УДК 531.38

©2008. **И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова**

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Дан обзор работ, посвященных проблеме понижения порядка уравнений движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. Обсуждаются различные формы уравнений динамики твердого тела и преобразования переменных, упрощающие поиск алгебраических инвариантных соотношений. На основе переменных Гесса, Харламова, Андуайе–Деприполучены новые формы уравнений движения гиростата.

Введение. Гиростатом, следуя лорду Кельвину, обычно называют твердое тело, на котором (или внутри которого) расположен симметричный ротор, вращающийся вокруг оси, жестко связанной с несущим телом. В более общем случае полагают [1, с. 219], что к телу-носителю S_0 присоединено несколько тел, изменяемых или твердых, при движении которых сохраняется распределение масс всей системы тел, т.е. в результате внутренних циклических движений не изменятся ни положение центра тяжести, ни направления главных осей, ни моменты инерции, отнесенные к центру тяжести или какой-нибудь другой точке, неизменно связанной с S_0. Таким гиростатом оказывается, например, изучавшееся Н.Е. Жуковским [2] тело с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся в безвихревом движении. В предложенной П.В. Харламовым [3] конструкции гиростата требуется, чтобы ось, закрепленная в S_0, была главной центральной осью носимого тела, а моменты инерции относительно двух других главных центральных осей этого тела были равными. Формальное, но наиболее общее определение гиростата дано в работе [4].

Движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции гиростата в его неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя в подвижных осях, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт силы тяжести, $\boldsymbol{\lambda}$ – постоянный гиростатический момент, $\mathbf{r}$ – орт, направленный из неподвижной точки к центру тяжести гиростата. Уравнения (1) допускают три первых интеграла

$$H = \frac{1}{2}A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = h, \qquad G = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = g, \qquad I = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \tag{2}$$

В 1962 г. П.В. Харламов показал, что понижение порядка дифференциальных уравнений (1) с помощью известных интегралов (2) наиболее просто осуществляется в специальной прямоугольной системе координат $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$, первая ось которой проходит через центр тяжести гиростата, а остальные выбраны так, чтобы гирационный тензор $a = A^{-1}$ имел среди компонент $a_{23} \equiv a_{32} = 0$. Задача о движении гиростата была сведена к двум дифференциальным уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок.

В этой статье продолжены исследования, начатые в работе [5]. Обсуждаются различные формы уравнений динамики твердого тела, преобразования переменных, упрощающие эти уравнения, и методы понижения порядка системы (1). На основе переменных Гесса, Харламова, Андуайе–Деприм получены новые формы уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки.

1. Специальные оси и уравнения П.В. Харламова. Пусть $\mathbf{e}_i$ – собственный вектор оператора инерции A, соответствующий диагональной компоненте A_i. Положение твердого тела в трехмерном координатном евклидовом пространстве задано ортонормированным репером $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Выберем новый ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1{}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{e}_2' &= \frac{1}{|\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1|}\left[(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1)\cos\alpha + (\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1))\sin\alpha\right], \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1'\times\mathbf{e}_2' &= \frac{1}{|\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1|}\left[(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1))\cos\alpha - (\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1)\sin\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Угол α соответствует повороту координатных осей, жестко связанных с телом, по отношению к базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Следуя работе [6, § 2.6], положим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_1(A_2 - A_3)\, r_1 r_2 r_3}{A_2(A_3 - A_1)(r_2^2 + r_3^2)^2 + A_1(A_2 - A_3)(r_3^2 - r_2^2 r_1^2)}. \tag{4}$$

Формулами (3), (4) задано преобразование от главных осей к специальным осям П.В. Харламова. В результате первая координатная ось проведена через центр масс тела, а вторая и третья направлены так, чтобы интеграл энергии принял вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\, a_{11}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\, a_{22}\hat{y}^2 + \frac{1}{2}\, a_{33}\hat{z}^2 + a_{12}\hat{x}\hat{y} + a_{13}\hat{x}\hat{z} - \nu_1, \tag{5}$$

где $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ – компоненты вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{\omega}$ (переменной составляющей момента количества движения $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ гиростата) и ν_i – компоненты единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$. В новых переменных интегралы G, I имеют тот же вид, что и в старых переменных:

$$\mathcal{G} = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\nu} = g, \qquad \mathcal{I} = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{6}$$

Изменение координатного базиса соответствует следующим преобразованиям гирационного тензора и тензора инерции гиростата:

$$a = RBA^{-1}B^T R^T, \qquad \mathcal{A} = a^{-1} = RBAB^T R^T,$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ -\dfrac{(r_2^2+r_3^2)}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_1 r_2}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_1 r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} \\ 0 & -\dfrac{r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_2}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} \end{pmatrix}.$$

Следствием (4) являются равенства $a_{23} = a_{32} = 0$, $\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{13} - \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{23} = 0$.

Рассмотрим простейшие частные случаи. Пусть $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, тогда преобразование подвижного базиса (3) не требуется, так как в исходных переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ гамильтониан имеет вид (5) с коэффициентами

$$a_{11} = A_1^{-1}, \quad a_{22} = A_2^{-1}, \quad a_{33} = A_3^{-1}, \quad a_{12} = a_{13} = 0.$$

Пусть центр масс тела находится в главной плоскости, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$. В этом случае, в соответствии с (4), зададим $\alpha = 0$. Находим выражения

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 & (A_2 - A_1)\, r_1 r_2 & 0 \\ (A_2 - A_1)\, r_1 r_2 & A_1 r_2^2 + A_2 r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

$$R = \operatorname{diag}(1,1,1), \quad a = \begin{pmatrix} A_1^{-1} r_1^2 + A_2^{-1} r_2^2 & (A_2^{-1} - A_1^{-1})\, r_1 r_2 & 0 \\ (A_2^{-1} - A_1^{-1})\, r_1 r_2 & A_1^{-1} r_2^2 + A_2^{-1} r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Понижение порядка дифференциальных уравнений (1) с помощью известных интегралов (2) осуществляется в специальной системе координат $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ наиболее простым способом, что и обусловило их появление.

Уравнения П.В. Харламова (1962) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\Big[(\hat y + \lambda_2)\frac{d\hat z}{d\hat x} - (\hat z + \lambda_3)\frac{d\hat y}{d\hat x}\Big]X + \\ &+ (a_{11}\hat x + a_{12}\hat y + a_{13}\hat z)[(\hat y + \lambda_2)^2 + (\hat z + \lambda_3)^2] + \\ &+ (\hat x + \lambda_1)\Big[\frac{1}{2}\, a_{11}\hat x^2 - \frac{1}{2}\, a_{22}\hat y^2 - \frac{1}{2}\, a_{33}\hat z^2 - \\ &- \lambda_2 a_{12}\hat x - \lambda_2 a_{22}\hat y - \lambda_3 a_{13}\hat x - \lambda_3 a_{33}\hat z - h\ \Big] = g, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\Big[(a_{11}\hat x + a_{12}\hat y + a_{13}\hat z)(\hat y + \lambda_2) - (a_{22}\hat y + a_{12}\hat x)(\hat x + \lambda_1) + X\frac{d\hat z}{d\hat x}\Big]^2 + \\ &+ \Big[(a_{11}\hat x + a_{12}\hat y + a_{13}\hat z)(\hat z + \lambda_3) - (a_{33}\hat z + a_{13}\hat x)(\hat x + \lambda_1) - X\frac{d\hat y}{d\hat x}\Big]^2 + \\ &+ \Big[\frac{1}{2}\,(a_{11}\hat x^2 + a_{22}\hat y^2 + a_{33}\hat z^2) + (a_{12}\hat y + a_{13}\hat z)\hat x - h\Big]^2 = 1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $X = (a_{33}\hat{z}+a_{13}\hat{x})(\hat{y}+\lambda_2)-(a_{22}\hat{y}+a_{12}\hat{x})(\hat{z}+\lambda_3)$, $\hat{x}$ – независимая переменная, $\hat{y}, \hat{z}$ – две зависимые переменные. Величины $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ – проекции вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{\omega}$ на специальные оси. Уравнения Харламова [7, 6] получены в предположении $\hat{x} \neq \text{const}$. Определив из уравнений (7), (8) зависимость $\hat{y}$ и $\hat{z}$ от $\hat{x}$, найдем $\hat{x}(t)$ из уравнения

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (a_{33}\hat{z} + a_{13}\hat{x})(\hat{y} + \lambda_2) - (a_{22}\hat{y} + a_{12}\hat{x})(\hat{z} + \lambda_3). \tag{9}$$

Для краткости обозначим x, y, z компоненты $\mathcal{M}_i$ кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ в базисе $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$. С помощью кинетической энергии гиростата

$$T = \frac{1}{2}\, a\, \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} - a\, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} + \frac{1}{2}\, a\, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{10}$$

уравнения П.В. Харламова (7), (8) записываются в более компактном виде:

$$\begin{gathered}
\left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right) + (y^2+z^2)\frac{\partial T}{\partial x} + \\
+ \, (T - h - y\frac{\partial T}{\partial y} - z\frac{\partial T}{\partial z})\, x = g, \\
\left[y\frac{\partial T}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial y} + \left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{dz}{dx}\right]^2 + \\
+ \left[z\frac{\partial T}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial z} - \left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}\right]^2 + (T-h)^2 = 1.
\end{gathered} \tag{11}$$

Компоненты a_{ij} и λ_i, характеризующие конструкцию гиростата, входят в уравнения (11) неявно, как коэффициенты функции T и ее производных.

2. Уравнения Гесса–Харламова. Идея исключения компонент γ_i из уравнений Эйлера–Пуассона с помощью интегралов (2) принадлежит Вильгельму Гессу [8]. Оказалось, что предложенный Гессом метод понижения порядка системы дифференциальных уравнений с первыми интегралами применим и к задаче о движении гиростата вокруг неподвижной точки. В результате изоинтегральной редукции исходные уравнения (1) могут быть сведены к векторному уравнению [6]:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times (A^{-1}\mathbf{M} - A^{-1}\boldsymbol{\lambda}) + \zeta_1\, \mathbf{r} \times \mathbf{M} + \zeta_3\, \mathbf{r} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{r}). \tag{12}$$

Предположим, что векторы $\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{r}$ не остаются коллинеарными во все время движения, и представим вектор $\boldsymbol{\gamma}$ в виде следующей суммы

$$\boldsymbol{\gamma} = \zeta_1\, \mathbf{M} + \zeta_2\, \mathbf{r} + \zeta_3 \mathbf{M} \times \mathbf{r}. \tag{13}$$

Подстановкой (13) в интегралы (2) находим коэффициенты

$$\zeta_1 = \frac{g - (T-h)\, \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{r}|^2}\,, \quad \zeta_2 = \frac{(T-h)\, |\mathbf{M}|^2 - g\, \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{r}|^2}\,, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{r}|^2},$$

где $$T = \frac{1}{2}\, A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \qquad f = |\mathbf{M}\times\mathbf{r}|^2 - |(T-h)\,\mathbf{M} - g\mathbf{r}|^2.$$

Уравнение (12) не содержит $\boldsymbol{\gamma}$ и описывает динамику вектора кинетического момента $\mathbf{M}$ в подвижном базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, жестко связанном с корпусом гиростата. Как следует из [6, с. 207], функция $f(\mathbf{M})^{-\frac{1}{2}}$ является интегрирующим множителем уравнения (12), поэтому одного дополнительного и не зависящего явно от времени интеграла достаточно для сведения (12) к квадратурам. Элементарные преобразования позволяют записать f в виде полинома шестой степени от трех неизвестных – компонент M_i вектора кинетического момента:

$$\begin{aligned} f = {} & (|\mathbf{M}|^2 - g^2)(1-(T-h)^2) - [\mathbf{M}\cdot\mathbf{r} - (T-h)\,g]^2 \equiv \\ & \equiv - T^2\,|\mathbf{M}|^2 + 2hT\,|\mathbf{M}|^2 + 2gT\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{M}|^2\,(1-h^2) - \\ & - (\mathbf{M}\cdot\mathbf{r})^2 - 2hg\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{r} - g^2. \end{aligned} \tag{14}$$

П.В. Харламов показал [6, §3.6], что в специальных осях уравнения (12) имеют наиболее простой вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}}_1 = {} & (\mathcal{M}_1 - \lambda_1)(a_{13}\mathcal{M}_2 - a_{12}\mathcal{M}_3) - (\mathcal{M}_2 - \lambda_2)a_{22}\mathcal{M}_3 + \\ & + (\mathcal{M}_3 - \lambda_3)a_{33}\mathcal{M}_2, \\ \dot{\mathcal{M}}_2 = {} & (\mathcal{M}_1 - \lambda_1)(a_{11}\mathcal{M}_3 - a_{13}\mathcal{M}_1) + (\mathcal{M}_2 - \lambda_2)a_{12}\mathcal{M}_3 + \\ & + (\mathcal{M}_3 - \lambda_3)(a_{13}\mathcal{M}_3 - a_{33}\mathcal{M}_1) - \zeta_1\mathcal{M}_3 + \zeta_3\mathcal{M}_2, \\ \dot{\mathcal{M}}_3 = {} & (\mathcal{M}_1 - \lambda_1)(a_{12}\mathcal{M}_1 - a_{11}\mathcal{M}_2) + (\mathcal{M}_2 - \lambda_2)(a_{22}\mathcal{M}_1 - a_{12}\mathcal{M}_2) - \\ & - (\mathcal{M}_3 - \lambda_3)a_{13}\mathcal{M}_2 + \zeta_1\mathcal{M}_2 + \zeta_3\mathcal{M}_3, \end{aligned} \tag{15}$$

где $$\zeta_1 = \frac{g - (T-h)\,\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2},$$

$$f = \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 - (T-h)^2(\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2) + 2g(T-h)\mathcal{M}_1 - g^2,$$

кинетическая энергия T задана формулой (10).

Как следует из (11), (12), структуру уравнений движения вполне определяют функции $\frac{1}{2}\, A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$, $|A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}|^2$, $(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{r}$. Используем эти функции в качестве основных переменных. Введем следующие обозначения:

$$T = \frac{1}{2}\, A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mu = |A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}|^2, \quad x = (A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{r},$$

$$v = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda})x^{-1}, \quad w = |\boldsymbol{\omega}|^2 - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r} + v^2.$$

Тогда уравнения движения гиростата (1) могут быть записаны в форме

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\,\mu}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & g & T-h \\ g & \mu & x \\ T-h & x & 1 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & v \\ x & \mu & 2T \\ v & 2T & w \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$\left(\mu - x^2\right)\frac{dT}{dt} = \left(T - \frac{1}{2}\,vx\right)\frac{d\mu}{dt} + \left[g - (T-h)\,x\right]\frac{dx}{dt}. \tag{18}$$

Кроме трех основных переменных, уравнения (16)–(18) содержат величины v, w, зависимость которых от T, μ, x определяется двумя дополнительными алгебраическими соотношениями. Уравнения Эйлера–Пуассона, записанные в виде (16)–(18), называют *уравнениями В. Гесса* [8]. Заметим, что П.А. Шифф [9] получил дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям В. Гесса. Уравнения Шиффа не содержат вспомогательных переменных v, w, они связывают переменные x, μ, T и компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

3. Углы Эйлера и канонические переменные для специальных осей. Положение твердого тела в пространстве определено тремя независимыми координатами – углами Эйлера φ, θ, ψ. Найдем выражения фазовых переменных $\mathcal{M}_i, \nu_i$ через импульсы $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ и углы Эйлера θ, φ, ψ :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 = p_\varphi, \;\; \mathcal{M}_2 = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi, \\
&\mathcal{M}_3 = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi; \\
&\nu_1 = \cos\theta, \;\; \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \;\; \nu_3 = \sin\theta\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{19}$$

Положим $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$. Обратное к (19) преобразование дают формулы

$$\begin{aligned}
&p_\varphi = \mathcal{M}_1, \;\; \varphi = \mathrm{arctg}(\nu_2/\nu_3), \;\; p_\psi = \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \\
&p_\theta = \frac{\mathcal{M}_2\nu_3 - \mathcal{M}_3\nu_2}{\sqrt{\nu_2^2 + \nu_3^2}}, \quad \theta = \arccos\nu_1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Подстановкой соотношений (19) в (5) найдем гамильтониан

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} =&\frac{1}{2}\,a_{11}(p_\varphi - \lambda_1)^2 + \frac{1}{2}\,a_{22}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi - \lambda_2\right)^2 + \\
&+ \frac{1}{2}\,a_{33}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi - \lambda_3\right)^2 + \\
&+ a_{12}\,(p_\varphi - \lambda_1)\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi - \lambda_2\right) + \\
&+ a_{13}\,(p_\varphi - \lambda_1)\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi - \lambda_3\right) - \cos\theta.
\end{aligned}$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\psi},$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}, \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}, \qquad \frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi}.$$

Переменная ψ не входит явно в гамильтониан $\mathcal{H}$, поэтому соответствующий импульс p_ψ постоянен. Исключением одного из оставшихся импульсов (p_φ или p_θ) из уравнений и заменой времени, получим систему канонических уравнений второго порядка.

Описать движение тела вокруг неподвижной точки можно уравнениями Лагранжа, в которых углы Эйлера являются обобщенными координатами. А.Д. Билимович [10] первым применил известные методы аналитической механики для понижения порядка такой системы: он записал уравнения Лагранжа и Рауса, перешел к уравнению Якоби, показал, что задача может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = P_3 + VP_2\sqrt{V_1P_2}, \tag{21}$$

где $x = \mathrm{tg}(\theta/2)$, $y = \mathrm{tg}(\varphi/2)$, $' \stackrel{\mathrm{def}}{=} d/dx$; V, V_1 – достаточно громоздкие рациональные функции переменных x, y; P_2, P_3 – полиномы второй и третьей степени относительно производной y' с коэффициентами, рациональными функциями x, y.

Общие уравнения, описывающие динамику вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на единичной сфере S^2, имеют вид

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = -|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|^2\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \Gamma, \tag{22}$$

$$\Gamma = -c\dot{\boldsymbol{\gamma}} + A^{-1}\left\{(A(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}) + cA\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\lambda}) \times (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + c\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}\right\},$$

где

$$c = \frac{g}{A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}} - \frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}} - \frac{A\boldsymbol{\gamma}\cdot(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma})}{A\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma}}.$$

Введением двух независимых координат на S^2 и заменой времени, с последующим использованием интеграла энергии, уравнения (22) различными способами могут быть приведены к одному уравнению вида (21). В работах [11] – [14] аналогичные (21) уравнения второго порядка были записаны в различных координатах, задающих пространственную ориентацию гиростата. Работы [15, 16] развивают эти исследования.

4. Центр масс принадлежит главной оси инерции. Некоторые частные решения уравнений Эйлера–Пуассона были найдены в предположении, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции. Симметрии этого случая позволяют вводить удобные фазовые переменные и записывать дифференциальные уравнения, предназначенные для нахождения простых точных решений, выражаемых в терминах хорошо изученных функций. В работе [17] Н. Ковалевский применил метод вариации постоянных к интегрируемому случаю Эйлера, записал в достаточно простой форме уравнения движения твердого тела при ограничениях $A_2 \neq A_3$, $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = 0$, нашел новое частное решение уравнений Эйлера–Пуассона. Аналогичные уравнения были получены С.А. Чаплыгиным [18] и П. Филдом [19].

В 1963 году П.В. Харламов показал, что при ограничениях

$$A_2 \neq A_3, \quad \mathbf{r} = (r_1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$$

уравнения (1) движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки могут быть записаны в виде системы *уравнений Н. Ковалевского*:

$$\begin{aligned}
&\sigma''\tau + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma + (a_3\omega_1 + a_0)\tau' + a_4\tau + a_5\omega_1^2 + 2a_0\omega_1 = 0,\\
&\sigma\tau'' + \frac{1}{2}\sigma'\tau' + b_1 + b_2\sigma + (b_3\omega_1 - b_0)\sigma' + b_4\tau + b_5\omega_1^2 + 2b_0\omega_1 = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

где ω_1– независимая переменная, $' \overset{\text{def}}{=} d/d\omega_1$, зависимыми переменными являются

$$\sigma = (A_2 - A_3)\,\omega_2^2/A_1, \quad \tau = (A_2 - A_3)\,\omega_3^2/A_1,$$

постоянные a_i, b_i – рациональные функции параметров A_i, λ_1 и константы энергии h :

$$a_0 = \frac{\lambda_1}{A_2}, \quad a_1 = -\frac{h}{A_2}, \quad a_2 = \frac{A_1}{A_2 - A_3}, \quad a_3 = \frac{A_1 - 2A_3}{A_2},$$

$$a_4 = \frac{2A_1A_2 + 2A_3^2 - 2A_2A_3 - A_1A_3}{(A_2 - A_3)A_2}, \quad a_5 = \frac{3A_1 - 2A_2}{A_2},$$

$$b_0 = \frac{\lambda_1}{A_3}, \quad b_1 = -\frac{h}{A_3}, \quad b_3 = \frac{2A_2 - A_1}{A_3}, \quad b_4 = \frac{A_1}{A_2 - A_3},$$

$$b_2 = \frac{2A_1A_3 + 2A_2^2 - 2A_2A_3 - A_1A_2}{(A_2 - A_3)A_3}, \quad b_5 = \frac{3A_1 - 2A_3}{A_3}.$$

Интегралы уравнений (23) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma'\tau - \sigma\tau' + c_0 + (a_1 - b_1)\omega_1 - (b_3\omega_1 - b_0)\sigma + (a_3\omega_1 + a_0)\tau +\\
&+ \frac{1}{3}(a_5 - b_5)\omega_1^3 + (a_0 - b_0)\omega_1^2 = 0,\\
&d_1(\sigma')^2\tau + \sigma(\tau')^2 + d_0 + \sigma'\tau(d_2\omega_1 + d_3) + d_4\sigma^2 + \sigma\tau'(d_5\omega_1 + d_6) +\\
&+ (d_7\tau + d_8\omega_1^2 + d_9\omega_1 + d_{10})\sigma + d_{11}\tau^2 + (d_{12}\omega_1^2 + d_{13}\omega_1 + d_{14})\tau +\\
&+ d_{15}\omega_1^4 + d_{16}\omega_1^2 = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

они образуют замкнутую подсистему второго порядка.

5. Центр масс принадлежит главной плоскости инерции. Все частные решения задачи о движении гиростата вокруг неподвижной точки получены при условии, что центр масс тела-носителя находится в одной из главных плоскостей инерции. Поэтому особый интерес представляет исследование свойств уравнений движения при этом условии. В работе [20] показано, что в случае

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0), \ \ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0),$$

когда гиростатический момент принадлежит главной плоскости, которая содержит центр масс гиростата, система (1) сводится к одному интегродифференциальному уравнению.

Интегродифференциальное уравнение Е.И. Харламовой [20]:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\left\{\left[2\frac{dY}{dx} + a_{33}(x + \lambda_1 - iy - i\lambda_2)\right]\left[(\nu_1^0 + i\nu_2^0)\ \exp\int_{x_0}^{x} \frac{ia_{33}\,d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))} + \right.\right. \\ + \int_{x_0}^{x} [(a_{22} - ia_{12})y(\zeta) + (a_{12} - ia_{11})\zeta]\,\frac{dY(\zeta, y(\zeta))}{d\zeta}\left(\exp\int_{\zeta}^{x}\frac{ia_{33}\,d\tau}{X(\tau, y(\tau))}\right)\times \\ \left.\left.\times\frac{d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))}\right]\right\} = a_{33}g + (a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{11}x^2 - 2h)\frac{dY}{dx},\end{gathered}$$

где

$$X(x, y) = a_{12}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{33}\lambda_2,$$

$$Y(x, y) = \frac{1}{2}\,(a_{11} - a_{33})x^2 + \frac{1}{2}\,(a_{22} - a_{33})y^2 + (a_{12}x - a_{33}\lambda_2)y - a_{33}\lambda_1 x.$$

Это уравнение связывает компоненты x, y вектора $\mathcal{A}\boldsymbol{\omega}$ в специальных осях координат и тем самым определяет функцию $y(x)$. Если эта функция найдена, то зависимость $\nu_1(x), \nu_2(x)$ устанавливается из соотношения

$$\begin{gathered}\nu_1 + i\nu_2 = (\nu_1^0 + i\nu_2^0)\exp\int_{x_0}^{x}\frac{ia_{33}\,d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))} + \int_{x_0}^{x}[(a_{22} - ia_{12})y(\zeta) + \\ +(a_{12} - ia_{11})\zeta]\,\frac{dY(\zeta, y(\zeta))}{d\zeta}\left(\exp\int_{\zeta}^{x}\frac{ia_{33}\,d\tau}{X(\tau, y(\tau))}\right)\frac{d\zeta}{X(\zeta, y(\zeta))}.\end{gathered}$$

Интегродифференциальное уравнение содержит выражения, трансцендентные по отношению к $y(x)$. Для изучения условий существования алгебраических инвариантных соотношений, связывающих y и x, это уравнение было преобразовано в [21] к более удобной форме. В частности, в [21] введена новая независимая переменная σ, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{a_{33}}{s}\frac{dx}{d\sigma} = a_{12}x + (a_{22} - a_{33})y - a_{33}\lambda_2,$$

где s – постоянный параметр, используемый для упрощения получающихся выражений. Метод построения точных решений уравнений динамики твердого тела, основанный на использовании свойств интегродифференциального уравнения, и результаты системного анализа условий существования алгебраических инвариантных соотношений, приведшего к открытию новых решений задачи о движении гиростата, изложены в монографии [22].

Обобщение уравнений А.И. Докшевича:

$$
\begin{aligned}
&U'' + U = (a_7 V' + a_6)V'' + a_5 {V'}^2 + (a_4 V + a_3)V' + a_2 V^2 + a_1 V + a_0,\\
&(V' + b_{12}V + b_{11})\,U' - (2V'' + b_{10}V + b_9)\,U + b_8 V^2 V'' + b_{12}{V'}^3 + \\
&+ (b_7 V + b_6){V'}^2 + (b_5 V + b_4)V' + b_3 V^3 + b_2 V^2 + b_1 V = b_0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где τ – независимая переменная, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\tau$, $d\tau/dt = a_{33}z$, коэффициенты a_i, b_i – постоянные. Зависимыми переменными в (25) являются

$$
V = \frac{a_{33}}{a_{33} - a_{22}}\,x, \quad U = \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{1}{2}\,x^2 \left[\frac{2a_{11} - a_{22}}{a_{33} - a_{22}} + \frac{3a_{12}^2}{(a_{33} - a_{22})^2}\right], \tag{26}
$$

где x, z – компоненты вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$. Параметры гиростата ограничены следующими условиями: $a_{13} = 0$, $a_{22} \neq a_{33}$, $\lambda_3 = 0$.

Выразим коэффициенты a_i, b_i через компоненты a_{ij} гирационного тензора, компоненты λ_i гиростатического момента и постоянные интегралов h, g. Для упрощения формул положим

$$
c_1 = 1 - a_{22}a_{33}^{-1}, \;\; c_2 = -a_{12}^2 a_{33}^{-2} + (a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33})a_{33}^{-2}, \;\; c_3 = a_{12}a_{33}^{-1}.
$$

Далее находим искомые соотношения:

$$
b_{12} = c_3, \;\; b_{11} = -c_3 c_1^{-1}\lambda_1 + (c_1 - 1)c_1^{-1}\lambda_2, \;\; b_{10} = 2c_2 - c_1,
$$

$$
b_9 = 2(c_1 - c_2)c_1^{-1}\lambda_1 + 2c_3 c_1^{-1}\lambda_2, \;\; b_8 = c_1^2 + c_3^2 - b_{10}, \;\; 2b_7 = -b_8 + 3c_3^2,
$$

$$
2b_6 = 4b_{11}c_3 - b_9, \;\; b_5 = -a_6 c_3, \;\; b_4 = -a_6 b_{11}, \;\; 2b_3 = c_1^2 c_2 - b_{10}^2,
$$

$$
2b_2 = -(b_9 + 2c_3 b_{11})b_{10}, \;\; b_1 = c_1 b_9^2/4 - c_1 a_0 - c_2 b_{11}^2 - c_3 b_9 b_{11},
$$

$$
2b_0 = 2ga_{33}^{-1} + b_9 b_{11}^2, \;\; a_7 = -3c_3, \;\; a_6 = b_9 - b_{11}c_3, \;\; 2a_5 = 3c_1 - 2c_2 - 1,
$$

$$
a_4 = (c_2 - 1)c_3, \;\; a_3 = (c_2 - 1)b_{11}, \;\; 2a_2 = (c_2 - 1)b_{10},
$$

$$
a_1 = b_9 c_2 - b_{11}c_3, \;\; 4a_0 = 4ha_{33}^{-1} + b_9^2 - 2b_{11}^2 - \lambda_1 b_9 + 2\lambda_2 b_{11}.
$$

Заметим, что из интеграла $\mathcal{I} = 1$ можно получить дополнительное дифференциальное уравнение в виде полинома второй степени относительно U, U' с коэффициентами, зависящими от V, V', V''. В этом случае первое уравнение (25) будет следствием остальных уравнений.

Для многих известных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона характерна простая зависимость переменной V от τ: $V = a\tau + b$ в случае

Гриоли, $V = a\cos\lambda\tau$ в случаях Стеклова и Горячева, $V = a\cos\lambda\tau + b$ в случае Ковалевского, $V = a\cos^{3/2}\lambda\tau$ в случае Чаплыгина и т.д. Это свойство позволяет записать первое уравнение (25) в виде неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$U^{''} + U = F(\tau).$$

Система уравнений (25) является обобщением *уравнений Н.И. Мерцалова* и *А.И. Докшевича* [23], описывающих движения твердого тела.

Новая форма уравнений. Предположим, что центр масс тела-носителя и гиростатический момент расположены в главной плоскости эллипсоида инерции гиростата:

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0). \tag{27}$$

Введем новые переменные x, τ, μ по формулам

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{2A_3}}\left[(A_1\omega_1 + \lambda_1)r_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)r_2\right], \\
\tau &= \frac{1}{2A_3}\left[A_1A_3\omega_1^2 + A_2A_3\omega_2^2 - (A_1\omega_1 + \lambda_1)^2 - (A_2\omega_2 + \lambda_2)^2\right] - h + h_0, \\
\mu &= \frac{1}{2A_3}\left[(A_1\omega_1 + \lambda_1)^2 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)^2 + A_3^2\omega_3^2\right] - h_0.
\end{aligned} \tag{28}$$

В этом случае дифференциальные уравнения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\Big[((\tau + \mu)\,x - g_0)x^{'} + (\mu + h_0 - x^2)\tau^{'} + b_0x^2 + b_3x - \tau\Big]^2 - \\
&- (b_0x^2 + b_3x - \tau)(x - b_4)^2 b_1 = 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&\left[1 - (\tau + \mu)^2\right] x^{'2} + 2\left[(\tau + \mu)\,x - g_0\right] x^{'}\tau^{'} + \\
&+ (\mu + h_0 - x^2)\,\tau^{'2} + (b_0x^2 + b_3x - \tau)\,b_2 = 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

где μ – независимая переменная, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\mu$, постоянные коэффициенты b_i, h_0, g_0 выражаются через параметры A_i, r_i, λ_i и константы h, g :

$$b_0 = \frac{(A_1 - A_3)(A_3 - A_2)}{[(A_2 - A_3)A_1r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2r_2^2]},$$

$$b_1 = \frac{(A_1 - A_2)^2A_3^2r_1^2r_2^2}{A_1A_2[(A_2 - A_3)A_1r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2r_2^2]}, \quad b_2 = \frac{(A_3 - A_2)r_1^2}{A_2} + \frac{(A_3 - A_1)r_2^2}{A_1},$$

$$b_3 = \frac{(r_1\lambda_1(A_3 - A_2) + r_2\lambda_2(A_3 - A_1))\sqrt{2A_3}}{[(A_2 - A_3)A_1r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2r_2^2]}, \quad b_4 = \frac{(\lambda_1r_2A_2 - \lambda_2A_1r_1)}{(A_2 - A_1)r_1r_2\sqrt{2A_3}},$$

$$g_0 = g/\sqrt{2A_3}, \quad h_0 = h + \frac{A_3(r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2)^2 - A_1\lambda_2^2 - A_2\lambda_1^2}{2[(A_2 - A_3)A_1r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2r_2^2]}.$$

Функциональная зависимость $\mu(t)$ задана дополнительным уравнением

$$\frac{A_3}{2}\dot{\mu}^2 = \mu + h_0 - x^2 - g_0^2 + 2g_0 x\,(\tau+\mu) - (\mu+h_0)(\tau+\mu)^2. \qquad (31)$$

Уравнения (29), (30) получены в предположении

$$(A_2 - A_3)A_1 r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2 r_2^2 \neq 0, \qquad \mu \neq \mathrm{const}.$$

В работе [24] перечислены все возможные варианты, когда действительная функция времени $\mu = |A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}|^2$ постоянна вдоль какой-либо траектории уравнений (1). Эти случаи суть решение Эйлера–Жуковского $(\mathbf{r} = 0)$, равномерные вращения вокруг вертикали, частные решения при условиях Лагранжа $(A_2 = A_3,\ r_2 = r_3 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$ и Гесса–Сретенского

$$\Big(r_1\sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2\sqrt{A_2(A_1 - A_3)},\ \ r_3 = \lambda_3 = 0,\ \ A_1 > A_3 > A_2\Big),$$

соответствующие прецессионным движениям тела-носителя.

В случае $r_1 r_2 = 0$ уравнение (29) упрощается:

$$\Big[((\tau+\mu)\,x - g_0)x^{'} + (\mu + h_0 - x^2)\tau^{'} + b_0 x^2 + b_3 x - \tau\Big]^2 - (b_0 x^2 + b_3 x - \tau)\widetilde{b}_1 = 0,$$

где

$$\widetilde{b}_1 = \frac{(\lambda_1 r_2 A_2 - \lambda_2 A_1 r_1)^2 A_3}{2A_1 A_2[(A_2 - A_3)A_1 r_1^2 + (A_1 - A_3)A_2 r_2^2]}.$$

Заметим, что в (29)–(31) использованы фактически те же переменные, что и в уравнениях (16)–(18).

6. Переменные Андуайе–Депри[1] для специальных осей. Используем следующие обозначения: $OXYZ$ – неподвижный триэдр с началом в точке подвеса, $Oxyz$ – специальные оси, полученные преобразованием (3), (4), Σ – плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и проходящая через точку закрепления тела. Тогда переменные Андуайе–Деприи [26] таковы: I_1 – проекция вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ на подвижную ось Ox, I_2 – модуль вектора кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, I_3 – проекция вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ на неподвижную ось OZ (вертикаль), φ_1 – угол между осью Ox и линией пересечения Σ с Oyz, φ_2 – угол между линиями пересечения Σ с плоскостями Oyz и OXY, φ_3 – угол между осью OX и линией пересечения Σ с OXY. Сопряженные с I_1, I_2, I_3 переменные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ являются углами, изменяющимися по модулю 2π. Зависимость фазовых переменных от канонических переменных Андуайе–Деприи выражена следующими формулами:

$$\mathcal{M}_1 = I_1, \quad \mathcal{M}_2 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1, \quad \mathcal{M}_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1, \qquad (32)$$

[1] История создания этих переменных изложена в статье [25].

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = \cos\eta\cos\zeta - \sin\eta\sin\zeta\cos\varphi_2,\\
&\nu_2 = (\sin\eta\cos\zeta + \cos\eta\sin\zeta\cos\varphi_2)\sin\varphi_1 + \sin\zeta\cos\varphi_1\sin\varphi_2,\\
&\nu_3 = (\sin\eta\cos\zeta + \cos\eta\sin\zeta\cos\varphi_2)\cos\varphi_1 - \sin\zeta\sin\varphi_1\sin\varphi_2,
\end{aligned} \tag{33}$$

где $\cos\eta = I_1/I_2$, $\cos\zeta = I_3/I_2$. Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}
&I_1 = \mathcal{M}_1,\ \ \varphi_1 = \operatorname{arctg}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_3),\ \ I_3 = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\nu},\\
&I_2 = |\boldsymbol{\mathcal{M}}|,\ \ \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{(\mathcal{M}_3\nu_2 - \mathcal{M}_2\nu_3)}{\sqrt{\mathcal{M}_2^2+\mathcal{M}_3^2}}\,\frac{|\boldsymbol{\mathcal{M}}|}{|\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\boldsymbol{\nu}|}\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Соотношения (33) могут быть записаны в векторной форме

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mathcal{M}}\,\frac{I_3}{I_2^2} + (\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\mathbf{r})\,\frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}\,\sin\varphi_2 + \boldsymbol{\mathcal{M}}\times(\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\mathbf{r})\,\frac{\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}{I_2^2\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}\,\cos\varphi_2. \tag{35}$$

Гамильтониан рассматриваемой механической системы является функцией переменных Андуайе–Деприи

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} =& \frac{1}{2}\,a_{11}\,I_1^2 + \frac{1}{2}\,a_{22}\,(I_2^2 - I_1^2)\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\,a_{33}\,(I_2^2 - I_1^2)\cos^2\varphi_1 +\\
&+ a_{12}(I_1 - \lambda_1)\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1 + a_{13}(I_1 - \lambda_1)\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1 +\\
&- [a_{22}\lambda_2\sin\varphi_1 + a_{33}\lambda_3\cos\varphi_1]\,\sqrt{I_2^2 - I_1^2} - \frac{I_1 I_3}{I_2^2} -\\
&- (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3)I_1 + \frac{1}{I_2^2}\,\sqrt{I_2^2 - I_3^2}\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения, порождаемые гамильтонианом (36), выглядят так:

$$\dot\varphi_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_i},\ \ \dot I_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_i},\ \ i = \overline{1,3}. \tag{37}$$

Переменная φ_3 является циклической координатой, так как не входит явно в выражение $\mathcal{H}$. Из (37) находим

$$I_3 = \text{const},\quad \dot\varphi_3 = -\frac{I_1}{I_2^2} - \frac{I_3\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{I_2^2\sqrt{I_2^2 - I_3^2}}\,\cos\varphi_2. \tag{38}$$

Уравнения (38) достаточно просто записываются в фазовых переменных:

$$I_3 = g,\quad \dot\varphi_3 = \frac{g\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{M}|^2 - g^2}\quad \text{или}\quad \dot\varphi_3 = \frac{g\,\nu_1 - \mathcal{M}_1}{|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2 - g^2}.$$

Запишем уравнение Гесса (16) в канонических переменных Андуайе–Деприи:

$$\frac{1}{2}\frac{d|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2}{dt} \equiv I_2\frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{I_2^2-I_1^2}\sqrt{I_2^2-I_3^2}}{I_2}\,\sin\varphi_2. \tag{39}$$

Предположим теперь, что в некоторой области фазового пространства $\partial\mathcal{H}/\partial\varphi_2 \neq 0$, так что уравнение $\mathcal{H}(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2; g) = h$ в этой области позволяет определить координату φ_2 как функцию от I_1, I_2, φ_1 и h, g :

$$\varphi_2 = \mathcal{K}(I_1, \varphi_1, I_2; h, g). \tag{40}$$

Исключив явную зависимость от φ_2 на фиксированном уровне $\mathcal{H} = h$, мы затем исключаем переменную t, сопряженную к $\mathcal{H}$. В результате новый гамильтониан запишем в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \arccos\Bigg(&\frac{1}{2\sqrt{I_2^2-g^2}\sqrt{I_2^2-I_1^2}}\,\big\{2(h-c_0)I_2^2 - a_{11}\,I_1^2I_2^2 - \\ &- I_2^2(I_2^2-I_1^2)(a_{22}\,\sin^2\varphi_1 + a_{33}\,\cos^2\varphi_1) + c_1I_1I_2^2 + 2gI_1 - \\ &- 2(I_1-\lambda_1)I_2^2\sqrt{I_2^2-I_1^2}\,(a_{12}\sin\varphi_1 + a_{13}\cos\varphi_1) + \\ &+ 2I_2^2\sqrt{I_2^2-I_1^2}\,(a_{22}\lambda_2\sin\varphi_1 + a_{33}\lambda_3\cos\varphi_1)\big\}\Bigg),\end{aligned} \tag{41}$$

где $c_0 = \dfrac{1}{2}\,a\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}$, $c_1 = 2(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + a_{13}\lambda_3)$.

Порождаемая гамильтонианом (41) *редуцированная* гамильтонова система дифференциальных уравнений имеет второй порядок:

$$\frac{dI_1}{dI_2} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\varphi_1}, \qquad \frac{d\varphi_1}{dI_2} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial I_1}. \tag{42}$$

Проинтегрировав систему (42), найдем величины I_1, φ_1 как функции от переменной I_2. Зависимость I_2 от времени t найдем из уравнения (39), выразив φ_2 через I_2 с учетом (40) и решений $I_1(I_2), \varphi_1(I_2)$ системы (42).

Дифференциальные уравнения (42) могут быть записаны в виде

$$\frac{dI_1}{dI_2} = -\varkappa^{-1}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_1}, \qquad \frac{d\varphi_1}{dI_2} = \varkappa^{-1}\,\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}, \tag{43}$$

где $\varkappa^2 = I_2^2 - g^2 - \Psi^2$, $\Psi = -\sqrt{I_2^2-g^2}\,\cos\mathcal{K}$.

В развернутом виде правые части уравнений (42) содержат радикалы и тригонометрические функции. Для упрощения уравнений (42) преобразуем переменные $(I_1, \varphi_1) \to (u, v)$ по формулам

$$I_1 = I_2\frac{2u}{1+u^2}, \;\; \sqrt{I_2^2-I_1^2} = I_2\frac{1-u^2}{1+u^2}, \;\; \sin\varphi_1 = \frac{2v}{1+v^2}, \;\; \cos\varphi_1 = \frac{1-v^2}{1+v^2}.$$

Подставим эти выражения в (37), в результате несложных упрощений получим новую форму уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки:

$$\begin{aligned}
&u^{'} I_2 P_1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)} + 2v^{'} I_2^4 P_2 \frac{(1-u^2)^3}{(1+v^2)} + uP_1 = 0, \\
&v^{'} = \frac{(1+u^2)(1+v^2)P_1}{I_2(1-u^2)^2\sqrt{F}}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{F}}{2I_2(1+u^2)^2(1+v^2)^2},
\end{aligned} \tag{44}$$

где I_2 – независимая переменная системы второго порядка, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dI_2$, u, v – две зависимые переменные, $F(u,v,I_2), P_1(u,v,I_2), P_2(u,v)$ – полиномы.

Заменой переменных $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \to (s, \phi_1, \phi_2)$ по формулам

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s}\, \sin\phi_2, \;\; \mathcal{M}_2 = \frac{1}{s}\, \cos\phi_2 \sin\phi_1, \;\; \mathcal{M}_3 = \frac{1}{s}\, \cos\phi_2\cos\phi_1 \tag{45}$$

преобразуем кинетическую энергию (10) к виду

$$\begin{aligned}
T = &\frac{a_{11}}{2s^2}(\sin\phi_2 - \lambda_1 s)^2 + \frac{a_{22}}{2s^2}(\cos\phi_2\sin\phi_1 - \lambda_2 s)^2 + \\
&+ \frac{a_{33}}{2s^2}(\cos\phi_2\cos\phi_1 - \lambda_3 s)^2 + \\
&+ \frac{1}{s^2}(\sin\phi_2 - \lambda_1 s)[a_{12}(\cos\phi_2\sin\phi_1 - \lambda_2 s) + a_{13}(\cos\phi_2\cos\phi_1 - \lambda_3 s)].
\end{aligned}$$

С учетом этого выражения уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки записываются в виде

$$\begin{cases}
\phi_1^{'} = \varkappa^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi_2}\,, \quad \phi_2^{'} = -\varkappa^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi_1} + s^{-1}\operatorname{tg}\phi_2, \quad \dfrac{d\,s}{dt} = \varkappa, \\
\varkappa = s\cos\phi_2\sqrt{s^2 - g^2 s^4 - \Phi^2}, \quad \Phi = [T - h - g\,s\sin\phi_2]\; s/\cos\phi_2.
\end{cases} \tag{46}$$

Первые два уравнения (46) образуют замкнутую подсистему второго порядка, s – независимая переменная, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/ds$; ϕ_1, ϕ_2 – две зависимые переменные. Если зависимость ϕ_1, ϕ_2 от s найдена, то функция $s(t)$ определится из третьего уравнения (46).

В подвижном базисе $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$ компонентами орта вертикали $\boldsymbol{\nu}$ являются

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = gs\sin\phi_2 + s^{-1}\,\Phi\cos\phi_2, \\
&\nu_2 = [gs\cos\phi_2 - s^{-1}\Phi\sin\phi_2]\sin\phi_1 + \sqrt{1 - g^2 s^2 - s^{-2}\Phi^2}\,\cos\phi_1, \\
&\nu_3 = [gs\cos\phi_2 - s^{-1}\Phi\sin\phi_2]\cos\phi_1 - \sqrt{1 - g^2 s^2 - s^{-2}\Phi^2}\,\sin\phi_1.
\end{aligned}$$

В неподвижном базисе $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ кинетический момент $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ имеет компоненты

$$\mathfrak{M}_1 = g, \;\; \mathfrak{M}_2 = \sqrt{s^{-2} - g^2}\cos\phi_3, \;\; \mathfrak{M}_3 = \sqrt{s^{-2} - g^2}\sin\phi_3,$$

где ϕ_3 – угол прецессии вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ – определяется из уравнения

$$\phi_3' = -\frac{s}{\varkappa}\sin\phi_2 + \frac{s}{\varkappa}\frac{g\,\Phi\cos\phi_2}{(1-g^2s^2)}. \tag{47}$$

Уравнения (29), (30), (42), (46) получены И.Н. Гашененко, они впервые публикуются в этой работе.

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – М.: Изд–во ин. лит. – Т. 2, Ч. 2. – 1951. – 555 с.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// Собр. соч.: В 7 т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 2 – С. 152–310.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. *Харламов П.В.* Гiростати // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 37–40.
5. *Гашененко И.Н., Мозалевская Г.В., Харламова Е.И.* О редукции уравнений Эйлера-Пуассона// Механика твердого тела. - 2007. - Вып. 37. – С. 69-84.
6. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения твердого тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. матем. и механика. – 1963. – **27**, вып. 4. – С. 703–707.
8. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1890. – **37**. – S. 153–181.
9. *Шифф П.А.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// Мат. сборник. – 1903. – **24**, вып. 2. – С. 169–177.
10. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки// В кн.: Сб. статей, посвященных проф. Г.К. Суслову. – Киев, 1911. – С. 23–74.
11. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.
12. *Яхъя Х.М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1976. – № 6. – С. 76–79.
13. *Яхъя Х.М.* О сведении уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки к одному дифференциальному уравнению// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 64–67.
14. *Yehia H.M.* On the reduction of the order of equations of motion of a gyrostat in an axisymmetric field// J. de Mécanique theór. et appl. –1983. – **2**, № 3. – P. 451–462.
15. *Харламов М.П.* Понижение порядка в механических системах с симметрией// Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 4–18.
16. *Мозалевская Г.В, Харламова Е.И.* Уравнения динамики твердого тела в переменных С.А. Чаплыгина// Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 9–20.
17. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
18. *Сретенский Л.Н.* О работах С.А. Чаплыгина по теоретической механике. – В кн.: Чаплыгин С.А. Собр. соч. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 3. – С. 366–376.
19. *Field P.* On the unsymmetrical top// Acta Mathematica. – 1931. – **56**. – P. 355–362; – 1934. – **62**. – P. 313–316.
20. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи// Прикл. матем. и механика. – 1966. – **30**, вып. 4. – С. 784–788.
21. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* О преобразовании интегродифференциального уравнения задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку//

Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 12–16.
22. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
23. *Докшевич А.И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Прикл. механика. – 1968. – **4**, вып. 11. – С. 95–100.
24. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата// Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
25. *Gurfil P., Elipe A., Tangren W., Efroimsky M.* The Serret-Andoyer formalism in rigid-body dynamics: I. Symmetries and perturbations// Regular and Chaotic Dynamics. – 2007. – **12**, № 4. – P. 389–425.
26. *Деприи А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости// Механика. Сб. переводов. – 1968. – № 2. – С. 3–9.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`applmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 10.07.08