

УДК 531.38

©2008. И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛ КОНФИГУРАЦИИ “ВОСЬМЕРКА”

Рассмотрена замкнутая система n гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Эта система может служить конечномерной моделью упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости во все время движения. Для системы, описывающей конфигурацию типа “восьмерки”, состоящей из четырех, шести и восьми тел, найдены положения равновесия и определены значения геометрических параметров, при которых эти положения устойчивы.

Введение. Использование системы n твердых тел, связанных упругими шарнирами, для моделирования колебаний балочных конструкций (систем с малым прогибом) оказалось весьма эффективным при изучении устойчивости их малых колебаний [1, 2]. Как установлено в работах [3, 4], конечномерные системы можно использовать и для моделирования движения стержневых систем, допускающих прогибы значительной величины. Выражение для упругого момента в этом случае получено в работе [4].

Особый интерес к изучению стержневых систем появился в последние годы в связи с активным использованием их в качестве моделей третичной структуры молекул ДНК. Эти молекулы могут иметь как незамкнутую, так и замкнутую форму, однако, как отмечено в [5], “геномные ДНК многих бактерий и прекариот имеют кольцевую структуру”, и поэтому именно замкнутые системы являются объектом исследования многих ученых. В этой связи, к примеру, можно отметить работы [5–9].

Для замкнутых стержневых систем были найдены различные формы равновесия оси, такие как “круговая” [5–7], “восьмерка” и “роза” [8, 9]. Конечномерные аналоги таких конфигураций были найдены в работах [3, 4, 10], при этом решения уравнений равновесия системы были выписаны в элементарных функциях. Следующим шагом при изучении поведения систем в окрестности найденных решений является установление и изучение условий устойчивости найденных положений равновесия.

В настоящей работе получены достаточные условия устойчивости формы оси стержня для конфигурации типа “восьмерки” в случае, когда ось стержня остается в одной плоскости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую систему n гироскопов Лагранжа, связанных упругими цилиндрическими шарнирами. Полагаем, что шарниры расположены в точках O_j пересечения осей симметрии тел S_j , оси симметрии $O_j O_{j+1} = h_j$ лежат в одной плоскости OXY , а оси шарниров перпендикулярны этой плоскости. Как установлено в [4], упругий момент в шарнире равен $L_j = k^2 \sin(\psi_j - \psi_{j-1})$. При малой разности углов ψ_j и ψ_{j-1}

будем считать этот момент равным

$$L_j = k^2(\psi_j - \psi_{j-1}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $k^2 = c^2/(2h)$, c^2 – изгибная жесткость, $h = \min_j h_j$, ψ_j – угол поворота тела S_j вокруг оси j -го шарнира, угол ψ_0 определяется из условий закрепления точки O_1 , и в случае замкнутых систем ($O_1 = O_{n+1}$), как и в [3, 4], считаем $\psi_0 = \psi_n$.

Введенная конечномерная система позволяет нам моделировать колебание упругого стержня, ось которого расположена в одной плоскости во все время движения.

Как и в [3, 4], полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, тогда из (1) следует, что потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \frac{k^2}{2} \sum_{j=1}^n (\psi_j - \psi_{j-1})^2. \quad (2)$$

Для замкнутых систем имеем

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{h}_j = \sum_{j=1}^n h_j \mathbf{e}_j^x = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{e}_j^x – единичный орт оси $O_j O_{j+1}$, составляющий угол ψ_j с осью OX . Тогда $\mathbf{e}_j^x = \cos \psi_j \mathbf{e}^x + \sin \psi_j \mathbf{e}^y$ (здесь $\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y$ соответственно орты осей OX и OY) и из (3) получаем два скалярных соотношения, которым должны удовлетворять углы ψ_j :

$$f_1 = \sum_{j=1}^n h_j \cos \psi_j = 0, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n h_j \sin \psi_j = 0. \quad (4)$$

Как известно [11, 12], для систем с дополнительными нелинейными связями, наложенными на переменные, положения равновесия находятся из условия

$$\delta L = \delta \Pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0, \quad (5)$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа. Из (2), (4), (5) получаем систему уравнений

$$k^2(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) = h_j(\lambda_1 \cos \psi_j - \lambda_2 \sin \psi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad \psi_{n+1} = \psi_1, \quad (6)$$

которая вместе с (4) позволяет определить как неизвестные углы ψ_j , так и множители Лагранжа λ_1, λ_2 . Система уравнений (6) совпадает с полученной ранее в работе [4] при условии малости разности углов ψ_j, ψ_{j-1} . При этом в [4] роль множителей Лагранжа λ_1, λ_2 играют реакции связи в шарнирных сочленениях, найденные с учетом замкнутости системы.

В [3] было установлено, что в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \psi_j = 2\pi j/n + \alpha_j, h_j = h$ равновесная форма является конечномерной моделью круговой конфигурации оси стержня.

Для конечномерной системы, описывающей конфигурацию оси типа “восьмерки”, явный вид решения для конкретного числа тел в системе был получен в [4]. Далее будем называть эту систему “восьмеркой”. Для таких систем полагалось, что они содержат четное число тел ($n = 2N$), и, кроме того, системы считались симметричными относительно оси OX . При этих предположениях доказано [4], что имеют место соотношения

$$\psi_{N+l} = \pi - \psi_l, \quad h_{N+l} = h_l \quad (l = \overline{1, N}), \quad \lambda_2 = 0. \quad (7)$$

Как установлено в [4, 13], одинаковые конечномерные конфигурации могут быть реализованы при различном числе тел в системе в зависимости от наличия или отсутствия шарнира в точке O пересечения осей симметрии тел. Так, на рис. 1 при отсутствии шарнира система содержит четыре тела, а при наличии – шесть. На рис. 2 соответственно имеем шесть либо восемь тел.

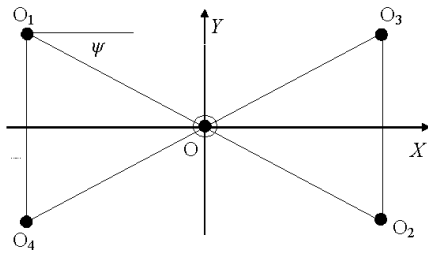


Рис. 1. Четыре тела.

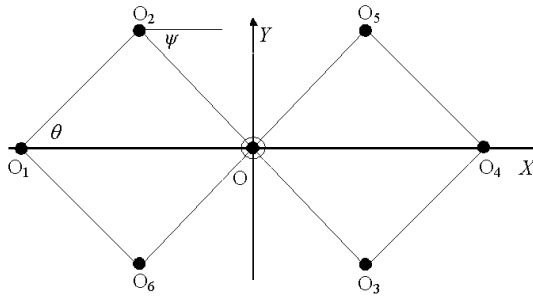


Рис. 2. Шесть и восемь тел.

2. Частные случаи “восьмерки”. Рассмотрим системы, изображенные на рис. 1. Как отмечалось выше, это могут быть системы, состоящие из четырех либо шести тел. Тогда, обозначая через ψ_k^0 ($k = \overline{1, 2N}$) стационарное решение системы (6), найденное с учетом (4), $\mu = \lambda_1/k^2$, $H_1 = O_1O_2$ (в случае четырех тел $H_1 = h_1$, а в случае шести $H_1 = h_1/2$) и, учитывая (7), имеем решение для случая четырех тел

$$\psi_1^0 = -\psi, \quad \psi_2^0 = \psi_4^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_3^0 = \pi + \psi \quad (8)$$

и для шести тел

$$\psi_1^0 = \psi_2^0 = -\psi, \quad \psi_3^0 = \psi_6^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_4^0 = \psi_5^0 = \pi + \psi; \quad (9)$$

здесь $\sin \psi = h_2/H_1$. При этом в обоих случаях

$$\mu = \frac{\pi + 2\psi}{H_1 \cos \psi} > 0. \quad (10)$$

Очевидно, что решение существует при условии $h_2/H_1 < 1$.

Следующая конфигурация, изображенная на рис. 2, может быть представлена либо шестью, либо восемью телами. Тогда решения уравнений равновесия (6) с учетом (4) и (7) будут следующими. Для шести тел

$$\psi_1^0 = \psi_3^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = -\psi, \quad \psi_4^0 = \psi_6^0 = \pi - \theta, \quad \psi_5^0 = \pi + \psi, \quad (11)$$

а для восьми –

$$\psi_1^0 = \psi_4^0 = \theta, \quad \psi_2^0 = \psi_3^0 = -\psi, \quad \psi_5^0 = \psi_8^0 = \pi - \theta, \quad \psi_6^0 = \psi_7^0 = \pi + \psi. \quad (12)$$

Оба эти решения реализуются, когда сила реакции связи равна

$$\mu = \frac{2(\theta + \psi)}{H_2 \cos \psi}, \quad (13)$$

где $H_2 = O_2O_3$, а углы ψ и θ удовлетворяют соотношению

$$(\theta + \psi) \operatorname{tg} \psi = (\pi - 3\theta - \psi) \operatorname{tg} \theta. \quad (14)$$

Поскольку углы ψ и θ острые, это соотношение выполняется при условии $\pi - 3\theta - \psi > 0$, которое реализуется в области $0 < \psi < \pi/2$, $0 < \theta < \pi/3$. Из (14) можно найти значения ψ и θ , при которых решения (11) и (12) существуют. Численное решение этого уравнения представлено на рис. 3. Отметим, что для равных углов из (14) следует $\psi = \theta = \pi/6$.

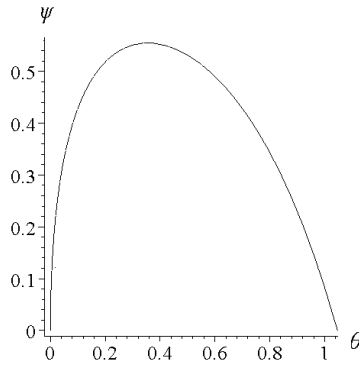


Рис. 3. Область существования решений (11), (12).

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4] проведен полный анализ условий существования решения (11) для случая, в котором учтена нелинейность упругого момента. В явном виде найдены значения углов θ и ψ в зависимости от параметра $a = h_1/H_2$:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}}, \quad \sin \psi = 2a \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}},$$

где $p = -2a + 1 + \sqrt{1 - 4a}$. Решения существуют в области $a \in (0; (\sqrt{2} - 1)/2)$.

Поскольку решение (12) реализуется при тех же условиях, что и (11), то этот анализ может быть перенесен и на случай восьми тел в системе.

3. Исследование устойчивости положения равновесия “восьмерка”. Известно, что положение изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями является устойчивым при минимуме потенциальной энергии системы. Однако, если эти связи нелинейны, можно, как и в [11, 12], воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа и находить минимум функции $L = \Pi + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, в которой множители λ_1, λ_2 найдены из условий стационарности функции L .

Замечание. В [3] установлено, что в случае круговой оси $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда $L = \Pi$ и из вида потенциальной энергии (2) следует ее положительная определенность по разности углов ψ_j, ψ_{j-1} и, следовательно, устойчивость по этим переменным [14], что как раз и свидетельствует об устойчивости формы рассматриваемой замкнутой конфигурации.

В случае “восьмерки”, как было отмечено выше, имеем лишь $\lambda_2 = 0$ и условия устойчивости положения равновесия будут выполнены в области [15]

$$\delta^2 L = \delta^2 \Pi + \lambda_1 \delta^2 f_1 > 0, \quad \delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0. \quad (15)$$

Полагая в возмущенном движении $\psi_j = \psi_j^0 + \xi_j$, из (4) получаем

$$\sum_{j=1}^n h_j \xi_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{j=1}^n h_j \xi_j \cos \psi_j + \dots = 0. \quad (16)$$

Здесь многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по переменной ξ_j .

Введем новые переменные $X_j = \xi_j - \xi_{j-1}$. Тогда, учитывая (4) и полагая $\xi_0 = \xi_n$, имеем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^j X_i + \xi_n, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0. \quad (17)$$

Из (16), (17) получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \sin \psi_j^0 + \dots = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} X_i \sum_{j=i}^{n-1} h_j \cos \psi_j^0 + \dots = 0. \quad (18)$$

Подстановка (17), (18) в (15) дает возможность представить функцию $\delta^2 L$ в виде

$$\delta^2 L = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[X_k^2 - h_k \mu \sin \psi_k^0 \left(\sum_{j=1}^k X_j \right)^2 \right] + \left(\sum_{k=1}^{n-1} X_k \right)^2 \right\}. \quad (19)$$

Для нахождения области выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия системы необходимо определить область положительной определенности квадратичной формы (19), из которой исключены две переменные согласно (18).

4. Случай четырех тел. В случае, когда система состоит из четырех тел (см. рис. 1), решение имеет вид (8), а μ определено формулой (10). Подстановка (8) в (18) дает $X_2 = -X_3 = X_1$.

Тогда из (19) получаем $\delta^2 L = X_1^2(2 - \mu h_2)$ и функция L положительна определена по переменной X_1 при условии $\mu h_2 < 2$. Подставляя сюда значение μ из (10) и учитывая, что $h_2 = h_1 \sin \psi$, получаем неравенство, позволяющее определить область определения параметра ψ , определяющего геометрию системы, в которой выполнены достаточные условия устойчивости положения равновесия в случае четырех тел

$$\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \operatorname{tg} \psi < 1, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

5. Случай шести тел с шарниром в точке O . Рассмотрим теперь ту же геометрическую конфигурацию, что и в предыдущем случае (см. рис. 1), однако теперь уже будем считать, что в точке O имеется шарнирное соединение. Тогда решение имеет вид (9), а μ по-прежнему определяется формулой (10). Подстановка (9) в (18) дает $X_3 = X_1$, $X_5 = -2X_1 - X_2 - 2X_4$, и после исключения переменных X_3 , X_5 из (18) находим

$$\delta^2 L = (3 - \Lambda)X_1^2 + X_2^2 + (3 + 2\Lambda)X_4^2, \quad (21)$$

где $\Lambda = (\pi + 2\psi) \operatorname{tg} \psi$.

Используя критерий Сильвестра для определения области положительной определенности функции (21), получаем следующие неравенства:

$$\Lambda < 1.5, \quad \Lambda < \sqrt{2}, \quad 2\Lambda^2 + 2\Lambda - 1 < 0,$$

из которых заключаем, что квадратичная форма (21) положительно определена, а, следовательно, выполнены достаточные условия устойчивости положения равновесия (9) в области

$$(\pi + 2\psi) \operatorname{tg} \psi < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Из (20), (22) следует, что область выполнения достаточных условий устойчивости положения равновесия сужается в случае, когда в точке O имеется дополнительный шарнир.

6. Случай шести тел без шарнира в точке O . Изучим устойчивость решения (11). Соответствующая ему геометрическая конфигурация изображена на рис. 2. Это решение зависит уже от двух углов ψ и θ , удовлетворяющих соотношению (14).

Подстановка (11) в (18) с учетом (4) позволяет определить X_5 и X_4 следующим образом:

$$\begin{aligned} X_5 &= -\frac{1}{a_1 + 2} [(a_1 + 2)X_1 + 2(a_1 + 1)X_2 - a_1X_3], \\ X_4 &= -\frac{1}{a_1 + 2} [(a_1 + 2)X_1 + 2a_1X_2 - 2a_1X_3], \end{aligned} \quad (23)$$

где $a_1 = 2 \operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} \psi > 0$.

Из (19) и (23) получаем

$$\begin{aligned} \delta^2 L &= \frac{1}{(a_1 + 2)^2} \{ (a_1 + 2)^2 (4 - x) X_1^2 + [a_1 x (3a_1 + 4) - 2(5a_1^2 + 6a_1 + 4)] X_2^2 + \\ &+ [a_1^2 x - 2(3a_1^2 + 2a_1 + 4)] X_3^2 + (a_1 + 2) [x(3a_1 + 2) - 2(5a_1 + 2)] X_1 X_2 + \\ &+ (a_1 + 2) [x(a_1 - 2) - 2(3a_1 - 2)] X_1 X_3 + 2[x(a_1^2 - 2a_1 - 4) - 6a_1^2] X_2 X_3 \}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $x = 2h_1 \sin \theta \mu > 0$. Подставляя сюда значение μ из (13) и учитывая соотношение $2h_1 \sin \theta - H_2 \sin \psi = 0$, полученное из условий замкнутости (4), находим

$$x = 2(\theta + \psi) \operatorname{tg} \psi > 0. \quad (25)$$

Записывая критерий Сильвестра для квадратичной формы (24), получим следующие условия ее положительной определенности:

$$\begin{aligned} [(a_1^2 - 4)x - 2(3a_1^2 + 4a_1 + 4)](x - 2)(x - 6) &< 0, \\ x - 4 &< 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$(3a_1 - 2)(a_1 + 2)x^2 - 4(7a_1^2 + 12a_1 + 4)x + 2(30a_1^2 + 56a_1 + 56) > 0.$$

Из (26) заключаем, что на интервале $x \in (0, 4)$ должно быть выполнено неравенство

$$[(a_1^2 - 4)x - 2(3a_1^2 + 4a_1 + 4)](x - 2) > 0 \quad (27)$$

и последнее из неравенств (26).

Поскольку выражение $(3a_1^2 + 4a_1 + 4)/(a_1^2 - 4) > 3$, при $a_1 > 2$ и выражение в квадратной скобке в неравенстве (27) меньше нуля при $a_1 \leq 2$, то на заданном интервале неравенство (27) выполнено при условии $0 < x < 2$. Нетрудно убедиться, что при этом условии выполнены все неравенства (26). Тогда, учитывая (25), получаем условие устойчивости положения равновесия (11) в виде

$$(\theta + \psi) \operatorname{tg} \psi < 1. \quad (28)$$

Поскольку в нашем случае $\theta < \pi/2$, то из (20), (28) заключаем, что из устойчивости формы при $n = 4$ (см. рис. 1) следует и устойчивость формы при $n = 6$ (см. рис. 2) при соответствующем выборе угла ψ .

7. Случай восьми тел с шарниром в точке O . Пусть теперь “восьмерка”, изображенная на рис. 2, состоит из восьми тел. Тогда решение имеет вид (12). Его подстановка в (18) позволяет определить X_5 и X_7 . Имеем

$$X_5 = \frac{1}{b_2 + 1} [-(b_2 + 1)X_1 - 2b_2X_2 + 2b_2X_4],$$

$$X_7 = -\frac{1}{b_2 + 1} [2(b_2 + 1)X_1 + 2(2b_2 + 1)X_2 + (b_2 + 1)X_3 - 2b_2X_4 + 2(b_2 + 1)X_6], \quad (29)$$

где $b_2 = \operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} \psi$.

Подставляя (29) в (19), получим

$$\begin{aligned} \delta^2 L = & 3X_1 + \frac{1}{(b_2 + 1)^2} [(b_2 + 1)x + 11b_2^2 + 10b_2 + 3]X_2^2 + X_3^2 + \\ & + \frac{1}{(b_2 + 1)^2} (5b_2^2 + 2b_2 + 1)X_4^2 + \frac{1}{b_2 + 1} [x + 3(b_2 + 1)^2]X_6^2 + \\ & + \frac{1}{b_2 + 1} \{ [x + 2(5b_2 + 10)]X_2 + 2(b_2 + 1)X_3 + 2[x + 2(b_2 + 1)]X_6 \} X_1 + \quad (30) \\ & + \frac{1}{(b_2 + 1)^2} \{ 2x(b_2 + 1)(2b_2 + 1)X_3 + [2x(b_2 + 1) + 13b_2^2 + 6b_2 + 1]X_4 + \\ & + [2(2b_2 + 1)x + 9b_2^2 + 14b_2 + 5]X_6 \} X_2 + \frac{1}{b_2 + 1} \{ -(x + 2b_2)X_4 + \\ & + [x + 2(b_2 + 1)]X_6 \} X_3 + \frac{1}{(b_2 + 1)^2} (2b_2x + 5b_2^2 + 6b_2 + 1)X_4X_6, \end{aligned}$$

где $x = h_1\mu(b_2 + 1) \sin \theta$. Условия положительной определенности этой формы следуют из критерия Сильвестра. Они могут быть представлены в виде:

$$F_1 = x^2 + 4(b_2 - 1)x - 4(5b_2^2 + 6b_2 + 3) < 0,$$

$$F_2 = x^2 + 4(2b_2 - 1)x - 4(8b_2^2 + 10b_2 + 5) < 0,$$

$$F_3 = [(b_2 - 1) - 3b_2^2 - 2b_2 - 1][x^2 + 2(b_2 + 1)x - 2(b_2 + 1)^2][x^2 - 8(b_2 + 1)^2] < 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} F_4 = & x^4 + 4(2b_2 - 1)x^3 - 4(5b_2^2 + 8b_2 + 4)x^2 - 16b_2(4b_2 + 3)(b_2 + 1)x + \\ & + 8(11b_2^2 + 10b_2 + 5)(b_2 + 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь b_2 определено в (29) и оно всегда больше нуля.

Первое неравенство (31) выполнено в области $x \in (0, x_1)$, а второе – в области $x \in (0, x_2)$, где

$$x_1 = 2(1 - b_2 + \sqrt{6b_2^2 + 4b_2 + 4}), \quad x_2 = 2(1 - 2b_2 + \sqrt{12b_2^2 + 6b_2 + 6}),$$

и поскольку $x_1 < x_2$, то оба эти неравенства выполнены на интервале

$$x \in (0, x_1). \quad (32)$$

Решение третьего неравенства имеет вид

$$0 < b_2 \leq 1, \quad x \in (0, x_3^{(1)}) \cup (x_3^{(2)}, \infty); \quad b_2 > 1, \quad x \in (0, x_3^{(1)}) \cup (x_3^{(2)}, x_3^{(3)}), \quad (33)$$

где $x_3^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) – положительные корни уравнения $F_i = 0$, равные

$$x_3^{(1)} = (\sqrt{3} - 1)(b_2 + 1), \quad x_3^{(2)} = 2\sqrt{2}(b_2 + 1), \quad x_3^{(3)} = \frac{3b_2^2 + 2b_2 + 1}{b_2 - 1}$$

(положительный корень $x_3^{(3)}$ существует лишь при условии $b_2 > 1$).

Учитывая далее, что $x_3^{(1)} < x_3^{(2)} < x_1 < x_3^{(3)}$, из (32), (33) получаем, что первые три неравенства выполнены в области

$$x \in (0, x_3^{(1)}) \cup (x_3^{(2)}, x_1). \quad (34)$$

Проведем анализ последнего неравенства (31). Поскольку многочлен F_4 имеет две переменные знака коэффициентов, то он имеет не более двух положительных корней. Кроме того, учитывая, что

$$F_4(x_3^{(1)}) > 0, \quad F_4(x_3^{(2)}) < 0, \quad F_4(x_1) < 0, \quad F_4(\infty) > 0,$$

получаем, что эти корни, которые мы обозначим $x_4^{(1)}, x_4^{(2)}$ ($x_4^{(1)} < x_4^{(2)}$), расположены на промежутках

$$x_4^{(1)} \in (x_3^{(1)}, x_3^{(2)}), \quad x_4^{(2)} \in (x_1, \infty). \quad (35)$$

Тогда неравенство $F_4 > 0$ выполнено в области

$$x \in (0, x_4^{(1)}) \cup (x_4^{(2)}, \infty). \quad (36)$$

Окончательно из (34)–(36) вытекает, что система неравенств (30) выполнена на интервале $x \in (0, x_3^{(1)})$. Подставляя сюда x из (30) и $x_3^{(1)}$ из (33), получаем, что достаточные условия устойчивости рассматриваемого положения равновесия выполнены при условии

$$(\theta + \psi) \operatorname{tg} \psi < \sqrt{3} - 1. \quad (37)$$

Из (28), (37) следует, что введение шарнира в точку O сужает область выполнения достаточных условий устойчивости. Такой же эффект был отмечен и при изучении положения равновесия для систем, изображенных на рис. 1. Кроме того, учитывая, что $\theta < \pi/2$, из (28), (37) получаем, что для значений ψ , при которых устойчива форма при $n = 6$ (см. рис. 1), следует устойчивость и формы при $n = 8$ (см. рис. 2). Поскольку, как отмечено в п. 5, это свойство имеет место и для случаев четырех и шести тел, то можно заключить, что для значений ψ , при которых устойчива конфигурация, изображенная на рис. 1, следует и устойчивость конфигурации, изображенной на рис. 2.

1. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. Думка, 1991. – 166 с.
2. Bolgrabskaya I.A. Stability of permanent rotations of interconnected rigid bodies system with small asymmetry // *Multibody System Dynamics*. – 2001. – **6**. – P. 59–72.
3. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // *Механика твердого тела*. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
4. Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н. Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
5. Бенкэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
6. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // *Physica*. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
7. Starostin E.I. Three-dimensional shapes of looped DNA // *Meccanica* **31**. – 1996. – **3**. – P. 235–271.
8. Starostin E.I. Equilibrium configurations of a thin elastic rod with self contacts // *Proc. Appl. Math. Mech.* – 2002. – **1**. – P. 137–138.
9. Starostin E.I. Symmetric equilibria of a thin elastic rod with self contacts // *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, – 2004. – **362**. – P. 1317–1334.
10. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // *Механика твердого тела*. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
11. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
12. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.: Наука, 1968. – 304 с.
13. Bolgrabskaya I.A., Savchenko A.Ya., Shchepin N.N. Stability of two-dimensional equilibrium positions of closed-loop systems // Тез. докл. 10 междунар. конф. “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” (5–10 июня 2008, Донецк). – Донецк, 2008. – С. 110–111.
14. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
15. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1976. – 534 с.