УДК 531.38

©2008. **М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева**

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

Уравнения движения двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным сферическим шарниром, содержат потенциальную энергию упругого элемента в виде произвольной дифференцируемой функции угла между осями динамической симметрии тел. Произвол в выборе потенциальной энергии перенесен на переменную ξ, специальный выбор которой позволил построить два новых решения задачи.

В монографии [1] приведены шесть различных форм уравнений движения по инерции двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным сферическим шарниром. Четвертая форма уравнений движения [1] $(5.60)_*$ имеет вид

$$\lambda' - \mu\xi \mathrm{ctg}^2\tau = \Lambda(\tau,\xi), \tag{1}$$

$$\mu' + \lambda\xi \mathrm{tg}^2\tau = \mathrm{M}(\tau,\xi), \tag{2}$$

где

$$\Lambda(\tau,\xi) = \{(A+N)n_0 - (A_0+N)n - [(A+N)n_0 + (A_0+N)n]\xi\}\frac{\cos\tau}{H},$$

$$\mathrm{M}(\tau,\xi) = \{(A-N)n_0 + (A_0-N)n - [(A-N)n_0 - (A_0-N)n]\xi\}\frac{\sin\tau}{H}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по τ).

Новые переменные λ, μ связаны с переменными ω_2, Ω_2 соотношениями $[1, (5.58)_*]$:

$$\omega_2 = (\lambda\sin\tau - \mu\cos\tau)/\sin 2\tau, \tag{3}$$

$$\Omega_2 = (\lambda\sin\tau + \mu\cos\tau)/\sin 2\tau. \tag{4}$$

На основе уравнений (1), (2) при ξ, равных 0, 1 и $\dfrac{1}{\sin\tau\cos\tau}$, в [1, с. 161–167] получено три точных решения. Оказывается, четвертую форму уравнений можно использовать и для построения других точных решений. Для этого преобразуем систему (1), (2) к одному неоднородному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\lambda'' + [2(\mathrm{tg}\tau + \mathrm{ctg}\tau) - \xi'/\xi]\lambda' + \xi^2\lambda = f(\tau,\xi,\xi'), \tag{5}$$

[1] При ссылке на формулы монографии [1] будем снабжать их номера звездочкой.

где

$$f(\tau,\xi,\xi') = \mathrm{M}(\tau,\xi)\xi\mathrm{ctg}^2\tau + \Lambda(\tau,\xi)[2(\mathrm{tg}\tau + \mathrm{ctg}\tau) - \xi'/\xi] + \Lambda'(\tau,\xi). \quad (6)$$

Запишем соответствующее однородное уравнение

$$\lambda' + [2(\mathrm{tg}\tau + \mathrm{ctg}\tau) - \xi'/\xi]\lambda' + \xi^2\lambda = 0. \quad (7)$$

Если, задавая определенным образом ξ, сможем найти соответствующее ему какое-либо частное решение $\lambda_1(\tau)$, то второе линейно независимое частное решение найдем по формуле Лиувилля

$$\lambda_2(\tau) = \lambda_1(\tau)\int \frac{W(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)}d\tau, \quad (8)$$

где $W(\tau)$ – определитель Вронского

$$W(\tau) = e^{-\int[2(\mathrm{tg}\tau+\mathrm{ctg}\tau)-\xi'/\xi]d\tau}. \quad (9)$$

Выполнив интегрирование в (9), находим

$$W(\tau) = \xi(\tau)\mathrm{ctg}^2\tau. \quad (10)$$

Зная систему фундаментальных решений $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)$, общее решение неоднородного уравнения (5) определим в виде

$$\lambda(\tau) = C_1\lambda_1(\tau) + C_2\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)\int \frac{\lambda_2(\tau)f_*(\tau)}{W(\tau)}d\tau + \lambda_2(\tau)\int \frac{\lambda_1(\tau)f_*(\tau)}{W(\tau)}d\tau, \quad (11)$$

где $f_*(\tau)$ – функция, соответствующая выбранному значению $\xi(\tau)$ после подстановки его в (6).

Выбирая $\xi = -\dfrac{4\sin\tau\cos\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau}$ или $\xi = \dfrac{1}{\sin\tau}$, можно построить два новых решения.

Первое решение. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi = -\frac{4\sin\tau\cos\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau}. \quad (12)$$

При этом уравнение (7) допускает частное решение

$$\lambda_1(\tau) = \frac{C_*}{1 + \mathrm{tg}^4\tau}. \quad (13)$$

Определитель Вронского находим из (10) с учетом (12)

$$W(\tau) = -\frac{4(1 + \mathrm{tg}^2\tau)}{\mathrm{tg}\tau(1 + \mathrm{tg}^4\tau)}. \quad (14)$$

Подставив найденные значения (13), (14) в (8), получим второе частное решение
$$\lambda_2(\tau) = -\frac{1}{1+\mathrm{tg}^4\tau}\bigl[\ln(\mathrm{tg}^4\tau)+\mathrm{tg}^4\tau\bigr].$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид
$$\lambda(\tau) = \frac{C_1}{1+\mathrm{tg}^4\tau} - \frac{C_2\bigl[\ln(\mathrm{tg}^4\tau)+\mathrm{tg}^4\tau\bigr]}{1+\mathrm{tg}^4\tau}.$$

В дальнейшем будем считать циклические постоянные нулевыми, а также постоянную интегрирования C_2 обратим в нуль:
$$n = n_0 = 0, \qquad C_2 = 0, \tag{15}$$
т. е. будем изучать частное решение, соответствующее
$$\lambda(\tau) = \frac{C_* \cos^4\tau}{\sin^4\tau+\cos^4\tau} \tag{16}$$
(учет ненулевых значений циклических постоянных приводит к громоздким выражениям для всех переменных задачи).

Переменную μ определим из (1) с учетом условия (15) и выражений (12), (16) в виде
$$\mu(\tau) = \frac{C_* \sin^4\tau}{\sin^4\tau+\cos^4\tau}. \tag{17}$$

Подставив (16), (17) в соотношения (3), (4), получим
$$\omega_2(\tau) = \frac{C_*(\cos^3\tau-\sin^3\tau)}{2(\sin^4\tau+\cos^4\tau)}, \tag{18}$$
$$\Omega_2(\tau) = \frac{C_*(\cos^3\tau+\sin^3\tau)}{2(\sin^4\tau+\cos^4\tau)}. \tag{19}$$

Теперь из конечных соотношений $(5.61)_*$
$$\omega_3(\tau) = 2(\lambda\sin^3\tau+\mu\cos^3\tau)\big/\sin^2 2\tau, \tag{20}$$
$$\Omega_3(\tau) = 2(-\lambda\sin^3\tau+\mu\cos^3\tau)\big/\sin^2 2\tau \tag{21}$$
находим
$$\omega_3(\tau) = \frac{C_*(\cos\tau+\sin\tau)\cos\tau\sin\tau}{2(\sin^4\tau+\cos^4\tau)}, \tag{22}$$
$$\Omega_3(\tau) = \frac{C_*(-\cos\tau+\sin\tau)\cos\tau\sin\tau}{2(\sin^4\tau+\cos^4\tau)}. \tag{23}$$

Запишем формулы $(5.57)_*$

$$\omega_1 = (\xi+1)\varkappa, \qquad \Omega_1 = (\xi-1)\varkappa. \tag{24}$$

Подставив в них (12), определим

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau) &= -\frac{\sin^2 2\tau + 4\sin 2\tau - 2}{2-\sin^2 2\tau}\varkappa(\tau), \\ \Omega_1(\tau) &= \frac{-2-4\sin 2\tau + \sin^2 2\tau}{2-\sin^2 2\tau}\varkappa(\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Для нахождения $\varkappa(\tau)$ воспользуемся интегралом $(5.18)_*$

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} G_1(\tau) = (A - N\cos 2\tau)\omega_1(\tau) + (A_0 - N\cos 2\tau)\Omega_1(\tau), \\ G_2(\tau) = (A - N\cos 2\tau)\omega_2(\tau) + (A_0\cos 2\tau - N)\Omega_2(\tau) - n_0\sin 2\tau, \\ G_3(\tau) = [A_0\Omega_2(\tau) - N\omega_2(\tau)]\sin 2\tau + n + n_0\cos 2\tau. \end{gathered} \tag{27}$$

Отметим, что $G_2^2 + G_3^2$ можно представить в виде

$$G_2^2 + G_3^2 = -H(\omega_2^2 + \Omega_2^2 - 2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau) +$$

$$+(A + A_0 - 2N\cos 2\tau)(A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2), \ H = AA_0 - N^2 > 0. \tag{28}$$

Вследствие (18), (19) имеем

$$\omega_2^2 + \Omega_2^2 - 2\Omega_2\omega_2\cos 2\tau = \frac{C_*^2\sin^2\tau\cos^2\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau},$$

$$A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\omega_2\Omega_2 = \frac{C_*^2}{4(\sin^4\tau + \cos^4\tau)^2}(A + A_0 + 2N)\sin^6\tau +$$

$$+\frac{C_*^2}{4(\sin^4\tau + \cos^4\tau)^2}\big[(A + A_0 - 2N)\cos^6\tau - 2(A - A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau)\big]. \tag{29}$$

Подставив эти выражения в (28), находим

$$G_2^2 + G_3^2 = \frac{-HC_*^2\cos^2\tau\sin^2\tau}{\sin^4\tau + \cos^4\tau} +$$

$$+\frac{C_*[(A + A_0 - 2N)\cos^2\tau + (A + A_0 + 2N)\sin^2\tau]}{4(\sin^4\tau + \cos^4\tau)^2}[(A + A_0 - 2N)\cos^6\tau -$$

$$-2(A - A_0)\cos^3\tau\sin^3\tau + (A + A_0 + 2N)\sin^6\tau]. \tag{30}$$

Преобразуем (27) с учетом (25)

$$G_1(\tau) = \frac{\varkappa(\tau)}{\sin^4\tau + \cos^4\tau}[-4(A + A_0 - 2N)\cos^3\tau\sin\tau -$$

$$-4(A + A_0 + 2N)\sin^3\tau\cos\tau + (A - A_0)(\cos^4\tau + \sin^4\tau)].$$

Внесем это выражение и (30) в (26), получим

$$4\varkappa^2(z)Q_4^2(z) = P_8^*(z), \tag{31}$$

где

$$z = \mathrm{tg}\tau, \tag{32}$$

$$Q_4(z)(A - A_0)z^4 - 4(A + A_0 + 2N)z^3 - 4(A + A_0 - 2N)z + A - A_0,$$

$$P_8^*(z) = P_0z^8 + P_2z^6 + P_3z^5 + P_4z^4 + P_5z^3 + P_6z^2 + P_8,$$

$$P_0 = 4g^2 - C_*^2(A + A_0 + 2N)^2, \quad P_2 = [4H - (A + A_0 - 2N)(A + A_0 + 2N)]C_*^2,$$

$$P_3 = 2C_*^2(A - A_0)(A + A_0 + 2N), \; P_4 = 8g^2, \; P_5 = 2C_*^2(A - A_0)(A + A_0 - 2N),$$

$$P_6 = [4H - (A + A_0 - 2N)(A + A_0 + 2N)]C_*^2, \; P_8 = 4g^2 - C_*^2(A + A_0 - 2N)^2.$$

Для определения зависимости времени t от вспомогательной переменной z продифференцируем (32) по времени. Тогда

$$\dot\tau = \dot z/(1 + z^2), \tag{33}$$

и подставим в него $(5.59)_*$

$$\dot\tau = -\varkappa. \tag{34}$$

После этого из (31) находим

$$t - t_0 = -2\int \frac{Q_4(z)}{(1 + z^2)\sqrt{P_8^*(z)}}dz.$$

Зависимость z от t можно получить обращением этого абелева интеграла [2]. Для определения потенциальной энергии упругого элемента воспользуемся интегралом энергии $(5.14)_*$

$$(A\omega_1^2 + A_0\Omega_1^2 - 2N\Omega_1\omega_1\cos 2\tau) + (A\omega_2^2 + A_0\Omega_2^2 - 2N\Omega_2\omega_2) = 2h - 2\Pi. \tag{35}$$

Подставив в него (25), (29), (31), получим

$$2h - 2\Pi(z) = \frac{C_*^2(1 + z^2)}{(1 + z^4)^2}[(A + A_0 + 2N)z^6 - 2(A - A_0)z^3 + A + A_0 - 2N] +$$

$$+\frac{P_8^*(z)Q_{10}(z)}{Q_4^2(z)(1 + z^4)^2(1 + z^2)}, \tag{36}$$

где

$$Q_{10}(z) = (A + A_0 - 2N)z^{10} - 8(A - A_0)z^9 + 17(A + A_0 + 2N)z^8 - 16(A - A_0)z^7 +$$
$$+[50(A + A_0) + 28N]z^6 - 16(A - A_0)z^5 + [50(A + A_0) - 28N]z^4 -$$
$$-16(A - A_0)z^3 + 17(A + A_0 - 2N)z^2 - 8(A - A_0)z + A + A_0 + 2N.$$

Компоненты угловых скоростей полуподвижных базисов определены соотношениями (18)–(23), (25), (31), их представим как функции от переменной z:

$$\omega_1(z) = \frac{z^4 - 4z^3 - 4z + 1}{z^4 + 1}\varkappa(z), \quad \Omega_1(z) = -\frac{z^4 + 4z^3 + 4z + 1}{z^4 + 1}\varkappa(z),$$
$$\omega_2(z) = \frac{(1 - z^3)\sqrt{z^2 + 1}}{2(z^4 + 1)}, \quad \Omega_2(z) = \frac{(1 + z^3)\sqrt{z^2 + 1}}{2\sqrt{z^4 + 1}}, \tag{37}$$
$$\omega_3(z) = \frac{C_* z(1 + z)\sqrt{z^2 + 1}}{2(z^4 + 1)}, \quad \Omega_3(z) = \frac{C_* z(1 - z)\sqrt{z^2 + 1}}{2(z^4 + 1)}.$$

Для определения угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах необходимо воспользоваться формулами $(5.32)_*, (5.37)_*, (15)$:

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \qquad n = 0,$$
$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \qquad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi, \qquad n_0 = 0. \tag{38}$$

Из циклических интегралов $(5.11)_*$

$$\omega_3 + \dot\varphi = n/J, \qquad \Omega_3 + \dot\Phi = n_0/J_0$$

при ограничениях (15) имеем

$$\dot\varphi = -\omega_3(z), \qquad \dot\Phi = -\Omega_3(z).$$

А так как ω_3, Ω_3 представлены посредством функций z, то вследствие (33), (34) получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{\omega_3(z)}{(1 + z^2)\varkappa(z)} dz, \qquad \Phi - \Phi_0 = \int \frac{\Omega_3(z)}{(1 + z^2)\varkappa(z)} dz. \tag{39}$$

Таким образом, задавая ξ в виде (12), получили решение, определяемое соотношениями (37)–(39).

Второе решение. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$\xi = 1/\sin\tau. \tag{40}$$

Тогда уравнение (7) имеет частное решение

$$\lambda_1(\tau) = -1/\sin\tau. \tag{41}$$

Определитель Вронского (10) при значении (40) таков

$$W(\tau) = \frac{\mathrm{ctg}^2\tau}{\sin\tau}. \tag{42}$$

Второе линейно независимое частное решение $\lambda_2(\tau)$ находим по формуле (8), подставив в нее (41), (42):

$$\lambda_2(\tau) = -\mathrm{ctg}\tau - \frac{\ln(\mathrm{tg}\frac{\tau}{2})}{\sin\tau}. \tag{43}$$

Общее решение однородного уравнения (7) имеет вид

$$\lambda(\tau) = \frac{C_1}{\sin\tau} - C_2\left(\mathrm{ctg}\tau + \frac{\ln(\mathrm{tg}\frac{\tau}{2})}{\sin\tau}\right).$$

Определим правую часть уравнения (5) на инвариантном соотношении (40)

$$f_*(\tau) = \frac{1}{H}\big\{[(A+N)n_0 - (A_0+N)n]\frac{1+2\cos^2\tau}{\sin\tau} - [(A+N)n_0 +$$

$$+(A_0+N)n]\frac{1+\cos^2\tau}{\sin^2\tau} + [(A-N)n_0 + (A_0-N)n]\mathrm{ctg}^2\tau -$$

$$-[(A-N)n_0 - (A_0-N)n]\frac{\mathrm{ctg}^2\tau}{\sin\tau}\big\}. \tag{44}$$

Общее решение неоднородного уравнения (5) можно найти по формуле (11) после подстановки в нее (41), (42), (44).

Можно показать, что интеграл

$$\int \frac{\lambda_2(\tau) f_*(\tau)}{W(\tau)} d\tau$$

относится к "неберущимся" интегралам. Поэтому будем считать, что циклические постоянные удовлетворяют условию (15). Чтобы избавиться от трансцендентных функций в зависимостях для ω_i, Ω_i, потребуем, чтобы $C_2 = 0$. Т. е. будем рассматривать частное решение

$$\lambda(\tau) = -\frac{B}{\sin\tau} \tag{45}$$

(B – произвольная постоянная).

Из уравнения (1) вследствие (40), (45), (15) находим

$$\mu(\tau) = B\mathrm{tg}\tau. \tag{46}$$

Подставив (45), (46) в (3), (4), получим

$$\omega_2(\tau) = -\frac{B(1+\sin\tau)}{\sin 2\tau}, \qquad \Omega_2(\tau) = -\frac{B(1-\sin\tau)}{\sin 2\tau}, \tag{47}$$

после этого из (20), (21) определим

$$\omega_3(\tau) = \frac{2B\sin\tau(\cos^2\tau - \sin\tau)}{\sin^2 2\tau}, \qquad \Omega_3(\tau) = \frac{2B\sin\tau(\cos^2\tau + \sin\tau)}{\sin^2 2\tau}. \tag{48}$$

Вследствие (40) из (24) находим

$$\omega_1(\tau) = \frac{1+\sin\tau}{\sin\tau}\varkappa(\tau), \qquad \Omega_1(\tau) = \frac{1-\sin\tau}{\sin\tau}\varkappa(\tau). \tag{49}$$

Для определения $\varkappa(\tau)$ сначала получим $G_1(\tau)$ из (27) при ограничениях (15) и значениях (49)

$$G_1(\tau) = \frac{(A-A_0)\sin\tau + A + A_0 - 2N\cos 2\tau}{\sin\tau}\varkappa(\tau). \tag{50}$$

Затем, подставив в (28) соотношения (47), с учетом ограничения (15) имеем

$$G_2^2 + G_3^2 = B^2\Big\{\frac{-H(1+\cos^2\tau)}{\cos^2\tau} + \frac{A + A_0 - 2N\cos 2\tau}{\sin^2 2\tau}[(A + A_0 + 2N)\sin^2\tau +$$

$$+ A + A_0 - 2N + 2(A - A_0)\sin\tau]\Big\}. \tag{51}$$

Представим интеграл (26) в виде

$$G_1(\tau) = \sqrt{g^2 - G_2^2 - G_3^2}\ ,$$

внесем в это соотношение (50), (51) и получим

$$\varkappa(\tau)\cos\tau = \frac{g\sqrt{P_4(\sin\tau)}}{2AQ_2(\sin\tau)}. \tag{52}$$

Введем новую переменную

$$\upsilon(\tau) = \sin\tau. \tag{53}$$

Вычислим ее производную с учетом (34):

$$\dot{\upsilon} = -\varkappa\cos\tau. \tag{54}$$

Тогда из (52) находим

$$\frac{A}{g}\dot{\upsilon} = -\frac{\sqrt{P_4(\upsilon)}}{2Q_2(\upsilon)},$$

откуда определяем зависимость времени t от вспомогательной переменной υ

$$\frac{g}{A}(t - t_0) = -2\int \frac{Q_2(\upsilon)}{\sqrt{P_4(\upsilon)}}\,d\upsilon,$$

где

$$Q_2(\upsilon) = 4b\upsilon^2 + (1 - a_*)\upsilon + 1 + a_* - 2b, \tag{55}$$

$$P_4(\upsilon) = \{-4 + 4C^2[(1 + a_* + 3b)b - a_*]\}\upsilon^4 + 8C^2(1 - a_*)b\upsilon^3 +$$

$$+\{4 + C^2[1 + 10a_* + a_*^2 + 4(1 + a_*)b - 20b^2]\}\upsilon^2 +$$

$$+2C^2(1 - a_*)(1 + a_* - 2b)\upsilon + C^2(1 + a_* - 2b)^2, \tag{56}$$

$$a_* = A_0/A, \tag{57}$$

$$b = N/A, \tag{58}$$

$$gC = AB. \tag{59}$$

Условием существования движений является выполнение неравенства $P_4(\upsilon) >$ > 0. Отметим, что

$$P_4(1) = 4C^2(2a_* - b^2 + 2b + 1), \tag{60}$$

$$P_4(-1) = 4C^2(a_*^2 + 2a_*b + 2a_* - b^2). \tag{61}$$

Вследствие $(5.45)_*$ имеют место неравенства

$$A + A_0 + 2N > 0, \quad A + A_0 - 2N > 0, \quad AA_0 - N^2 > 0,$$

которые с учетом обозначений (57), (58) принимают вид

$$1 + a_* + 2b > 0, \quad 1 + a_* - 2b > 0, \quad a_* - b^2 > 0.$$

Представим (60), (61) в виде

$$P_4(1) = 4C^2[(a_* - b^2) + (1 + a_* + 2b)], \ P_4(-1) = 4C^2[(a_* - b^2) + a_*(1 + a_* + 2b)]$$

и заметим, что

$$P_4(1) > 0, \quad P_4(-1) > 0, \quad P_4(0) = C^2(1 + a_* - 2b)^2 > 0.$$

Совокупность этих трех условий всегда определяет интервал, принадлежащий [-1; 1], в котором $P_4(\upsilon) > 0$.

Используя интеграл (35), соотношения (47), (49), (51), а также обозначения (53), (56)–(58), находим потенциальную энергию упругого элемента

$$2h - 2\Pi(\upsilon) = \frac{g^2}{4A\upsilon^2(1-\upsilon^2)}\{C^2[(1+a_*+2b)\upsilon^2 + 2(1-a_*)\upsilon + 1 + a_* - 2b] +$$

$$+\frac{P_4(\upsilon)}{Q_2^2(\upsilon)}[-4b\upsilon^4 + (1+a_*+6b)\upsilon^2 + 2(1-a_*)\upsilon + 1 + a_* - 2b]\}. \qquad (62)$$

Запишем уравнение (39) с учетом замены (53), (54)

$$\varkappa(\upsilon)\sqrt{1-\upsilon^2}\frac{d\varphi}{d\upsilon} = \omega_3(\upsilon), \qquad \varkappa(\upsilon)\sqrt{1-\upsilon^2}\frac{d\Phi}{d\upsilon} = \Omega_3(\upsilon)$$

и, подставив в них (48), (52), (59), находим

$$\frac{d\varphi}{d\upsilon} = \frac{C(-\upsilon^2-\upsilon+1)Q_2(\upsilon)}{\upsilon(1-\upsilon^2)\sqrt{P_4(\upsilon)}}, \qquad \frac{d\Phi}{d\upsilon} = \frac{C(-\upsilon^2+\upsilon+1)Q_2(\upsilon)}{\upsilon(1-\upsilon^2)\sqrt{P_4(\upsilon)}}.$$

Теперь для углов собственных вращений тел имеем

$$\varphi - \varphi_0 = C\int \frac{(-\upsilon^2-\upsilon+1)Q_2(\upsilon)}{\upsilon(1-\upsilon^2)\sqrt{P_4(\upsilon)}}d\upsilon, \quad \Phi - \Phi_0 = C\int \frac{(-\upsilon^2+\upsilon+1)Q_2(\upsilon)}{\upsilon(1-\upsilon^2)\sqrt{P_4(\upsilon)}}d\upsilon, \qquad (63)$$

где $Q_2(\upsilon), P_4(\upsilon)$ определены в (55), (56).

Компоненты угловых скоростей тел в неизменно связанных с телами базисах можно найти по формулам (38).

Таким образом, построено второе точное решение, для которого

$$\omega_1(\upsilon) = \frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\varkappa(\upsilon), \qquad \Omega_1(\upsilon) = \frac{(1-\upsilon)}{\upsilon}\ \varkappa(\upsilon),$$

$$\varkappa(\upsilon) = \frac{g\sqrt{P_4(\upsilon)}}{2AQ_2(\upsilon)\sqrt{1-\upsilon^2}},$$

$$\omega_2(\upsilon) = -\frac{Cg(1+\upsilon)}{2A\upsilon\sqrt{1-\upsilon^2}}, \qquad \Omega_2(\upsilon) = -\frac{Cg(1-\upsilon)}{2A\upsilon\sqrt{1-\upsilon^2}},$$

$$\omega_3(\upsilon) = \frac{Cg(-\upsilon^2-\upsilon+1)}{2A\upsilon(1-\upsilon^2)}, \qquad \Omega_3(\upsilon) = \frac{Cg(-\upsilon^2+\upsilon+1)}{2A\upsilon(1-\upsilon^2)},$$

а $\varphi(\upsilon), \Phi(\upsilon)$ определены квадратурами (63). При этом потенциальная энергия упругого элемента имеет вид рациональной функции (62).

1. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977. – 328 с.

Национальный техн. ун-т, Донецк, Украина

Получено 06.11.07