 &= \frac{h + 1}{2b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}}, \quad k = \sqrt{2/(h + 1)}, \quad \tau = \frac{1}{2k}(t - t_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Период  $T$  решения (7) также не зависит от  $b$  и выражается через полный эллиптический интеграл первого рода  $K(k)$  по формуле

$$T = 4kK(k). \quad (8)$$

Пусть  $h = 1$ , тогда решение Горячева описывает движение твердого тела в окрестности неустойчивого положения равновесия:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{8b^3 \operatorname{ch}^3 \tau}{(1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau)^{3/2}}, \quad \omega_2 = 2b^{3/2} \frac{(1 - 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau) \operatorname{ch} \tau}{(1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau)^{3/2}}, \\ \omega_3 &= \frac{8b^{3/2} \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau}{1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau}, \quad \nu_3 = -\frac{4b^{3/2} \operatorname{sh} \tau}{(1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau)^{1/2}}, \\ \nu_2 &= \frac{4b^{3/2}}{(1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau)^2} (12b^3 \operatorname{ch}^4 \tau - 8b^3 \operatorname{ch}^6 \tau + 2\operatorname{ch}^2 \tau - 1), \\ \nu_1 &= -1 + \frac{8b^3 \operatorname{ch}^2 \tau}{1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau} + \frac{32b^3 \operatorname{ch}^2 \tau \operatorname{sh}^2 \tau}{(1 + 4b^3 \operatorname{ch}^4 \tau)^2}, \quad \tau = \frac{1}{2}(t - t_0). \end{aligned} \quad (9)$$

При  $t \rightarrow \pm\infty$  решение (9) асимптотически стремится к точке

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) = (0, 0, 0, -1, 0, 0).$$

Если в формулах (5) положить  $b = 0$ , получим зависимости, описывающие движение физического маятника вокруг третьей главной оси инерции:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \nu_3 = 0, \\ \omega_3 = 2k \operatorname{cn}(t - t_0), \quad \nu_1 = \operatorname{dn}^2(t - t_0) - k^2 \operatorname{sn}^2(t - t_0), \\ \nu_2 = -2k \operatorname{sn}(t - t_0) \operatorname{dn}(t - t_0), \quad k = \sqrt{(h + 1)/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим интересное свойство: период  $T = 4K(k)$  решения (10) вдвое меньше периода решения Горячева (5).

В случае  $b = \infty$  непосредственно из формул (5) следуют явные выражения фазовых переменных, описывающие движение физического маятника вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_3 = \nu_2 = 0, \quad \omega_2 = k \operatorname{cn}\tau, \quad \nu_1 = \operatorname{dn}^2\tau - k^2 \operatorname{sn}^2\tau, \\ \nu_3 = 2k \operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau, \quad k = \sqrt{(h + 1)/2}, \quad \tau = (t - t_0)/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичные выражения следуют из (7) в случае  $h > 1, b = \infty$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_3 = \nu_2 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{k} \operatorname{dn}\tau, \quad \nu_1 = \operatorname{cn}^2\tau - \operatorname{sn}^2\tau, \\ \nu_3 = 2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau, \quad k = \sqrt{2/(h + 1)}, \quad \tau = (t - t_0)/(2k). \end{aligned} \quad (12)$$

Период маятниковых вращений (12) снова вычисляется по формуле (8).

Выражения (5)–(9) получены непосредственно из формул А.И. Докшевича, в работах [3, 4] ему кардинальным образом удалось упростить выкладки С.А. Чаплыгина [2] для системы уравнений (3),(4).

**2. Изменение угловой скорости в подвижном базисе.** Д.Н. Горячев первым изучил некоторые геометрические свойства кривых, описываемых вектором кинетического момента  $A\omega$  в подвижном базисе. Основываясь на результатах его исследования, отметим, что в подвижных осях, связанных с телом, годографы угловой скорости являются замкнутыми кривыми, образованными пересечением цилиндра с конусом 4-го порядка:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 - b\omega_1^{2/3} = 0, \\ b^3[\omega_3^2 + 8(\omega_1^2 + \omega_2^2)]^2 - 16(\omega_1^2 + \omega_2^2) \left( \omega_1 h \pm \omega_2 \sqrt{1 + 4b^3 - h^2} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) следует важное ограничение на параметры: действительные движения тела возможны лишь при выполнении условия

$$1 + 4b^3 - h^2 \geq 0.$$

В работе [7] Г.В. Горр детально исследовал подвижные годографы угловой скорости и классифицировал их в зависимости от значений параметров  $b, h$ , входящих в решение Горячева.

Зафиксируем значение константы  $h$ , тогда зависящее от  $b$  однопараметрическое семейство годографов угловой скорости принадлежит поверхности, определяемой уравнением

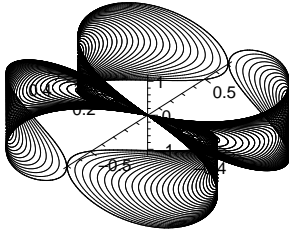
$$[\omega_3^2 + 8(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 4h]^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_1^2 + [\omega_3^2 + 16(\omega_1^2 + \omega_2^2)](\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3^2\omega_2^2 - 16\omega_1^2\omega_2^2 = 0.$$

Геометрические свойства этой поверхности изучены в работе [10]. В частности, для различных значений  $h$  исследованы возможные виды ее проекций на плоскость  $\mathbb{R}^2(\omega_1, \omega_2)$ .

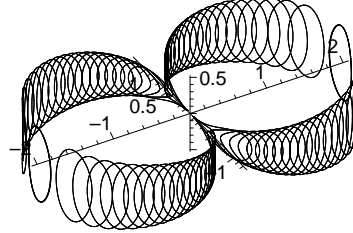
Зададим значение  $b > 0$ . Как следует из (13), зависящее от  $h$  однопараметрическое семейство годографов угловой скорости принадлежит цилиндру, образующие которого параллельны оси  $O\omega_3$ . Если  $h \in (-1, 1)$ , то подвижные годографы напоминают восьмерку: они симметричны относительно преобразования  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3)$  и имеют точку самопересечения в начале координат (см. рис. 1, а). Если  $h > 1$ , то подвижные годографы не проходят через начало координат, каждая кривая на рис. 1, б диффеоморфна окружности  $S^1$ . Если значения  $b, h$  удовлетворяют неравенствам  $0 < 2b^{3/2} < h < 1$  либо  $0 < (h^2 - 1) < 4b^3 < h^2$ , то различные подвижные годографы, соответствующие этим значениям, могут попарно пересекаться [7]. Также заметим, что расположение годографов угловой скорости в  $\mathbb{R}^3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  ограничено конусом:

$$4(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (b^{3/2}\sqrt{1 + 4b^3} + 2b^3)\omega_3^2 \geq 0, \quad (14)$$

причем годографы, соответствующие уровням энергии  $h > 0$ , касаются этого конуса вне начала координат.



а)  $b = 0.62996$ ,  $h \in (-1, 1)$



б)  $b = 2.5$ ,  $h \in (1, 7.9687)$

Рис. 1. Подвижные годографы угловой скорости.

В случае  $h > 1$  орт вертикали  $\nu$  описывает в подвижном базисе замкнутую кривую, лежащую на пересечении сферы с параболическим цилиндром:

$$\begin{cases} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ \nu_3^4 b^{-3} + 12\nu_3^2 - 8\nu_1 h \pm 8\nu_2 \sqrt{1 + 4b^3 - h^2} - 8 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

В случае  $h < 1$  движение орта вертикали вдоль дуги кривой (15) ограничено точками  $P_{1,2} \in \mathbb{R}^3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ :

$$P_{1,2} = \left( -h, -2b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}, \pm 2b^{3/4} \sqrt{-2b^{3/2} + \sqrt{1 + 4b^3 - h^2}} \right).$$

**3. Изменение угловой скорости в неподвижном базисе.** Найдем компоненты вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi \mathbf{i}_1 + \omega_\eta \mathbf{i}_2 + \omega_\zeta \mathbf{i}_3$  в неподвижном базисе. Положим  $\omega_\eta = \omega_\rho \cos \alpha$ ,  $\omega_\zeta = \omega_\rho \sin \alpha$ . С учетом (2),(3) запишем кинематические уравнения П.В. Харламова [5], определяющие неподвижный годограф угловой скорости:

$$\omega_\xi \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{3}{4} \omega_3 \nu_3, \quad \omega_\rho^2 \equiv |\boldsymbol{\omega}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \left(1 - \frac{9}{16} \nu_3^2\right), \quad (16)$$

$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{3}{4} \nu_3^2 - 1\right) \omega_1 - \frac{3}{8} (\nu_1 + h) \omega_3 \nu_3. \quad (17)$$

В соответствии с формулами (5),(16) получим явную зависимость от времени величин  $\omega_\xi, \omega_\rho$  для  $h \in (-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} \omega_\xi = & -\frac{3\sqrt{8} b^{3/4} s_1^{3/2}}{(1 + s_1^2 \text{cn}^4 \tau)^{3/2}} \text{sn}^2 \tau \text{dn}^2 \tau \text{cn} \tau, \quad \omega_\rho^2 = \frac{2 b^{3/2} s_1 \text{cn}^2 \tau}{1 + s_1^2 \text{cn}^4 \tau} + \\ & + \frac{16 s_1^2 \text{sn}^2 \tau \text{cn}^2 \tau \text{dn}^2 \tau}{(1 + s_1^2 \text{cn}^4 \tau)^2} - \frac{72 b^{3/2} s_1^3 \text{sn}^4 \tau \text{dn}^4 \tau \text{cn}^2 \tau}{(1 + s_1^2 \text{cn}^4 \tau)^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для  $h > 1$  из (7),(16) следуют аналогичные выражения

$$\begin{aligned} \omega_\xi = & -\frac{3\sqrt{8} b^{3/4} k^2 s_1^{3/2}}{(1 + s_1^2 \text{dn}^4 \tau)^{3/2}} \text{sn}^2 \tau \text{cn}^2 \tau \text{dn} \tau, \quad \omega_\rho^2 = \frac{2 b^{3/2} s_1 \text{dn}^2 \tau}{1 + s_1^2 \text{dn}^4 \tau} + \\ & + \frac{16 k^2 s_1^2 \text{sn}^2 \tau \text{cn}^2 \tau \text{dn}^2 \tau}{(1 + s_1^2 \text{dn}^4 \tau)^2} - \frac{72 b^{3/2} k^4 s_1^3 \text{sn}^4 \tau \text{cn}^4 \tau \text{dn}^2 \tau}{(1 + s_1^2 \text{dn}^4 \tau)^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Зададим величины  $b, h$ . При изменении независимой переменной  $\tau$  уравнения

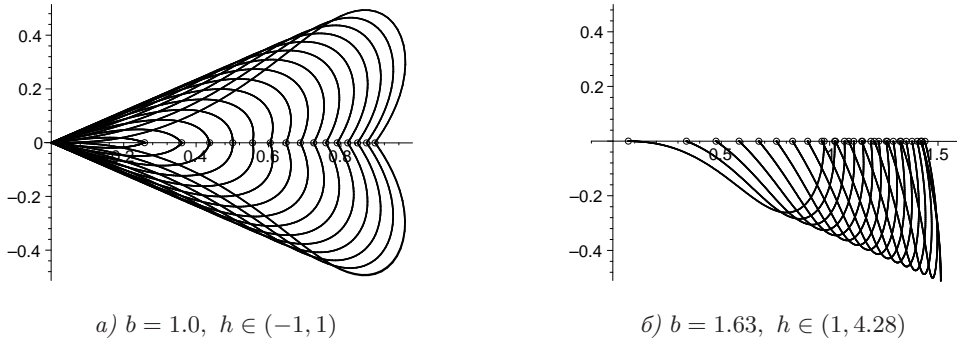


Рис. 2. Плоскость  $\mathbb{R}^2(\omega_\xi, \omega_\rho)$ . Меридиан поверхности вращения.

(18),(19) определяют в  $\mathbb{R}^2(\omega_\xi, \omega_\rho)$  дугу плоской кривой. Назовем ее меридианом. Вращая меридиан вокруг оси  $O\omega_\xi$ , получим ту часть поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф угловой скорости. Семейства

меридианов, изображенные на рис. 2, соответствуют фиксированному значению  $b$ . Рассмотрим прямые

$$\ell_{1,2} = \{\omega_\rho, \omega_\xi : \omega_\rho \pm c_0 \omega_\xi = 0\}, \quad \text{где } c_0 = \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{4+b^{-3}}-1)}{(\sqrt{4+b^{-3}}-2)^{1/2}} \geq \frac{4}{3}.$$

Коэффициент  $c_0$  достигает наименьшего значения  $c_{min} = 4/3$  при  $b = 5^{-1/3}$ . Если  $h > 1$ , то зависящее от  $h$  однопараметрическое семейство меридианов (19) имеет огибающую  $\ell_1$ . Если  $0 < h < 1$ , то меридианы (18) касаются прямых  $\ell_{1,2}$  вне начала координат. В моменты времени  $t = t_0 + nT/2$ ,  $n = 0, 4$ , получим  $\omega_\xi = 0$ . При этом граничные точки меридиана лежат на горизонтальной прямой. Если выполнены условия  $2(h^2 - 1) < 8b^3 \leq h^2 + 16 + h\sqrt{h^2 + 288}$ , то меридиан имеет касательную, параллельную оси  $O\omega_\xi$ , а проекция поверхности вращения на плоскость  $\mathbb{R}^2(\omega_\eta, \omega_\zeta)$  имеет складку.

**Теорема 1.** *Если  $h \in (-1, 1)$ , то движение твердого тела в случае Горячева является периодическим.*

*Доказательство.* В качестве начального значения  $t_0$  выберем  $T/4$ . При этом формулы (5) могут быть преобразованы с учетом соотношений

$$\operatorname{sn}(u - K) = -\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad \operatorname{cn}(u - K) = k' \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad \operatorname{dn}(u - K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}u}.$$

Из свойств эллиптических функций

$$\operatorname{sn}(u - K) = \operatorname{sn}(-u - K), \quad \operatorname{dn}(u - K) = \operatorname{dn}(-u - K), \quad \operatorname{cn}(u - K) = -\operatorname{cn}(-u - K)$$

следует, что определяемые равенствами (5) функции  $\omega_i(t)$  являются нечетными функциями времени  $t$ , тогда как  $\nu_i(t)$  – четные функции  $t$ .

Угол  $\alpha$  определим уравнением (17), которое запишем в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_1 f, \quad f = \frac{1}{\omega_\rho^2} \left[ \frac{3}{16} \frac{\omega_3^2 \nu_3^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \frac{3}{2} \nu_3^2 - 1 \right].$$

Подстановкой зависимостей (5) убеждаемся, что для  $h \in (-1, 1)$  на решении Горячева функция  $f(\omega_i(t), \nu_3(t))$  является четной функцией времени. Периодическая нечетная функция  $F(t) = \omega_1(t)f(\omega_i(t), \nu_3(t))$  непрерывна и ограничена в симметричном промежутке  $[-T/2, T/2]$ . В частности,  $F(0) = 0$ . Следовательно, приращение угла  $\alpha$  за период  $T = 8K$  равно нулю:

$$\Delta\alpha = \alpha(T + t_0) - \alpha(t_0) = \int_{t_0}^{T+t_0} F(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} F(t)dt = 0.$$

При любом значении  $b \in (0, \infty)$  компоненты  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  периодически изменяются с течением времени. Таким образом, годографы угловой скорости – замкнутые кривые. Движение тела может быть представлено качением подвижного годографа по неподвижному.  $\square$

Периодичность движения гироскопа Д.Н. Горячева при  $|h| < 1$  впервые отмечена в монографии [9], это важное свойство было обнаружено авторами в результате детального компьютерного анализа уравнений движения.

Найдем приращение угла  $\alpha$  за период  $T = 4kK$  в случае  $h > 1$ . Используем инвариантные соотношения (4) для преобразования (17) к виду

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega_3 (3\nu_3^4 + 24b^3\nu_3^2 - 16b^3)}{\nu_3 (9\nu_3^4 - 16\nu_3^2 - 16b^3)}.$$

Обозначим постоянные величины

$$u_{1,2}^2 = 4b^{3/2}\sqrt{1 + 4b^3} \mp 8b^3, \quad \varkappa = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad \nu = \frac{u_1^2}{u_1^2 - 1}.$$

С учетом тождества  $(\nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1)^2 = (\nu_1^2 + \nu_2^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2)^2$  получим из (3),(4) выражение

$$\omega_3 = \frac{4\nu_3 i_3}{\sqrt{(u_1^2 - \nu_3^2)(\nu_3^2 + u_2^2)}}.$$

Независимой переменной выберем  $u = \nu_3$ , тогда уравнение (17) примет вид

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{2(2u_1^2u_2^2 - 3u^2u_1^2u_2^2 - 6u^4)}{(u_1^2u_2^2 + 16u^2 - 9u^4)\sqrt{(u_1^2 - u^2)(u^2 + u_2^2)}}. \quad (20)$$

При условии  $h > 1$  переменная  $u$  изменяется в интервале  $[-u_1, u_1]$ , следовательно, приращение угла  $\alpha$  за период  $T = 4kK$  выражается квадратурой

$$\Delta\alpha = \int_0^{u_1} \frac{8(2u_1^2u_2^2 - 3u^2u_1^2u_2^2 - 6u^4) du}{(u_1^2u_2^2 + 16u^2 - 9u^4)\sqrt{(u_1^2 - u^2)(u^2 + u_2^2)}}.$$

Можно вывести соотношение, связывающее  $\Delta\alpha$  с полными эллиптическими интегралами первого и третьего рода

$$K(\varkappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \Pi(\nu, \varkappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \nu \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}.$$

**Теорема 2.** Если  $h > 1$ , то приращение угла  $\alpha$  за период  $T = 4kK(k)$  не зависит от  $h$  и вычисляется по формуле

$$\Delta\alpha = \alpha(T + t_0) - \alpha(t_0) = 2\pi + \frac{4K(\varkappa)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + \frac{4\Pi(\nu, \varkappa)}{(u_1^2 - 1)\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}. \quad (21)$$

Для  $h > 1$ ,  $b \in (0, \infty)$  непрерывная функция  $\Delta\alpha(b)$  монотонно убывает, принимая значения из интервала  $(2\pi, 0)$ . График функции  $\Delta\alpha(b)$  изображен на рис. 3. За период  $T = 4kK(k)$  конец вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$



описывает замкнутую кривую в подвижном базисе, связанном с телом. За этот же интервал времени в неподвижном базисе вектор угловой скорости повернется вокруг вертикальной оси на угол  $\Delta\alpha$ . Таким образом, при  $h > 1$  движение тела является квазипериодическим, отношение  $\gamma = \Delta\alpha/(2\pi)$  определяет функцию вращения. Рациональным значениям  $\gamma = \Delta\alpha/(2\pi)$  отвечают периодические движения твердого тела в пространстве.

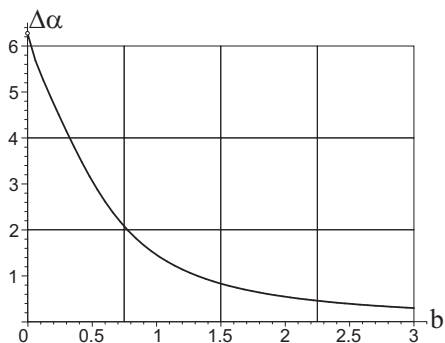


Рис. 3. Зависимость  $\Delta\alpha(b)$ .

Некоторое представление о движении тела можно получить, изучив поведение его центра масс. Малые колебания центра масс гироскопа Горячева в окрестности устойчивого равновесия исследованы в [4]. Как отмечено в [9], колебательные движения центра масс сохраняются при  $|h| < 1$ . Заддим  $h \in (-1, 1)$ , в этом случае движение тела является периодическим и центр масс описывает дугу некоторой кривой, заданной на сфере. Если записать  $\mathbf{r} = r_\xi \mathbf{i}_1 + r_\eta \mathbf{i}_2 + r_\zeta \mathbf{i}_3$ , то найдем ограничение  $r_\xi \equiv \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nu} = \nu_1 \leq -h$ . Рассмотрим зависящее от  $b$  семейство годографов вектора  $\mathbf{r} = (r_\xi, r_\eta, r_\zeta)$ . При малых значениях  $b$  центр масс тела движется вокруг третьей главной оси инерции. Это движение приближенно описывается известными формулами физического маятника (10) с удвоенным периодом (как было отмечено ранее, период решения (10) вдвое меньше периода решения Горячева (5)). При больших значениях  $b$  центр масс движется вокруг второй главной оси инерции, приближенные формулы следуют из (11). На рис. 4, а, б показаны годографы вектора  $\mathbf{r} = (r_\xi, r_\eta, r_\zeta)$  для значений  $h = 0, b \in (0, \infty)$ . Период колебаний центра масс не зависит от  $b$  и равен  $T = 8K(1/\sqrt{2}) \approx 14.83$ . На рис. 4, в показано движение центра масс для  $h = 0.99, b \in (0, \infty)$ . Здесь  $T = 8K(0.997) \approx 32.31$ .

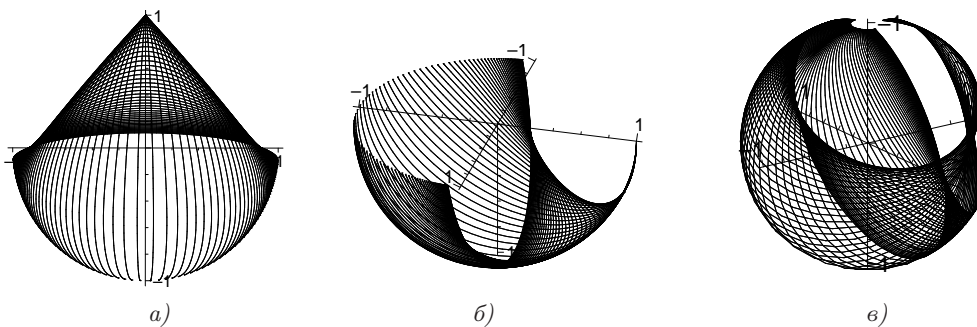


Рис. 4. Движение центра масс.

Замкнутые кривые, описываемые векторами  $\boldsymbol{\omega}, A\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}$  на горизонтальной плоскости  $\mathbb{R}^2(\omega_\eta, \omega_\zeta)$ , изображены на рис. 5. Вычисления проведены для по-

следовательности значений  $h \in (1, \sqrt{4b^3 + 1}]$  при заданном  $b = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} a) \gamma &= 2/3, b = 0.29556766312; & б) \gamma &= 1/2, b = 0.48669938884; \\ в) \gamma &= 2/5, b = 0.62792382381; & г) \gamma &= 1/3, b = 0.74602560087. \end{aligned}$$

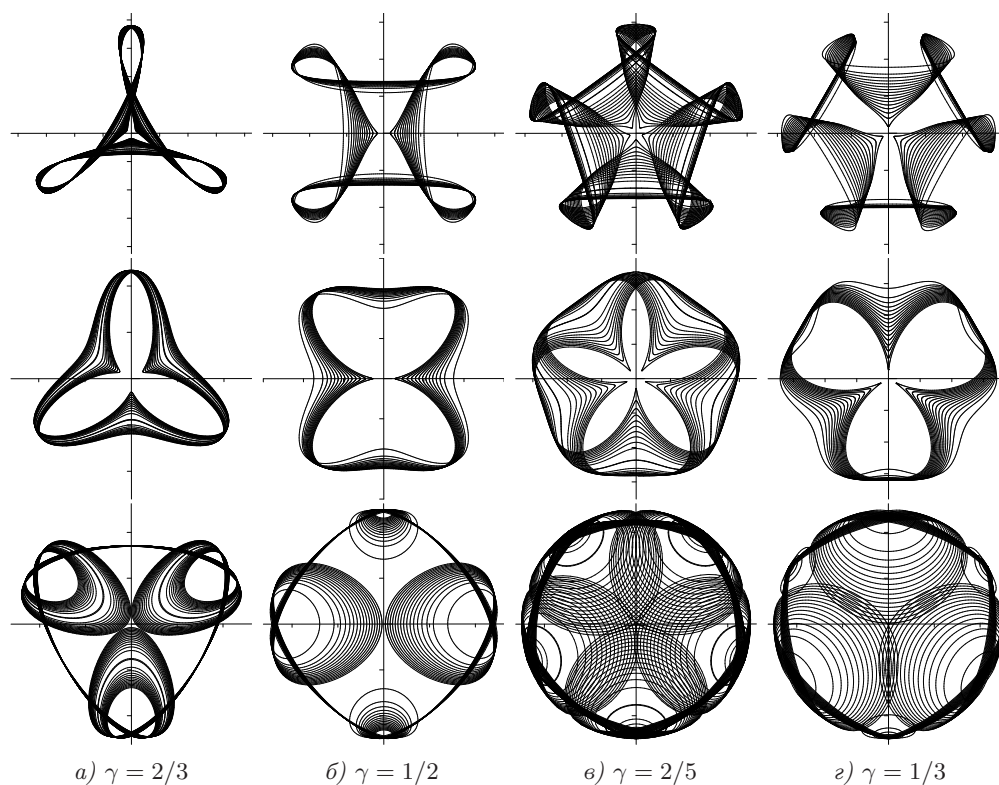


Рис. 5. Проекция годографов  $\omega$ ,  $A\omega$ ,  $\gamma$  на горизонтальную плоскость.

Заметим, что в статье [6] при вычислении  $\Delta\alpha(b)$  допущена неточность: если положить  $b = b^* \approx 0.653182$ ,  $h = \sqrt{4b^{*3} + 1}$ , то, как показано выше,  $\Delta\alpha(b^*) \neq 0$ . Из этого следует, что неподвижные годографы, изображенные в [6] на рис. 3, б, в, рис. 4, б, в, не соответствуют действительным движениям гироскопа Горячева.

**4. Кинематическая интерпретация движения.** Неизменно связанную с телом коническую поверхность – геометрическое место мгновенных осей в теле – называют подвижным аксоидом. Вершиной его служит неподвижная точка, а направляющей линией – подвижный годограф угловой скорости. Неподвижный аксоид – это геометрическое место мгновенных осей в пространстве. Его вершина также находится в точке  $O$ , а направляющей линией служит неподвижный годограф угловой скорости. По теореме Пуансо,

вращение твердого тела вокруг неподвижной точки может быть представлено качением без скольжения подвижного аксоида по неподвижному [5].

**Теорема 3.** *Однопараметрическое семейство подвижных годографов угловой скорости, соответствующих различным уровням энергии  $h \in (-1, \infty)$ , принадлежит одной и той же поверхности – подвижному аксоиду*

$$\mathcal{P} = \{x_1, x_2, x_3 : [8(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2]^2 b^3 - 16(1 + 4b^3)(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 = 0\}.$$

*Однопараметрическое семейство неподвижных годографов угловой скорости, соответствующих различным уровням энергии  $h \in (-1, \infty)$ , принадлежит одной и той же развертывающейся поверхности – неподвижному аксоиду*

$$\mathcal{N} = \{x_1, x_2, x_3 : x_1 = \sin \vartheta, x_2 = \cos \vartheta \cos \alpha, x_3 = \cos \vartheta \sin \alpha\},$$

где

$$\sin \vartheta = \frac{3u^2}{\sqrt{16u^2 + u_1^2 u_2^2}}, \quad \frac{d\alpha}{du} = \frac{2(2u_1^2 u_2^2 - 3u^2 u_1^2 u_2^2 - 6u^4)}{(u_1^2 u_2^2 + 16u^2 - 9u^4) \sqrt{(u_1^2 - u^2)(u^2 + u_2^2)}}, \quad |u| \leq u_1.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное значение  $b > 0$ . Повернем подвижный базис вокруг третьей главной оси на угол  $\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1 \cos \varphi_0 + \omega_2 \sin \varphi_0, & x_2 &= -\omega_1 \sin \varphi_0 + \omega_2 \cos \varphi_0, & x_3 &= \omega_3, \\ \cos \varphi_0 &= h(1 + 4b^3)^{-1/2}, & \sin \varphi_0 &= \pm(1 + 4b^3 - h^2)^{1/2}(1 + 4b^3)^{-1/2}. \end{aligned}$$

В новых переменных уравнения подвижного годографа (13) примут вид

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - b(x_1 \cos \varphi_0 - x_2 \sin \varphi_0)^{2/3} = 0, \\ [8(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2]^2 b^3 - 16(1 + 4b^3)(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Зависящее от  $h$  семейство подвижных годографов, заданных уравнениями (22), принадлежит конусу 4-го порядка, с изменением  $h$  меняется лишь вид направляющей линии и ориентация тела по отношению к этому конусу.

Для любого  $b > 0$  угол  $\alpha$  находим интегрированием уравнения (20), правая часть которого не зависит от  $h$ . Величины  $\omega_\xi, \omega_\rho$  запишем в виде

$$\omega_\xi = \frac{3}{4} \lambda u, \quad \omega_\rho = \lambda \sqrt{b^3 u^{-2} + 1 - \frac{9}{16} u^2}, \quad u \equiv \nu_3, \quad \lambda \equiv \omega_3.$$

Рассмотрим семейство неподвижных годографов, параметризованных константой  $h$ . Фиксированным значениям переменной  $u$  соответствуют пропорциональные тройки  $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ , которые отличаются лишь коэффициентом растяжения  $\lambda$ . Следовательно, заданием  $u(t)$  определяется некоторая образующая линейчатой поверхности – неподвижного аксоида. В качестве направляющей линии аксоида можно взять неподвижный годограф, соответствующий условию  $h^2 = 4b^3 + 1$ . Тогда все семейство годографов будет принадлежать этой же поверхности.  $\square$

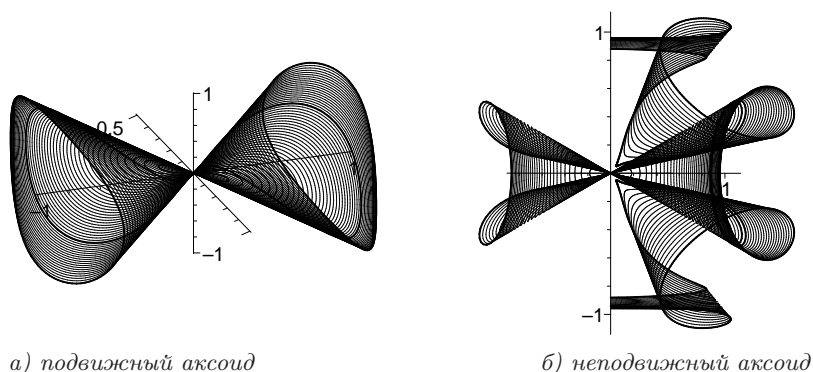


Рис. 6. Аксоиды, несущие семейства годографов.

На рис. 6, а изображен подвижный аксоид для  $b = 0.94677201378$ . Последовательность поворотов подвижного базиса на угол  $\varphi_0$  преобразует кривые на рис. 1, а, б в кривые, принадлежащие аксоиду (рис. 6, а). Годографы, соответствующие значениям  $h \in (-1, 1)$ , проходят через начало координат, они симметричны относительно преобразования  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, -x_2, -x_3)$ . Годографы, соответствующие значениям  $h \in (1, 2.09634433276]$ , топологически эквивалентны окружностям, они не пересекают точку  $O$ . Семейство неподвижных годографов для  $b = 0.94677201378$ ,  $h \in (-1, 2.09634433276)$  показано на рис. 6, б. В этом случае неподвижный аксоид замкнут ( $\gamma = 1/4$ ). Годографы, соответствующие значениям  $h \in (-1, 1)$ , имеют в начале координат точку самопересечения.

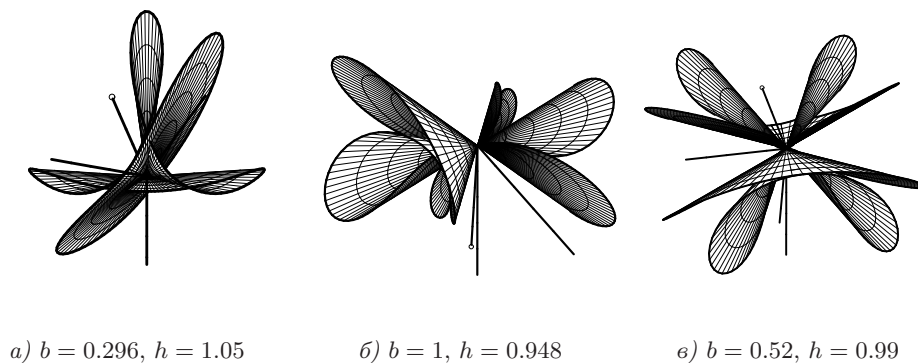


Рис. 7. Кинематическая интерпретация.

На рис. 7 показаны возможные формы годографов угловой скорости при периодическом движении гироскопа. Подвижный аксоид  $\mathcal{P}$  касается неподвижного аксоида  $\mathcal{N}$  вдоль одной из своих образующих. Положение центра масс на главной оси инерции отмечено точкой. На рис. 7, б, в длины подвижного и неподвижного годографов совпадают, период равен  $T = 8K(k)$ .

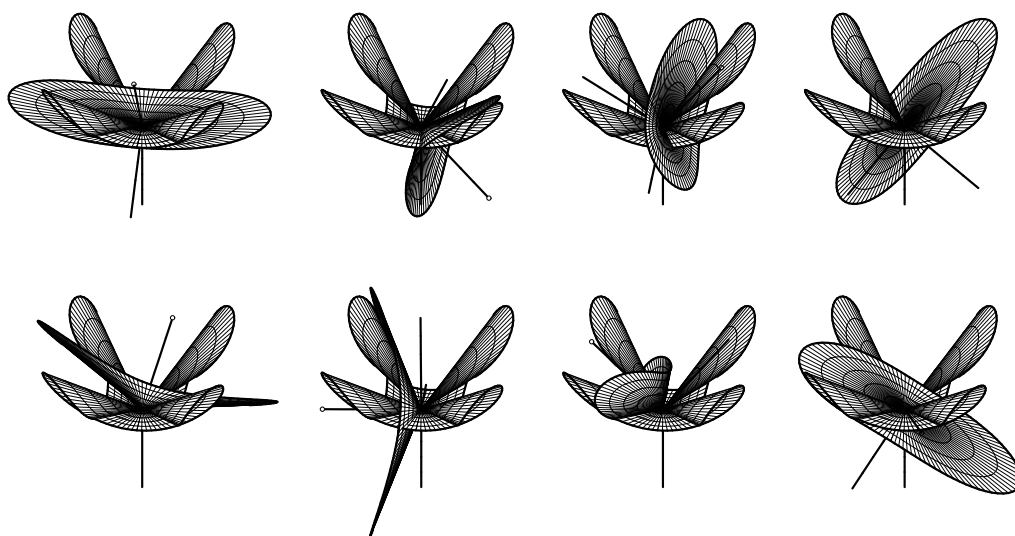


Рис. 8. Движение подвижного аксоида по неподвижному.

Другой пример периодического движения твердого тела показан на рис. 8. Для значений параметров  $b = 0.48669938884$ ,  $h = 1.20878045658$  изображены последовательные положения аксоидов. Здесь  $\gamma = 1/2$ , следовательно, за время  $2T$  подвижный годограф возвращается в исходное положение. Обкатывание годографов происходит без скольжения.

1. Горячев Д.Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае  $A=B=4C$ // Мат. сборник. – 1900. – **21**, вып. 3. – С. 431–438.
2. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке// Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1901. – **10**, вып. 2. – С. 32–34; Собр. соч. – М.;Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – С. 118–124.
3. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – Киев: Наук. думка, 1992. – 168 с.
4. Докшевич А.И. Движение тела, имеющего неподвижную точку, при условиях Д.Н. Горячева// Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 1–7.
5. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
6. Горр Г.В. Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина// Прикл. матем. и механика. – 1970. – **34**, вып. 6. – С. 1139–1143.
7. Горр Г.В. Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Д.Н. Горячева// Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 95–101.
8. Архангельский Ю.А. Динамика быстровращающегося твердого тела. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
9. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 576 с.
10. Гашененко И.Н. Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина// Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 3–9.