ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 533.6.013.42

©2008. **А.Ю. Карнаух**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ДВУСВЯЗНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК В ДВУХСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрены свободные колебания двусвязных упругих пластинок, находящихся на свободной и внутренней поверхностях двухслойной идеальной жидкости. Жидкость заполняет двусвязную цилиндрическую полость произвольного поперечного сечения. Пластинки жестко закрепленны по внутреннему и внешнему контуру двусвязной цилиндрической полости. Получено частотное уравнение и условие устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы. На примере коаксиальной цилиндрической полости проведено исследование условий устойчивости.

В настоящей статье обобщены результаты работ [1–4] на случай двусвязных упругих пластинок и произвольной двусвязной цилиндрической полости. Рассмотрено три частных случая: двусвязная упругая пластинка находится только на свободной поверхности двухслойной жидкости, разделяет жидкости разной плотности, находится на свободной поверхности однородной жидкости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с плотностями ρ_i $(i = 1, 2)$, находящейся в двусвязной цилиндрической полости произвольного поперечного сечения с областью S. На свободной поверхности верхней жидкости $(i = 1)$ и на поверхности раздела жидкостей (внутренней поверхности) находятся упругие пластинки с растягивающими усилиями T_i в срединной плоскости. Пластинки жестко закреплены по внешнему и внутреннему контуру двусвязной цилиндрической полости, считаются изотропными и обладают изгибной жесткостью D_i. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущенной свободной поверхности, а ось Oz была направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести g. Колебания жидкостей и пластин будем рассматривать в линейной постановке, считая движения жидкостей потенциальными, а совместные колебания пластин и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [4]

$$\Delta\Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i\Delta_2^2 W_i - T_i\Delta_2 W_i = \tag{1}$$

$$= P_i - P_{i-1} \quad \text{при} \quad z = 0 \ \ (i = 1) \quad \text{и} \quad z = -h_1 \ (i = 2)$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_j} = 0 \ (j=1,2), \qquad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_1-h_2} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial W_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad z=0, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial t} \quad \text{при} \quad z=-h_1,$$

$$W_i|_{\gamma_j} = \left.\frac{\partial W_i}{\partial\nu}\right|_{\gamma_j} = 0 \quad (j=1,2)\,, \qquad W_i,\ \nabla W_i < \infty, \qquad \int\limits_S W_i ds = 0.$$

Здесь Φ_i – потенциал скорости i-ой жидкости; Δ и Δ_2 – трехмерный и двумерный операторы Лапласа; W_i – прогиб i-ой пластинки; ν – орт внешней нормали к смачиваемой двусвязной цилиндрической поверхности Σ_j; γ_j – внешний $(j=1)$ и внутренний $(j=2)$ контуры двусвязной области S; h_i – глубина заполнения i-ой жидкостью цилиндрической полости; ρ_{0i} и δ_{0i} – соответственно плотность и толщина i-ой пластинки; $k_{0i}=\rho_{0i}\delta_{0i}$; $\mathrm{P}_i=-\rho_i(\partial\Phi_i/\partial t+gz+Q_i)$ – гидродинамическое давление в i-ой жидкости $(P_0=0)$, $Q_i(t)$ – произвольная функция времени.

Будем исследовать собственные колебания рассматриваемой механической системы (1). Для этого положим

$$\Phi_i = \varphi_i\,(x,y,z)\cos\sigma t, \qquad W_i = w_i\,(x,y)\sin\sigma t. \tag{2}$$

Представим функции φ_i и w_i в виде, аналогичном [4, 5],

$$\begin{cases} \varphi_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_{in}\mathrm{e}^{k_n z} + B_{in}\mathrm{e}^{-k_n z}\right)\ \psi_n(x,y), \\ w_i = \sum\limits_{k=1}^{4} A_{ik}^0 w_{ik}^0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_{in}\psi_n(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\zeta_{in}\psi_n(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\zeta_{in} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{ink}A_{ik}^0 + \tilde{C}_{in}, \quad \alpha_{ink} = \frac{1}{N_n^2}\int\limits_S w_{ik}^0\psi_n ds, \quad N_n^2 = \int\limits_S \psi_n^2 ds,$$

w_{ik}^0 – четыре линейно независимые ограниченные решения однородного уравнения

$$D_i\Delta_2^2 w_{ik}^0 - T_i\Delta_2 w_{ik}^0 + \left(g\Delta\rho_i - k_{oi}\sigma^2\right) w_{ik}^0 = 0 \quad (i=1,2;\ k=\overline{1,4}), \tag{4}$$

$$\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1} \quad (\rho_0 = 0).$$

Собственные функции ψ_n и соответствующие им собственные числа k_n находятся из краевой задачи [6]

$$\begin{cases} \Delta_2\psi_n + k_n^2\psi_n = 0, \quad (x,y)\in S, \\ \partial\psi_n/\partial\nu|_{\gamma_j} = 0 \ \ (j=1,2)\ . \end{cases}$$

Подставив соотношения (2), (3) в систему уравнений (1) и воспользовавшись ортогональностью функций ψ_n на области S, получим

$$\begin{cases} k_n\,(A_{1n} - B_{1n}) = \sigma\zeta_{1n}, \\ k_n\,(A_{2n}\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} - B_{2n}\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}) = \sigma\zeta_{2n}, \\ A_{1n}\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} - B_{1n}\mathrm{e}^{\kappa_{1n}} = A_{2n}\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} - B_{2n}\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}, \\ A_{2n}\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}-\kappa_{2n}} - B_{2n}\mathrm{e}^{\kappa_{1n}+\kappa_{2n}} = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} d_{1n}\tilde{C}_{1n} = \sigma\rho_1\,(A_{1n} + B_{1n})\,, \\ d_{2n}\tilde{C}_{2n} = \sigma\left[(\rho_2 A_{2n} - \rho_1 A_{1n})\ \mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} + (\rho_2 B_{2n} - \rho_1 B_{1n})\ \mathrm{e}^{\kappa_{1n}}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i\right) k_n^2 + \Delta\rho_i g - k_{oi}\sigma^2, \quad \kappa_{in} = k_n\, h_i \quad (i = 1, 2).$

Система уравнений (5) имеет решение

$$A_{1n} = \sigma\,(\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}\zeta_{1n} - \zeta_{2n})\,/(2k_n \operatorname{sh}\kappa_{1n})\,, \quad A_{2n} = \sigma\mathrm{e}^{\kappa_{1n}+\kappa_{2n}}\zeta_{2n}/(2k_n \operatorname{sh}\kappa_{2n}), \tag{7}$$

$$B_{1n} = \sigma\left(\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}\zeta_{1n} - \zeta_{2n}\right)/(2k_n \operatorname{sh}\kappa_{1n})\,, \quad B_{2n} = \sigma\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}-\kappa_{2n}}\zeta_{2n}/(2k_n \operatorname{sh}\kappa_{2n}).$$

Из соотношений (3), (6) и () следуют уравнения для $\tilde{C}_{1n}$ и $\tilde{C}_{2n}$

$$\begin{cases} \tilde{T}_{1n}\tilde{C}_{1n} + b_n\tilde{C}_{2n} = a_{1n}\tilde{A}_{1n} - b_n\tilde{A}_{2n}, \\ b_n\tilde{C}_{1n} + \tilde{T}_{2n}\tilde{C}_{2n} = -b_n\tilde{A}_{1n} + a_{2n}\tilde{A}_{2n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}, \quad \tilde{A}_{in} = \sum\limits_{k=1}^{4}\alpha_{ink}A_{ik}^0, \quad a_{in} = \rho_{i-1}\operatorname{cth}\kappa_{i-1n} + \rho_i\operatorname{cth}\kappa_{in},$ $T_{in} = k_n d_{in}/\sigma^2, \quad b_n = \rho_1/\operatorname{sh}\kappa_{1n}.$

Решение системы (8) следующее:

$$\tilde{C}_{1n} = \frac{1}{\Delta_n}\left[\left(a_{1n}\tilde{T}_{2n} + b_n^2\right)\ \tilde{A}_{1n} - b_n T_{2n}\tilde{A}_{2n}\right] \qquad (1 \to 2). \tag{9}$$

Здесь $\Delta_n = \tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n} - b_n^2$; запись $(1 \to 2)$ означает, что второе соотношение получается из первого циклической перестановкой индексов 1 и 2.

Подставив (9) во второе равенство (3), получим

$$\begin{aligned} w_1 = \sum_{k=1}^{4}[&\left(w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{1n}\tilde{T}_{2n} + b_n^2\right)\alpha_{1nk}\psi_n/\Delta_n\right)A_{1k}^0 - \\ &-\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\tilde{T}_{2n}\alpha_{2nk}\psi_n/\Delta_n\right)\ A_{2k}^0] \quad (1 \to 2). \end{aligned} \tag{10}$$

Неизвестные константы $A_{ik}^0 \quad \left(i = 1, 2;\ k = \overline{1,4}\right)$ и уравнение собственных частот определяются из граничных условий жесткого закрепления пластинок

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{4}\left[\left(B_{1kj} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_{1nk}B_{nj}^*\right)\ A_{1k}^0 - \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_{2nk}B_{nj}^*\right)\ A_{2k}^0\right] = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{4} C_{1kj}A_{1k}^0 = 0 \quad (1 \to 2), \end{cases} \tag{11}$$

где $w^0_{ik}\big|_{\gamma_j} = B_{ikj}$, $\partial w^0_{ik}/\partial\nu\big|_{\gamma_j} = C_{ikj}$, $\psi_n|_{\gamma_j} = B^*_{nj}$, $\beta_{1nk} = (a_{1n}\tilde{T}_{2n}+$ $+b_n^2)\alpha_{1nk}/\Delta_n$ $(1 \to 2)$, $T_{ink} = \tilde{T}_{in} b_n \alpha_{ink}/\Delta_n$.

Из равенства нулю определителя однородной системы (11) получаем уравнение частот

$$\left| \|C_{jk}\|^8_{j,k=1} \right| = 0. \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&C_{jk} = B_{1kj} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1nk} B^*_{nj}, \qquad C_{j,k+4} = -\sum_{n=1}^{\infty} T_{2nk} B^*_{nj},\\
&C_{j+2,k} = C_{1kj}, \qquad C_{j+2,k+4} = 0,\\
&C_{j+4,k} = -\sum_{n=1}^{\infty} T_{1nk} B^*_{nj}, \qquad C_{j+4,k+4} = B_{2kj} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2nk} B^*_{nj},\\
&C_{j+6,k} = 0, \qquad C_{j+6,k+4} = C_{2kj}, \qquad \left(k = \overline{1,4}, \qquad j = 1,2\right).
\end{aligned}$$

2. Частные случаи исходной задачи.

2.1. Упругая двусвязная пластинка находится только на свободной поверхности двухслойной жидкости ($T_2 = 0,\ D_2 = 0,\ k_{02} = 0$). В этом случае $A^0_{2k} = 0$, $\tilde{C}_{2n} = \zeta_{2n}$ и уравнение (12) запишется так

$$\left| \|C_{jk}\|^4_{j,k=1} \right| = 0, \tag{13}$$

где $C_{jk} = B_{1kj} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{1nk} B^*_{nj}$, $C_{j+2,k} = C_{1kj}$ $(j = 1,2;\ k = \overline{1,4})$.

В первом приближении $(n = 1)$ уравнение (13) имеет вид

$$f_1(B_{1kj}, C_{1kj}) \frac{T_{11}\tilde{T}_{21}}{\Delta_1} = 0$$

и содержит корни

$$\sigma_1^2 = \frac{g\rho_1 + (D_1 k_1^2 + T_1) k_1^2}{k_{01}}, \qquad \sigma_2^2 = \frac{g k_1 (\rho_2 - \rho_1)}{a_{21}}$$

уравнений $T_{11} = 0$ и $\tilde{T}_{21} = 0$.

Если предположить, что уравнение $f_1(B_{1kj}, C_{1kj}) = 0$ не имеет корней, то в первом приближении существует только две частоты собственных колебаний двухслойной жидкости с упругой двусвязной пластинкой на свободной поверхности. Первая частота определяется параметрами упругой пластинки и плотностью верхней жидкости и не зависит от глубин заполнения жидкостей и плотности нижней жидкости. Вторая частота определяется частотой колебаний внутренней поверхности при абсолютно жесткой верхней пластинке ($T_1 = \infty$ или $D_1 = \infty$). Следует отметить, что для безынерционной пластинки ($\rho_{01}\delta_{01} = 0$) существует только вторая частота, так как в этом случае коэффициенты $B_{1kj},\ C_{1kj}$ не зависят от σ^2, и в первом приближении других корней нет.

2.2. Упругая двусвязная пластинка находится только на поверхности раздела двухслойной жидкости (случай частичного заполнения верхней жидкости) ($T_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad k_{01} = 0$). Пусть упругая пластинка разделяет жидкости разной плотности. В этом случае $A^0_{1k} = 0, \quad \tilde{C}_{1n} = \zeta_{1n}$ и уравнение (12) запишется следующим образом

$$\left| \|C_{jk}\|^8_{j,k=5} \right| = 0, \tag{14}$$

где $\quad C_{j+4,k+4} = B_{2kj} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{2nk} B^*_{nj}, \quad C_{j+6,k+4} = C_{2kj},\ (j = 1, 2;\ k = \overline{1, 4})$. В первом приближении ($n = 1$) уравнение (14) имеет вид

$$f_2(B_{2kj}, C_{2kj}) \frac{T_{21} \tilde{T}_{11}}{\Delta_1} = 0$$

и содержит корень уравнения $T_{21} = 0$:

$$\sigma^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1) + (D_2 k_1^2 + T_2) k_1^2}{k_{02}}.$$

При естественной стратификации ($\rho_1 \leq \rho_2$) из последнего соотношения следует, что $\sigma^2 > 0$, а при $\rho_1 > \rho_2$, когда более тяжелая жидкость находится выше менее тяжелой, величина σ^2 может быть отрицательной. Для положительности σ^2 необходимо потребовать, чтобы

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{(D_2 k_1^2 + T_2) k_1^2}{g}. \tag{15}$$

Условие (15) не зависит от глубин h_1 и h_2 заполнения жидкостей и массы внутренней пластинки.

Таким образом, при невыполнении условия (15) может произойти потеря устойчивости плоской формы равновесия упругой пластинки, разделяющей жидкости разной плотности.

2.3. Упругая двусвязная пластинка находится только на внутренней поверхности двухслойной жидкости (случай полного заполнения верхней жидкости) ($T_1 = \infty$ или $D_1 = \infty$) . Переходя к пределу в (12) при $T_1 \to \infty$, получим уравнение, аналогичное (14), в котором следует изменить только коэффициент $C_{j+4,\,k+4}$:

$$C_{j+4,\,k+4} = B_{2kj} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n} \alpha_{2nk} B^*_{nj}}{T_{2n}}.$$

2.4. Глубина заполнения верхней жидкости бесконечно большая ($h_1 = \infty$). В этом случае $b_n = 0$, $C_{j,\,k+4} = C_{j+4,\,k} = 0$ и уравнение (12) таково

$$\left| \|C_{jk}\|_{j,k=1}^{4} \right| \left| \|C_{jk}\|_{j,k=5}^{8} \right| = 0.$$

Таким образом, при достаточно большой глубине заполнения верхней жидкости уравнение (12) распадается на два уравнения. Первое описывает собственные частоты колебания упругой пластинки, расположенной на свободной поверхности однородной жидкости с бесконечно большой глубиной заполнения, а второе – колебания упругой пластинки, расположенной на поверхности раздела. В этом случае отсутствует взаимовлияние упругих колебаний двух пластинок.

2.5. Односвязная цилиндрическая полость. Если цилиндрическая полость будет односвязной, то исключается из рассмотрения контур γ_2, в формуле (4) полагается $k = 1, 2$ и частотное уравнение (12) запишется так

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{15} & C_{16} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & 0 \\ C_{51} & C_{52} & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & C_{75} & C_{76} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение совпадает с аналогичным уравнением работы [4].

3. Устойчивость совместных колебаний упругих пластинок и жидкости. Условия устойчивости совместных колебаний рассматриваемой механической системы определяются действительностью корней частотного уравнения (12). Однако, с достаточной для практики точностью, условия устойчивости плоского равновесного положения упругих пластинок, по аналогии с работами [1–3], могут быть найдены из статической постановки задачи. В этом случае краевая задача для статического прогиба i-ой пластинки имеет вид

$$D_i \Delta_2^2 W_i - T_i \Delta_2 W_i + g \Delta\rho_i W_i = 0, \quad W_i|_{\gamma_j} = \left.\frac{\partial W_i}{\partial \nu}\right|_{\gamma_j} = 0, \quad \int\limits_S W_i ds = 0 \qquad (16)$$
$$(i = 1, 2)$$

Если краевая задача (16) кроме нулевого решения имеет ненулевое, то это означает, что плоская форма равновесия упругих пластинок неустойчива.

На примере коаксиальной цилиндрической полости внешнего радиуса a и внутреннего b получим условия устойчивости для первого тона антисимметричного прогиба кольцевых пластинок при отсутствии предварительного натяжения ($T_i = 0$). В этом случае решение краевой задачи (16) в полярной системе координат (r, θ) запишется следующим образом:

$$W_i = [C_1 J_1(p_i\xi) + C_2 I_1(p_i\xi) + C_3 Y_1(p_i\xi) + C_4 K_1(p_i\xi)] \cos\theta.$$

Здесь $J_1(x)$, $Y_1(x)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода первого порядка; $I_1(x)$, $K_1(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода первого порядка; $\xi = r/a$; $p_i^4 = g(\rho_i - \rho_{i-1})a^4/D_i$.

Из граничных условий жесткого закрепления пластинок (второе условие в (16)) следует однородность системы линейных уравнений относительно $C_k \quad (k = \overline{1,4})$. Критическое значение величины p_i, при которой происходит потеря устойчивости плоской формы равновесия i-ой пластинки, определяется из равенства нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} J_1(p_i) & I_1(p_i) & Y_1(p_i) & K_1(p_i) \\ J_1'(p_i) & I_1'(p_i) & Y_1'(p_i) & K_1'(p_i) \\ J_1(\varepsilon p_i) & I_1(\varepsilon p_i) & Y_1(\varepsilon p_i) & K_1(\varepsilon p_i) \\ J_1'(\varepsilon p_i) & I_1'(\varepsilon p_i) & Y_1'(\varepsilon p_i) & K_1'(\varepsilon p_i) \end{vmatrix} = 0, \qquad (17)$$

где

$$\varepsilon = b/a.$$

Обозначая через p первый положительный корень уравнения (17) относительно неизвестного критического значения p_i, запишем условие устойчивости плоского равновесного положения упругих пластинок

$$\beta_i > -n_x \Delta\tilde{\rho}_i p^{-4}. \qquad (18)$$

Здесь

$$\beta_i = D_i/(g_0 \rho_i a^4), \quad g = g_0 n_x, \quad \Delta\tilde{\rho}_i = \Delta\rho_i/\rho_i = 1 - \rho_{i-1}/\rho_i \quad (i = 1, 2),$$

n_x – величина перегрузки.

Из неравенства (18) следует, что потеря устойчивости верхней пластинки ($i = 1, \quad \Delta\tilde{\rho}_1 = 1$) возможна только при отрицательной перегрузке n_x, а потеря устойчивости внутренней пластинки ($i = 2, \quad \Delta\tilde{\rho}_2 = 1 - \rho_2/\rho_1$) – и при положительной перегрузке n_x при условии, что $\rho_2 < \rho_1$. Это находится в хорошем соответствии с аналитическими и численными исследованиями частотного уравнения (12).

Таблица

ε	10^{-7}	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.9
$10^{-5}p^{-4}$	210.73	119.60	76.75	45.96	25.20	12.28	5.07	1.61	0.02

В таблице приведены значения p^{-4} в зависимости от величины ε. Из нее следует, что с увеличением внутреннего радиуса кольцевой пластинки ($\varepsilon \to 1$) правая часть неравенства (18) стремится к нулю, что соответствует “повышению” устойчивости.

В работе [1] были проведены аналогичные исследования для кольцевых мембран. Из сравнения величин, приведенных в настоящей таблице и в таблице работы [1], можно заключить, что они отличаются на 3–4 порядка. Таким образом, использование упругих пластинок идет в запас устойчивости и существенно ее повышает.

1. *Шевченко В.П., Карнаух А.Ю.* Об устойчивости положения равновесия кольцевой мембраны, разделяющей жидкость разной плотности // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2007. – **14**. – С. 198–201.
2. *Шевченко В.П., Карнаух А.Ю.* Свободные колебания кольцевой мембраны, разделяющей жидкость разной плотности // Тр. X Междунар. конф. "Современные проблемы механики сплошной среды". – Ростов-на-Дону, 2006. – Т. 2. – С. 308–310.
3. *Шевченко В.П., Карнаух А.Ю.* Влияние перегрузки на свободные колебания кольцевой мебраны, расположенной на свободной поверхности жидкости // Вест. Донецк. ун-та. Сер. А. – 2006.– Вып.1, ч.1. – С. 162–165.
4. *Кононов Ю.Н., Шевченко В.П.* Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную жидкость // Там же. – 2005.– Вып.1, ч.1. – С. 127–130.
5. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. - М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
6. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. - М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.

Национальный ун-т, Донецк, Украина
aliftinaa@gmail.com

Получено 13.09.07