ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.38

©2008. **М.П. Харламов**

ОБОБЩЕНИЕ 4-ГО КЛАССА АППЕЛЬРОТА: АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Статья является продолжением публикации автора (Механика твердого тела, вып. 35, 2005), посвящена исследованию гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, которая возникает на критическом подмногообразии фазового пространства волчка Ковалевской в двойном силовом поле и обобщает семейство особо замечательных движений 4-го класса Аппельрота классической задачи. Введены вещественные переменные u_1, u_2, в которых уравнения движения разделяются. Даны алгебраические выражения через u_1, u_2 исходных фазовых переменных.

Введение. Семейство траекторий волчка Ковалевской в двойном силовом поле, обобщающее 4-й класс Аппельрота критических движений волчка в поле силы тяжести, изучалось в работе [1] с точки зрения бифуркаций и множества допустимых значений двух почти всюду независимых первых интегралов в инволюции. В [1] анонсирована возможность разделения переменных для этой системы. В данной статье эта возможность реализуется. Ввиду использования многих формул работы [1], для экономии места будем ссылаться на них по номерам, снабжая такие ссылки индексом 1, например, (28_1) означает формулу (28) работы [1]. Таким образом, рассматривается динамическая система, заданная в пространстве переменных $\omega_j, \alpha_j, \beta_j$ $(j = 1,2,3)$ уравнениями Эйлера–Пуассона (1_1) и ограниченная на инвариантное подмножество $\mathfrak{O}$, заданное в $\mathbf{R}^9$ тремя геометрическими интегралами (2_1) с условием (3_1) и двумя инвариантными соотношениями (6_1). В окрестности точки общего положения $\dim \mathfrak{O} = 4$, однако, гладкость $\mathfrak{O}$ нарушается в точках, заданных уравнениями (7_1). Исключая эти точки из $\mathfrak{O}$, получим четырехмерное многообразие $\mathfrak{O}^*$, инвариантное относительно системы (1_1).

В дальнейшем используем комплексные фазовые переменные $(\mathrm{i}^2 = -1)$:

$$\begin{gathered}
x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + \mathrm{i}\,(\alpha_2 + \beta_1), \quad x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - \mathrm{i}\,(\alpha_2 + \beta_1),\\
y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + \mathrm{i}\,(\alpha_2 - \beta_1), \quad y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - \mathrm{i}\,(\alpha_2 - \beta_1),\\
z_1 = \alpha_3 + \mathrm{i}\,\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - \mathrm{i}\,\beta_3,\\
w_1 = \omega_1 + \mathrm{i}\,\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - \mathrm{i}\,\omega_2, \quad w_3 = \omega_3\,.
\end{gathered} \tag{1}$$

Как показано в [1], система дифференциальных уравнений (1_1), ограниченная на $\mathfrak{O}^*$, имеет два почти всюду независимых первых интеграла в инволюции S и T, которые в переменных (1) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&S = -\frac{1}{4}\Bigl(\frac{y_2 w_1 + x_1 w_2 + z_1 w_3}{w_1} + \frac{x_2 w_1 + y_1 w_2 + z_2 w_3}{w_2}\Bigr),\\
&\mathrm{T} = \frac{1}{2}[w_1(x_2 w_1 + y_1 w_2 + z_2 w_3) + w_2(y_2 w_1 + x_1 w_2 + z_1 w_3)] + x_1 x_2 + z_1 z_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обозначив постоянные этих интегралов через s и τ соответственно, напомним введенные в [1] обозначения параметров $p > 0$, $r > 0$, σ, $\chi \geqslant 0$

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad r^2 = a^2 - b^2, \quad \sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4, \quad 4s^2\chi^2 = \sigma + 4s^2\tau \tag{3}$$

и переменных x, μ_1, μ_2, ξ, μ

$$x^2 = x_1x_2, \quad \mu_1 = r^2x_1 - \tau y_1, \quad \mu_2 = r^2x_2 - \tau y_2, \tag{4}$$

$$\xi = x_1x_2 + z_1z_2 - \tau, \quad \mu^2 = \mu_1\mu_2. \tag{5}$$

В [1] показано, что для траекторий на интегральном многообразии

$$J_{s,\tau} = \{\zeta \in \mathfrak{O}^* : S(\zeta) = s, \mathrm{T}(\zeta) = \tau\}$$

имеет место тождество

$$\mu^2 = \tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma. \tag{6}$$

Поверхность Γ, заданная этим уравнением в пространстве $\mathbf{R}^3(x, \xi, \mu)$, в силу (3) зависит только от постоянной τ. При всех допустимых τ она является однополостным гиперболоидом. Оказалось, что образ связной компоненты множества $J_{s,\tau}$ (в регулярном случае – двумерного тора Лиувилля) на Γ ограничен прямолинейными образующими этой поверхности. В связи с этим в [1] формулируется гипотеза – в системе локальных координат (u, v) на Γ, порожденных семействами прямолинейных образующих, уравнения движения разделяются. Явное нахождение соответствующих уравнений и зависимости фазовых переменных от u, v оказалось технически весьма сложным. Полностью этот результат представлен в работе [2]. В полученных уравнениях вида

$$f(u,v)\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}\sqrt{Q(u)}, \quad f(u,v)\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\sqrt{Q(v)}$$

многочлен Q имеет восьмую степень. Кроме того, при различных значениях τ переменные u, v могут быть как вещественными, так и комплексными. В [2] предложена дополнительная замена, которая понижает степень подкоренного многочлена до шестой. При этом вопрос вещественности новых вспомогательных переменных не решен и явные зависимости от них исходных фазовых переменных не получены. В настоящей статье вводятся вещественные переменные, в которых уравнения движения разделяются. Выписаны явные формулы для исходных фазовых переменных.

1. Параметрические уравнения для фазовых переменных. На двумерном интегральном многообразии фазовые переменные (1) могут быть выражены через две вспомогательные переменные, в качестве которых на первом этапе примем x, ξ. Геометрические интегралы (2_1) запишем в виде

$$z_1^2 = r^2 - x_1y_2, \quad z_2^2 = r^2 - x_2y_1, \tag{7}$$

$$2z_1z_2 = 2p^2 - x_1x_2 - y_1y_2, \tag{8}$$

а из уравнений $(30_1), (31_1)$ с учетом обозначений (5) получим[1]

$$
\begin{aligned}
&(\mu_1 - 2s\tau) + (\mu_2 - 2s\tau) = \frac{\xi^2}{2s} - 2s(x^2 + \chi^2),\\
&(\mu_1 - 2s\tau)(\mu_2 - 2s\tau) = 4s^2\chi^2 x^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\mu_1 = 2s\tau + \frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2, \quad \mu_2 = 2s\tau + \frac{1}{8s}(\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2, \tag{9}
$$

где обозначено

$$
\Psi_1(x,\xi) = \xi^2 - 4s^2(x+\chi)^2, \quad \Psi_2(x,\xi) = \xi^2 - 4s^2(x-\chi)^2.
$$

Дополним три уравнения (4) уравнением $y_1 y_2 = 2p^2 - 2(\xi+\tau) + x^2$, вытекающим из (8). Из этой системы с учетом (9) находим

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2s}{r^2}\frac{4r^4(x^2-\tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2},\\
x_2 &= \frac{2s}{r^2}\frac{4r^4(x^2-\tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2s\frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2-\tau) + \sigma] - (\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} + \sqrt{\Psi_2})^2},\\
y_2 &= 2s\frac{4[2\tau\xi - \tau(x^2-\tau) + \sigma] - (\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2})^2}{16s^2\tau + (\sqrt{\Psi_1} - \sqrt{\Psi_2})^2},
\end{aligned} \tag{11}
$$

где

$$
\Phi_1(x,\xi) = (\xi+\tau+r^2)^2 - 2(p^2+r^2)x^2, \quad \Phi_2(x,\xi) = (\xi+\tau-r^2)^2 - 2(p^2-r^2)x^2. \tag{12}
$$

Подстановка зависимостей (10), (11) в (7) дает

$$
z_1 = \frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi_2}), \qquad z_2 = \frac{1}{2r}(\sqrt{\Phi_1} - \sqrt{\Phi_2}). \tag{13}
$$

В результате получены выражения для конфигурационной группы переменных. Знаки радикалов в формулах (10), (11), (13) произвольны, но согласованы.

[1] Отметим, что в соответствующей системе (33_1) имеется опечатка в первом уравнении, не повлиявшая на дальнейшие вычисления.

Для нахождения переменных w_i, отвечающих за компоненты угловой скорости, воспользуемся уравнениями (4_1) для общих интегралов K, H и выражениями (18_1) их постоянных через s, τ. В переменных (1) с учетом обозначений (3) имеем

$$K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2) = \chi^2, \tag{14}$$

$$H = \frac{1}{2}w_3^2 + w_1 w_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = s + \frac{p^2 - \tau}{2s}. \tag{15}$$

Из (14), (2) получаем

$$x_2 w_1^2 + x_1 w_2^2 = -\frac{1}{4s^2}[\xi^2 + 4s^2(x^2 - \chi^2)], \qquad w_1 w_2 = \frac{\xi}{2s}. \tag{16}$$

Отсюда

$$w_1 = \frac{\mathrm{i}}{4s\sqrt{x_2}}(\sqrt{\Theta_1} + \sqrt{\Theta_2}), \quad w_2 = \frac{\mathrm{i}}{4s\sqrt{x_1}}(\sqrt{\Theta_1} - \sqrt{\Theta_2}), \tag{17}$$

где

$$\Theta_1(x, \xi) = (\xi - 2sx)^2 - 4s^2\chi^2, \quad \Theta_2(x, \xi) = (\xi + 2sx)^2 - 4s^2\chi^2. \tag{18}$$

Интегральное соотношение (15) с подстановкой y_1, y_2 из (11) и $w_1 w_2$ из второго уравнения (16) дает

$$w_3^2 = \frac{1}{4s\mu^2}[P - \sqrt{\Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2}], \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} P = 4s^2(x^2 - \chi^2)[2(\tau - p^2)x^2 - \tau^2 + r^4] + 8s^2[(\tau - 2\chi^2)x^2 + \tau\chi^2]\xi - \\ - 2[(\tau - p^2 - 2s^2)x^2 + \tau(p^2 - 2s^2) - r^4]\xi^2 - 2\tau\xi^3 - \xi^4. \end{aligned}$$

Обозначая

$$Q = (\xi + \tau + 2s^2 - p^2)^2 - 4s^2x^2 - (p^2 - 2s^2)^2 + r^4,$$

имеем тождество $P^2 - \Phi_1\Phi_2\Psi_1\Psi_2 = 4x^2(\tau\xi^2 + \sigma x^2 - \tau\sigma)Q^2$. Поэтому с учетом уравнения (6) из (19) получим

$$w_3 = \frac{1}{2\sqrt{2s}\mu}(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}), \tag{20}$$

где

$$P_1 = P + 2x\mu Q, \quad P_2 = P - 2x\mu Q. \tag{21}$$

Таким образом, соотношения (10), (11), (13), (17), (20) дают искомые зависимости всех переменных (1) от двух переменных x, ξ, принятых в качестве промежуточных.

2. Замена переменных. Удовлетворяя соотношению (6), которое теперь является следствием найденных выражений для переменных, введем на поверхности Γ локальные координаты u_1, u_2 как корни квадратного уравнения

$$u^2 - \frac{2\tau\xi}{\tau - x^2}u + \frac{\tau\xi^2 + \sigma x^2}{\tau - x^2} = 0.$$

Его дискриминант в силу (6) неотрицателен, поэтому переменные u_1, u_2 вещественны и могут быть записаны в виде

$$u_1 = \frac{\tau\xi + x\mu}{\tau - x^2}, \quad u_2 = \frac{\tau\xi - x\mu}{\tau - x^2}. \tag{22}$$

Разрешая (6), (22) относительно x, ξ, μ, получим

$$x = \frac{\sqrt{\tau}(U_1 - U_2)}{u_1 + u_2}, \quad \xi = \frac{u_1 u_2 + \sigma + U_1 U_2}{u_1 + u_2}, \quad \mu = \frac{\sqrt{\tau}(u_2 U_1 + u_1 U_2)}{u_1 + u_2}, \tag{23}$$

где обозначено

$$U_1 = \sqrt{u_1^2 - \sigma}, \quad U_2 = \sqrt{u_2^2 - \sigma}. \tag{24}$$

Сразу же отметим, что эти радикалы (вещественные или чисто мнимые в зависимости от знака τ) рассматриваются как алгебраические, различные сочетания знаков обеспечивают все возможные тройки значений x, ξ, μ в (23), удовлетворяющие системе (6), (22) при заданных u_1, u_2.

Отметим непосредственно проверяемые соотношения

$$x\mu = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\tau\xi, \tag{25}$$

$$\frac{(u_1 u_2 + \sigma + U_1 U_2)(u_1 u_2 + \sigma - U_1 U_2)}{(u_1 + u_2)^2} = \sigma, \tag{26}$$

$$\frac{u_1 u_2 + \sigma + U_1 U_2}{u_1 u_2 - \sigma + U_1 U_2} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{(u_1 - u_2)^2}, \tag{27}$$

позволяющее значительно упростить некоторые из последующих выкладок.

Вывод явных зависимостей фазовых переменных от u_1, u_2 начнем с выражения переменных μ_1, μ_2, определяющих знаменатели в (10), (11). Пусть $\psi = 16s^2\tau + \Psi_1 + \Psi_2$. Согласно (9) имеем

$$\mu_1 = \frac{1}{8s}(\psi - 2\sqrt{\Psi_1\Psi_2}), \qquad \mu_2 = \frac{1}{8s}(\psi + 2\sqrt{\Psi_1\Psi_2}).$$

Из определения переменных следует тождество $\psi^2 - 4\Psi_1\Psi_2 = 64s^2\mu^2$, и можно записать $2\sqrt{\Psi_1\Psi_2} = \sqrt{\psi + 8s\mu}\sqrt{\psi - 8s\mu}$. Поэтому

$$\mu_1 = \frac{1}{16s}(\sqrt{\psi + 8s\mu} - \sqrt{\psi - 8s\mu})^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{16s}(\sqrt{\psi + 8s\mu} + \sqrt{\psi - 8s\mu})^2.$$

При подстановке (23) находим

$$\psi + 8s\mu = \frac{4R^2\varphi_1^2\varphi_2^2}{(u_1+u_2)^2}, \qquad \psi - 8s\mu = \frac{4R^2\psi_1^2\psi_2^2}{(u_1+u_2)^2},$$

где

$$\varphi_1 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}+U_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}+U_2},$$
$$\psi_1 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}-U_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{2s\sqrt{\tau}-U_2}.$$

Заметим, что последние обозначения являются промежуточными, знаки этих радикалов на окончательные выражения фазовых переменных не влияют, а существенным является новое обозначение алгебраического значения корня

$$R = \sqrt{u_1u_2+\sigma+U_1U_2}. \tag{28}$$

Теперь выражения для μ_1, μ_2 примут вид

$$\mu_1 = \frac{R^2(\varphi_1\varphi_2-\psi_1\psi_2)^2}{4s(u_1+u_2)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{R^2(\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2)^2}{4s(u_1+u_2)^2}, \tag{29}$$

или, в более развернутой форме,

$$\mu_1 = \frac{R^2(4s^2\tau+U_1U_2-V_1V_2)}{2s(u_1+u_2)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{R^2(4s^2\tau+U_1U_2+V_1V_2)}{2s(u_1+u_2)^2}. \tag{30}$$

Здесь введены обозначения алгебраических радикалов

$$V_1 = \sqrt{4s^2\chi^2-u_1^2}, \qquad V_2 = \sqrt{4s^2\chi^2-u_2^2}, \tag{31}$$

знаки которых произвольны.

Найдем переменные x_1, x_2. В дополнение к (24), (28), (31) обозначим

$$\begin{gathered} M_1 = \sqrt{u_1+\tau+r^2}, \quad M_2 = \sqrt{u_2+\tau+r^2}, \\ N_1 = \sqrt{u_1+\tau-r^2}, \quad N_2 = \sqrt{u_2+\tau-r^2}. \end{gathered} \tag{32}$$

Знаки этих величин также произвольны. Для многочленов (12) имеем

$$\Phi_1 = \frac{2R^2M_1^2M_2^2}{(u_1+u_2)^2}, \qquad \Phi_2 = \frac{2R^2N_1^2N_2^2}{(u_1+u_2)^2}. \tag{33}$$

Пусть $X = 4r^4(x^2-\tau)+\tau(\Phi_1+\Phi_2)$. Используя (33) и тождество (26), находим

$$X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2 = \frac{16\tau^2r^4(u_1-u_2)^2R^4}{(u_1+u_2)^4}.$$

Следовательно, $2\tau\sqrt{\Phi_1\Phi_2} = \sqrt{X_1X_2}$, где

$$X_1 = X + \sqrt{X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2} = \frac{4\tau R^2 N_1^2 M_2^2}{(u_1+u_2)^2},$$
$$X_2 = X - \sqrt{X^2 - 4\tau^2\Phi_1\Phi_2} = \frac{4\tau R^2 M_2^2 N_1^2}{(u_1+u_2)^2},$$

и для числителей в выражениях (10) получим

$$4r^4(x^2-\tau) + \tau(\sqrt{\Phi_1} \pm \sqrt{\Phi_2})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X_1} \pm \sqrt{X_2})^2.$$

Поэтому из (9), (10), (29) будем иметь

$$x_1 = \frac{2s\tau}{r^2}\left(\frac{M_2N_1 + M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2}\right)^2, \qquad x_2 = \frac{2s\tau}{r^2}\left(\frac{M_2N_1 - M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2}\right)^2. \tag{34}$$

Эти же выражения в развернутой форме таковы

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2s\tau}{r^2}\frac{(u_1+\tau)(u_2+\tau) - r^4 + M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 + V_1V_2}, \\ x_2 &= \frac{2s\tau}{r^2}\frac{(u_1+\tau)(u_2+\tau) - r^4 - M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 - V_1V_2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Зависимость переменных y_1, y_2 от u_1, u_2 можно получить из (11), но в данном случае удобнее воспользоваться определением (4) для μ_1, μ_2 и записать

$$\tau y_1\mu_2 = r^2x_1\mu_2 - \mu^2, \qquad \tau y_2\mu_1 = r^2x_2\mu_1 - \mu^2.$$

Отсюда с подстановкой (30), (35), (23) сразу же получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= 2s\frac{\tau(u_1+u_2-2p^2+2\tau) - U_1U_2 + M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 + V_1V_2}, \\ y_2 &= 2s\frac{\tau(u_1+u_2-2p^2+2\tau) - U_1U_2 - M_1N_1M_2N_2}{4s^2\tau + U_1U_2 - V_1V_2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Выражения для z_1, z_2 находим из (13), (33):

$$z_1 = \frac{R}{\sqrt{2}\,r}\frac{M_1M_2 + N_1N_2}{u_1+u_2}, \qquad z_2 = \frac{R}{\sqrt{2}\,r}\frac{M_1M_2 - N_1N_2}{u_1+u_2}. \tag{37}$$

Выразим переменные, связанные с компонентами угловой скорости. Вначале найдем зависимость для w_3. Используя тождество (26), представим полиномы P, Q в виде

$$P = \frac{4\xi^2}{(u_1+u_2)^2}\,\widetilde{P}, \qquad Q = \frac{2\xi}{u_1+u_2}\,\widetilde{Q},$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{P} = &-(u_1^2-r^4)(u_2^2-r^4)+\tau[(2s^2-u_2)u_1^2+(2s^2-u_1)u_2^2-p^2(u_1^2+u_2^2)+\\ &+r^4(u_1+u_2-4s^2+2p^2)]+2\tau^2(2s^2-p^2)(u_1+u_2)+\\ &+\tau^3(u_1+u_2+4s^2-2p^2)+\tau^4,\\ \widetilde{Q} = &\, u_1u_2+(2s^2-p^2)(u_1+u_2)+r^4+\tau(u_1+u_2+4s^2-2p^2)+\tau^2.\end{aligned}$$

С учетом обозначений (31), (32) для функций (21) получим

$$P_1 = \frac{4\xi^2}{(u_1+u_2)^2}M_1^2N_1^2V_2^2, \qquad P_2 = \frac{4\xi^2}{(u_1+u_2)^2}M_2^2N_2^2V_1^2.$$

Тогда из (20), используя тождество (25), найдем

$$w_3 = \frac{U_1-U_2}{\sqrt{2s\tau}}\frac{M_2N_2V_1-M_1N_1V_2}{u_1^2-u_2^2} = \frac{1}{\sqrt{2s\tau}}\frac{M_2N_2V_1-M_1N_1V_2}{U_1+U_2}. \tag{38}$$

Найдем выражения для w_1, w_2. Заметим, что формально в слагаемых числителя (38) можно расставить знаки как угодно, поскольку в формулах для x_i, y_i, z_i фигурирует лишь произведение V_1V_2. Выбрав запись в виде (38) и желая применить формулы (17), мы должны указать правила, определяющие знаки радикалов $\sqrt{\Theta_1}, \sqrt{\Theta_2}$ так, чтобы получить все их комбинации, удовлетворяющие вместе с (38) системе трех линейных по w_i уравнений в составе уравнений (22_1). При этом, поскольку в силу однородности системы ее определитель должен равняться нулю (уравнение (30_1)), можно ограничиться проверкой двух из этих уравнений, например,

$$\begin{aligned}(y_2+2s)w_1+x_1w_2+z_1w_3=0,\\ x_2w_1+(y_1+2s)w_2+z_2w_3=0.\end{aligned} \tag{39}$$

Из (34) запишем

$$\sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{2s\tau}}{r}\frac{M_2N_1+M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2}, \qquad \sqrt{x_2} = \frac{\sqrt{2s\tau}}{r}\frac{M_2N_1-M_1N_2}{\varphi_1\varphi_2-\psi_1\psi_2}.$$

Здесь формальные знаки выражений выбраны так, чтобы выполнялось необходимое условие $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \equiv x$, где величина x определена согласно (23). Для многочленов Θ_1, Θ_2 уравнения (18) и (23) дают $(u_1+u_2)^2\Theta_1 = -2R^2\varphi_1^2\psi_2^2$, $(u_1+u_2)^2\Theta_2 = -2R^2\psi_1^2\varphi_2^2$, поэтому, вводя $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$, можно записать

$$(u_1+u_2)\sqrt{\Theta_1} = \mathrm{i}\,\varepsilon_1\sqrt{2}R\varphi_1\psi_2, \qquad (u_1+u_2)\sqrt{\Theta_2} = \mathrm{i}\,\varepsilon_2\sqrt{2}R\psi_1\varphi_2.$$

Тогда из (17)

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{rR}{4s\sqrt{s\tau}}\frac{(\varepsilon_2\varphi_2^2-\varepsilon_1\psi_2^2)V_1+(\varepsilon_1\varphi_1^2-\varepsilon_2\psi_1^2)V_2}{(u_1+u_2)(M_1N_2-M_2N_1)},\\ w_2 &= \frac{rR}{4s\sqrt{s\tau}}\frac{(\varepsilon_2\varphi_2^2-\varepsilon_1\psi_2^2)V_1-(\varepsilon_1\varphi_1^2-\varepsilon_2\psi_1^2)V_2}{(u_1+u_2)(M_1N_2+M_2N_1)}.\end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$. Получим выражения

$$w_1 = \pm \frac{rR}{\sqrt{s}(u_1+u_2)} \frac{V_1 - V_2}{M_2N_1 - M_1N_2}, \qquad w_2 = \mp \frac{rR}{\sqrt{s}(u_1+u_2)} \frac{V_1 + V_2}{M_2N_1 + M_1N_2},$$

не удовлетворяющие (39) ни при каком выборе знаков. Для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ из двух вариантов $\varepsilon = \pm 1$ с (38), (39) оказывается совместен только один

$$w_1 = \frac{r(U_1V_2 + U_2V_1)R}{2s\sqrt{s\tau}(u_1+u_2)(M_2N_1 - M_1N_2)}, \quad w_2 = \frac{r(U_1V_2 - U_2V_1)R}{2s\sqrt{s\tau}(u_1+u_2)(M_2N_1 + M_1N_2)}. \tag{40}$$

Итак, формулы (35), (36), (37), (38) и (40) в алгебраической форме определяют значения комплексных координат (1) для заданных u_1, u_2 с точностью до выбора знаков следующих радикалов

$$L = \sqrt{s\tau},\ R,\ U_1,\ U_2,\ V_1,\ V_2,\ M_1,\ M_2,\ N_1,\ N_2, \tag{41}$$

значения которых могут быть как вещественными, так и чисто мнимыми. Знаки подкоренных выражений радикалов (41), а следовательно, и области изменения вспомогательных переменных, определяются требованием вещественности переменных $\alpha_j, \beta_j, \omega_j$ $(j = 1,2,3)$ в (1).

3. Уравнения движения. Для вывода дифференциальных уравнений, которым подчинены переменные u_1, u_2, используем в качестве промежуточных переменные s_1, s_2, фигурирующие в [1] при исследовании областей возможности движения:

$$s_1 = \frac{x^2+z^2+r^2}{2x} = \frac{\xi+\tau+r^2}{2x}, \qquad s_2 = \frac{x^2+z^2-r^2}{2x} = \frac{\xi+\tau-r^2}{2x}. \tag{42}$$

Их производные в силу системы (1_1) имеют вид (см. также [3])

$$\frac{ds_1}{dt} = i\frac{r^2}{4x^3}(z_1+z_2)(x_1w_2 - x_2w_1), \quad \frac{ds_2}{dt} = i\frac{r^2}{4x^3}(z_1-z_2)(x_1w_2 + x_2w_1). \tag{43}$$

С другой стороны, запишем

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{\partial s_1}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial s_1}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}, \qquad \frac{ds_2}{dt} = \frac{\partial s_2}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial s_2}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}. \tag{44}$$

В подстановке (23) из (42) найдем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_1}{\partial u_1} &= -\frac{u_1u_2 - \sigma + U_1U_2}{2\sqrt{\tau}(u_1-u_2)^2}\frac{M_2^2}{U_1}, \quad & \frac{\partial s_1}{\partial u_2} &= \frac{u_1u_2 - \sigma + U_1U_2}{2\sqrt{\tau}(u_1-u_2)^2}\frac{M_1^2}{U_2},\\
\frac{\partial s_2}{\partial u_1} &= -\frac{u_1u_2 - \sigma + U_1U_2}{2\sqrt{\tau}(u_1-u_2)^2}\frac{N_2^2}{U_1}, \quad & \frac{\partial s_2}{\partial u_2} &= \frac{u_1u_2 - \sigma + U_1U_2}{2\sqrt{\tau}(u_1-u_2)^2}\frac{N_1^2}{U_2}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Из (44), (45) находим

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \frac{\sqrt{\tau}(u_1-u_2)U_1}{r^2(u_1u_2-\sigma+U_1U_2)}\Bigl(M_1^2\frac{ds_2}{dt}-N_1^2\frac{ds_1}{dt}\Bigr),\\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{\sqrt{\tau}(u_1-u_2)U_2}{r^2(u_1u_2-\sigma+U_1U_2)}\Bigl(M_2^2\frac{ds_2}{dt}-N_2^2\frac{ds_1}{dt}\Bigr).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Выразим через u_1, u_2 значения (43), используя (23), (35), (37), (40). Получим

$$
\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= \mathrm{i}\,\frac{(u_1u_2+\sigma+U_1U_2)M_1M_2(M_1N_2V_2-M_2N_1V_1)}{2\sqrt{2s}\,\tau(U_1-U_2)^2(u_1-u_2)},\\
\frac{ds_2}{dt} &= \mathrm{i}\,\frac{(u_1u_2+\sigma+U_1U_2)N_1N_2(M_2N_1V_2-M_1N_2V_1)}{2\sqrt{2s}\,\tau(U_1-U_2)^2(u_1-u_2)}.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти выражения в (46), учтем отмеченное ранее соотношение (27). После очевидных преобразований приходим к системе уравнений типа С.В. Ковалевской

$$
\begin{aligned}
(u_1-u_2)\frac{du_1}{dt} &= \sqrt{\frac{1}{2s\tau}(4s^2\chi^2-u_1^2)(u_1^2-\sigma)[r^4-(u_1+\tau)^2]}\,,\\
(u_1-u_2)\frac{du_2}{dt} &= \sqrt{\frac{1}{2s\tau}(4s^2\chi^2-u_2^2)(u_2^2-\sigma)[r^4-(u_2+\tau)^2]}\,.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Ввиду вещественности переменных u_1, u_2, для всех найденных в [1] областей в плоскости констант интегралов s, τ, отвечающих различным типам интегральных многообразий, качественный характер траекторий в переменных u_1, u_2 легко устанавливаются.

4. Сводка формул для исходных фазовых переменных. Обращая замену (1), из формул (35), (36), (37) найдем выражения для вещественных конфигурационных переменных α_j, β_j $(j=1,2,3)$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(\mathcal{A}-r^2U_1U_2)(4s^2\tau+U_1U_2)-(\tau+r^2)M_1N_1M_2N_2V_1V_2}{4r^2s\,\tau(U_1+U_2)^2},\\
\alpha_2 &= \mathrm{i}\,\frac{(\mathcal{A}-r^2U_1U_2)V_1V_2-(4s^2\tau+U_1U_2)(\tau+r^2)M_1N_1M_2N_2}{4r^2s\,\tau(U_1+U_2)^2},\\
\alpha_3 &= \frac{R}{r\sqrt{2}}\,\frac{M_1M_2}{u_1+u_2},
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \mathrm{i}\,\frac{(\mathcal{B}+r^2U_1U_2)V_1V_2-(4s^2\tau+U_1U_2)(\tau-r^2)M_1N_1M_2N_2}{4r^2s\,\tau(U_1+U_2)^2},\\
\beta_2 &= -\frac{(\mathcal{B}+r^2U_1U_2)(4s^2\tau+U_1U_2)-(\tau-r^2)M_1N_1M_2N_2V_1V_2}{4r^2s\,\tau(U_1+U_2)^2},\\
\beta_3 &= -\mathrm{i}\,\frac{R}{r\sqrt{2}}\,\frac{N_1N_2}{u_1+u_2}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения

$$\mathcal{A} = [(u_1 + \tau + r^2)(u_2 + \tau + r^2) - 2(p^2 + r^2)r^2]\tau,$$

$$\mathcal{B} = [(u_1 + \tau - r^2)(u_2 + \tau - r^2) + 2(p^2 - r^2)r^2]\tau.$$

Отметим, что, в силу приведения силовых полей к ортогональной паре [4], выражения (48), (49) проекций на связанные оси неподвижных в пространстве векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ полностью определяют 3×3-матрицу $\big\|\boldsymbol{\alpha}/a \quad \boldsymbol{\beta}/b \quad (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})/ab\big\|$ направляющих косинусов подвижных осей относительно естественным образом выбранного неподвижного базиса.

Для угловых скоростей ω_j $(j = 1, 2, 3)$ из (1), (38), (40) найдем:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{R}{4rs\sqrt{s\,\tau}}\,\frac{M_2N_1U_1V_2 + M_1N_2U_2V_1}{u_1^2 - u_2^2},\\
\omega_2 &= -\frac{\mathrm{i}\,R}{4rs\sqrt{s\,\tau}}\,\frac{M_2N_1U_2V_1 + M_1N_2U_1V_2}{u_1^2 - u_2^2},\\
\omega_3 &= \frac{1}{\sqrt{2s\tau}}\frac{M_2N_2V_1 - M_1N_1V_2}{U_1 + U_2}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Интервалы изменения переменных u_1, u_2 при заданных константах интегралов s, τ определяются, как отмечалось, требованием вещественности всех исходных фазовых переменных. Формулы (48), (49), (50) определяют многозначные зависимости этих переменных от u_1, u_2 при фиксированных константах первых интегралов. Многозначность диктуется выборами знаков радикалов (41). Изменение знаков вещественных или чисто мнимых величин (41) может дать ту же самую точку интегрального многообразия $J_{s,\tau}$ или другую точку на той же компоненте связности $J_{s,\tau}$, или же точку на другой компоненте связности. Количество компонент связности интегрального многообразия определяется структурой областей изменения u_1, u_2 и количеством независимых групп радикалов, которые вдоль соответствующей траектории уравнений (47) не меняют своего знака (аналогичная, но существенно более простая ситуация имеет место в случае, изученном в работе [3]). Подробное исследование всех возникающих здесь вариантов даст описание фазовой топологии рассматриваемого решения в регулярных случаях.

1. *Харламов М.П.* Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 38–48.
2. *Харламов М.П.* Обобщение 4-го класса Аппельрота: область существования движений и разделение переменных // Нелинейная динамика. – 2006. – **2**, № 4. – С. 453–472.
3. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. математ. вестник. – 2004. – **1**, вып. 4. – С. 548–565.
4. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.

Академия гос. службы, Волгоград, Россия
`mharlamov@vags.ru`

Получено 01.08.07