ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2007. Вып. 37

УДК 576.38

©2007. **С.А. Кутепов, Г.Н. Яковенко**

УЧЕТ СИММЕТРИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Приводится теорема, которая дает возможность обнаружить неустойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений, опираясь на группу симметрий и на одно частное решение, определенное на конечном интервале независимой переменной $t \in [0,\, t_1]$. Предполагается, что решение при $t = t_1$ находится за пределами ε-окрестности. Группа симметрий "тиражирует" исходное решение, создавая новые частные решения той же системы, определенные на интервалах $t \in [0,\, \widehat{t}_1]$. У новых решений положения при $t = 0$ приближаются к началу координат, а положения при $t = \widehat{t}_1$ — остаются за пределами ε-окрестности. В качестве приложений теоремы рассмотрены вопросы устойчивости положений равновесия механических систем, в частности, твердого тела с неподвижной точкой.

Способы исследования устойчивости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) во многом определяются имеющейся о решениях ОДУ информации. Если информация ограничивается знанием правых частей ОДУ, то привлекаются общие методы теории устойчивости. В другом крайнем случае, когда известно общее решение, выяснение устойчивости сводится к исследованию непрерывности функций в том или ином смысле. Промежуточным случаем является ситуация, когда известна группа симметрий ОДУ: все решения задаются группой симметрий и решением, содержащим произвольные постоянные, число которых меньше размерности ОДУ. Частное проявление симметрии (однородность, квазиоднородность) использовалось для изучения вопросов устойчивости [1—4]. В работе формулируется теорема, которая дает возможность обнаружить неустойчивость нулевого решения, опираясь на группу симметрий и на одно частное решение ОДУ, определенное на конечном интервале независимой переменной $t \in [0,\, t_1]$. Предполагается, что решение при $t = t_1$ находится за пределами ε-окрестности. Группа симметрий "тиражирует" исходное решение, создавая новые частные решения той же системы, определенные на интервалах $t \in [0,\, \widehat{t}_1]$. У новых решений положения при $t = 0$ приближаются к началу координат, а положения при $t = \widehat{t}_1$ остаются за пределами ε-окрестности. В качестве приложений теоремы рассмотрены вопросы устойчивости положений равновесия механических систем. Предполагается, что функции, участвующие в дальнейших построениях, достаточно гладкие, в частности, ОДУ (1), (8), (18) удовлетворяют одной из теорем существования и единственности решений.

Рассматривается ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(0) = 0. \tag{1}$$

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) *устойчиво по Ляпунову* (далее просто *устойчиво*), если для общего решения $x(t, x_0)$ $(x(0, x_0) = x_0)$ выполняются условия: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x_0| < \delta, \forall t \geqslant 0, |x(t, x_0)| < \varepsilon$. Решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) *неустойчиво по Ляпунову* (далее просто *неустойчиво*), если для общего решения $x(t, x_0)$ $(x(0, x_0) = x_0)$ выполняются условия: $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists |x_0| < \delta, \exists t \geqslant 0, |x(t, x_0)| \geqslant \varepsilon$.

Определение 2. Неособенное преобразование

$$\widehat{t} = \widehat{t}(t, x), \qquad \widehat{x} = \widehat{x}(t, x) \tag{2}$$

называется *преобразованием симметрии* системы (1), если в новых переменных правые части системы

$$\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{t}} = \varphi(\widehat{x})$$

задаются теми же функциями $\varphi(\cdot)$, что и в системе (1).

Полезность понятия симметрии системы ОДУ заключается в следующем свойстве: если $\widetilde{x}(t)$ – решение системы (1), то функция $\widehat{x}(\widehat{t})$, которая параметрически (t – параметр) задается при помощи преобразования (2)

$$\widehat{t} = \widehat{t}(t, \widetilde{x}(t)), \qquad \widehat{x} = \widehat{x}(t, \widetilde{x}(t)),$$

также является решением системы (1).

Определение 3. Семейство преобразований (τ — параметр)

$$\widehat{t} = \widehat{t}(t, x, \tau), \qquad \widehat{x} = \widehat{x}(t, x, \tau) \tag{3}$$

называется *группой симметрий* системы (1) (*группой, допускаемой системой* (1)), если, во-первых, семейство (3) — группа преобразований [5], во-вторых, при каждом τ соответствующее преобразование (3) есть по определению 2 преобразование симметрии. Соответствующий группе (3) оператор

$$Y = \xi(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t, x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi(t, x) = \left.\frac{\partial \widehat{t}\,(t, x, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0},$$

$$\eta_i(t, x) = \left.\frac{\partial \widehat{x}_i\,(t, x, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$$

называется *оператором симметрий.*

Представляется перспективным развитие методов теории устойчивости в такой ситуации: информация о системе (1) частично содержится в ее группе симметрий, а частично в решении, не являющемся общим. Удобным свойством при получении результатов подобного рода является свойство неустойчивости: нулевое решение неустойчиво, если оно неустойчиво на интегральном многообразии ОДУ, содержащем начало координат. Такое многообразие создается, например, при помощи одного частного решения и однопараметрической группы симметрий. Сформулируем для этого случая теорему о неустойчивости.

Теорема. *Если для частного решения $\widetilde{x}(t)$ системы (1) и группы симметрий (3) выполняются условия:*

$$\widetilde{x}(0) = x_0 \neq 0; \qquad |x_1| \geqslant \varepsilon, \quad x_1 = \widetilde{x}(t_1), \quad t_1 > 0, \tag{4}$$

$$\forall \delta > 0, \quad \exists \tau, \quad |\widehat{x}(0,\, x_0,\, \tau)| < \delta, \quad |\widehat{x}(t_1,\, x_1,\, \tau)| \geqslant \varepsilon, \tag{5}$$

то решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) неустойчиво.

Доказательство следует из определения 1 неустойчивости и определения 3 группы симметрий.

Пример 1. Консервативная система с нулевой потенциальной энергией определяется функцией Гамильтона

$$H(q,\, p) = \frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}(q)p_ip_k,$$

где $\|b_{ik}(q)\|$ — положительно определенная матрица. Системе соответствуют уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(q)p_k, \qquad \dot{p}_l = -\frac{1}{2}\sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial b_{ik}(q)}{\partial q_l}p_ip_k. \tag{6}$$

В качестве начальных данных примем

$$\widetilde{p}_1(0) = p_0 > 0, \qquad \widetilde{p}_2(0) = 0,\, \ldots,\, \widetilde{p}_n(0) = 0, \qquad \widetilde{q}_1(0) = 0,\, \ldots,\, \widetilde{q}_n(0) = 0.$$

Вследствие положительной определенности матрицы $\|b_{ik}(q)\|$ справедливо неравенство $\dot{\widetilde{q}}_1(0) = b_{11}(0)p_0 > 0$. По непрерывности при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняется $\dot{\widetilde{q}}_1(t) > 0$, следовательно справедливо соотношение

$$\widetilde{q}_1(t_1) = \int_0^{t_1} \dot{\widetilde{q}}_1(t)dt = \varepsilon > 0.$$

Решение $\widetilde{q}(t)$, $\widetilde{p}(t)$ удовлетворяет условию (4) теоремы:

$$|\widetilde{q}(t_1),\, \widetilde{p}(t_1)| \geqslant \widetilde{q}_1(t_1) = \varepsilon > 0$$

(здесь и далее в качестве нормы $|x|$ вектора $x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ подразумевается евклидова норма $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$). С учетом определения 3 и уравнений (6) непосредственно проверяется, что группа

$$\widehat{t} = t\tau, \qquad \widehat{q}_i = q_i, \qquad \widehat{p}_i = p_i\tau^{-1}$$

— группа симметрий системы (6). При $\tau = 2p_0/\delta$ выполняется условие (5) теоремы:

$$|\widehat{q}(\widehat{t}_0),\ \ \widehat{p}(\widehat{t}_0)| = |\widetilde{q}(0),\ \ \widetilde{p}(0)\tau^{-1}| = p_0\tau^{-1} = \frac{\delta}{2} < \delta;$$

$$|\widehat{q}(\widehat{t}_1),\ \ \widehat{p}(\widehat{t}_1)| \geqslant |\widehat{q}_1(\widehat{t}_1)| = |\widehat{q}_1(t_1\tau)| = \widetilde{q}_1(t_1) = \varepsilon > 0.$$

Условия (4), (5) теоремы выполнены, решение $q(t) \equiv 0$, $p(t) \equiv 0$ — неустойчиво.

Пример 2. Тело, обладающее динамической симметрией ($0 < A = B \neq C$, случай $0 < A < B < C$ рассмотрен в примере 5), совершает движение с неподвижной точкой при отсутствии внешних моментов:

$$\dot{p} = aqr, \qquad \dot{q} = -apr, \quad \dot{r} = 0, \qquad a = \frac{A - C}{A}.$$

Изучается устойчивость перманентного вращения $p = 0$, $q = \omega_0$, $r = 0$ вокруг экваториальной оси. После замены переменных $p = x$, $q = y + \omega_0$, $r = z$ уравнения приобретают вид

$$\dot{x} = a(y + \omega_0)z, \qquad \dot{y} = -axz, \quad \dot{z} = 0. \tag{7}$$

Изучается устойчивость нулевого решения. При начальных условиях $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, $\operatorname{sign} z_0 = \operatorname{sign} a\omega_0$ справедливо

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = a\omega_0 z_0 > 0.$$

По непрерывности при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняется $\dot{x}(t) > 0$, следовательно

$$x(t_1) = \int\limits_0^{t_1} \dot{x}(t)dt = \varepsilon > 0.$$

Решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ удовлетворяет условию (4) теоремы:

$$|x(t_1),\, y(t_1),\, z(t_1)| \geqslant |x(t_1)| = \varepsilon > 0.$$

Группа

$$\widehat{t} = t\tau, \quad \widehat{x} = x, \quad \widehat{y} = y, \quad \widehat{z} = z\tau^{-1}$$

— группа симметрий системы (7). При $\tau = 2z_0/\delta$ выполняется условие (5) теоремы:

$$|\widehat{x}(\widehat{t}_0),\ \ \widehat{y}(\widehat{t}_0),\ \ \widehat{z}(\widehat{t}_0)| = |x_0,\ \ y_0,\ \ z_0\tau^{-1}| = z_0\tau^{-1} = \frac{\delta}{2} < \delta;$$

$$|\widehat{x}(\widehat{t}_1),\ \ \widehat{y}(\widehat{t}_1),\ \ \widehat{z}(\widehat{t}_1)| \geqslant |\widehat{x}(\widehat{t}_1)| = |\widehat{x}(t_1\tau)| = x(t_1) = \varepsilon > 0.$$

Условия (4), (5) теоремы выполнены. Решение $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$ — неустойчиво.

Пример 3. Рассматривается ОДУ первого порядка

$$\dot{x} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Для функции $\varphi(x)$ предполагается

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ > 0, & \text{если } 0 < x \leqslant x^*. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем, что нулевое решение уравнения (8) при условии (9) неустойчиво. Введем обозначение

$$\psi(x) = \int\limits_{x^*}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)} \tag{10}$$

(в качестве нижнего предела можно взять любое положительное число). При начальном условии $0 < x_0 < x^*$ решение $x(t)$ уравнения (8) неявно задается следующим образом

$$\psi(x(t)) = \psi(x_0) + t. \tag{11}$$

Вследствие (9) и (10) $\psi(x)$ — строго возрастающая функция, поэтому зависимость $x(t)$ определена. С учетом (9) имеет место неравенство $\dot{x}(0) = \varphi(x_0) > > 0$. По непрерывности при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняется $\dot{x}(t) > 0$, следовательно справедливо соотношение

$$x_1 = x(t_1) = \int\limits_0^{t_1} \dot{x}(t)dt = \varepsilon > 0, \tag{12}$$

и условие (4) теоремы выполнено. При необходимости значение t_1 можно уменьшить так, чтобы выполнялось $0 < \varepsilon < x^*$. Уравнение (8) допускает группу с оператором симметрий [5]

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x},$$

а также группу с оператором симметрий

$$Y_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

и группу с оператором симметрий

$$Y = tX_0 - Y_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x)(t-1)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{13}$$

Оператору (13) соответствует группа симметрий — решение уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= \widehat{t}, & \widehat{t}(0) = t, \\ \frac{d\widehat{x}}{d\tau} &= \varphi(\widehat{x})(\widehat{t} - 1), & \widehat{x}(0) = x. \end{aligned}$$

Первое уравнение имеет решение

$$\widehat{t} = te^{\tau}, \tag{14}$$

подстановка которого во второе уравнение приводит к уравнению

$$\frac{d\widehat{x}}{d\tau} = \varphi(\widehat{x})(te^{\tau} - 1), \qquad \widehat{x}(0) = x$$

и к его решению (см. обозначение (10))

$$\psi(\widehat{x}) = \psi(x) + t\,(e^{\tau} - 1) - \tau. \tag{15}$$

Так как функция $\psi(x)$ строго возрастающая, зависимость $\widehat{x}(t,\, x,\, \tau)$ определена. Группа симметрий (14), (15) уравнения (8) при каждом значении τ переводит решение $x(t)$ уравнения (8), заданное на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, в его же решение $\widehat{x}(\widehat{t})$, параметрически (t — параметр) определенное соотношениями

$$\widehat{t} = te^{\tau}, \qquad \psi(\widehat{x}) = \psi(x(t)) + t\,(e^{\tau} - 1) - \tau. \tag{16}$$

Покажем, что, если параметрам τ и t придать значения

$$\tau = \psi(x_0) - \psi(\widehat{x}_0) = \int\limits_{\widehat{x}_0}^{x_0} \frac{dx}{\varphi(x)} \quad (\text{см. } (10)), \qquad t = t_2 = (t_1 + \tau)e^{-\tau}, \tag{17}$$

то решение $\widehat{x}(\widehat{t})$ удовлетворит условию (5) теоремы. Действительно, начальные значения $\{t_0 = 0,\ x_0\}$ при помощи (16) перейдут в $\{\widehat{t_0} = 0,\ \widehat{x}_0\}$, где $\widehat{x}_0$ заранее выбрано так, что выполняется $0 < \widehat{x}_0 < \delta$. Для конечных же значений, соответствующих в (16) t_2, выполняются равенства (учитываются соотношения (11) и (12)):

$$\begin{aligned} \widehat{t_2} &= t_2 e^{\tau} = t_1 + \tau, \\ \psi(\widehat{x}(\widehat{t_2})) &= \psi(x(t_2)) + t_2 e^{\tau} - t_2 - \tau = \psi(x_0) + t_2 + t_1 + \tau - t_2 - \tau = \\ &= \psi(x_0) + t_1 = \psi(x_1) = \psi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из последней цепочки равенств, вследствие того, что функция $\psi(x)$ строго возрастает, следует $\widehat{x}(\widehat{t_2}) = \varepsilon$. Условия (4), (5) теоремы выполнены. Решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 4. Рассматривается уравнение $\ddot{x} = f(x)$, которое приводится к следующему нормальному виду

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y, \\ \dot{y} & = & f(x). \end{array} \tag{18}$$

Для функции $f(x)$ предполагается

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ > 0, & \text{если } 0 < x \leqslant x^*. \end{cases} \tag{19}$$

Покажем, что нулевое решение системы (18) при условии (19) неустойчиво. Введем обозначение

$$g(x) = 2\int\limits_0^x f(x)dx. \tag{20}$$

Функция $g(x)$ в силу (19) удовлетворяет, как и функция $f(x)$, условию (19). Нетрудно убедиться в том, что система (18) имеет первый интеграл $y^2 - g(x) = \mathrm{const}$. Изучим поведение решений системы (18) на части инвариантной поверхности

$$y^2 - g(x) = 0, \qquad y \geqslant 0. \tag{21}$$

На этом множестве выполняется $y = \sqrt{g(x)}$, в силу чего первое уравнение системы (18) приобретает вид

$$\dot{x} = \sqrt{g(x)}. \tag{22}$$

Вследствие (19), (20), функция $\varphi(x) = \sqrt{g(x)}$ удовлетворяет условию (9) примера 3, поэтому нулевое решение уравнения (22) неустойчиво, т. е. в соответствии с определением 1 существует решение $x(t)$, у которого начальное значение x_0 не превосходит заданную сколь угодно малую величину $\delta > 0$, а конечное значение x_1 превосходит фиксированную величину $\varepsilon > 0$. Аналогичная ситуация и у исходной системы (18): существует решение $x(t)$, $y(t) = \sqrt{g(x(t))}$, у которого начальная точка x_0, $y_0 = \sqrt{g(x_0)}$ сколь угодно близка к началу координат, а конечная точка x_1, $y_1 = \sqrt{g(x_1)}$ за пределами ε-окрестности.

Пример 5. Твердое тело ($0 < A < B < C$, случай $0 < A = B \neq C$ рассмотрен в примере 2) совершает движение с неподвижной точкой при отсутствии внешних моментов

$$\dot{p} = -\alpha^2 qr,\ \ \dot{q} = \beta^2 pr,\ \ \dot{r} = -\gamma^2 pq,\ \ \alpha^2 = \frac{C-B}{A},\ \ \beta^2 = \frac{C-A}{B},\ \ \gamma^2 = \frac{B-A}{C}.$$

Изучается устойчивость перманентного вращения $p = 0$, $q = -b$, $b > 0$, $r = 0$ вокруг неэкстремальной главной оси инерции. После замены переменных $p = x$, $q = y - b$, $r = z$ уравнения приобретают вид

$$\dot{x} = -\alpha^2(y-b)z, \qquad \dot{y} = \beta^2 xz, \quad \dot{z} = -\gamma^2 x(y-b). \tag{23}$$

Изучается устойчивость нулевого решения. Непосредственно проверяется наличие у системы (23) первых интегралов $\beta^2x^2+\alpha^2(y-b)^2=C_1$, $\gamma^2x^2-\alpha^2z^2= C_2$. Изучим поведение решений системы (23) на инвариантной поверхности

$$\beta^2x^2+\alpha^2(y-b)^2=\alpha^2b^2, \qquad \gamma^2x^2-\alpha^2z^2=0. \tag{24}$$

При положительных малых значениях переменных на поверхности выполняется

$$y-b=-\sqrt{b^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2}, \qquad z=\frac{\gamma}{\alpha}x, \tag{25}$$

в силу чего первое уравнение системы (23) приобретает вид

$$\dot{x}=\frac{\gamma}{\alpha}x\sqrt{\alpha^2b^2-\beta^2x^2}. \tag{26}$$

При $0<x<\alpha b/\beta$ правая часть уравнения (26) удовлетворяет условию (9) примера 3, поэтому нулевое решение уравнения (26) неустойчиво, то есть в соответствие с определением 1 существует решение $x(t)$, у которого начальное значение $x_0>0$ не превосходит заданную сколь угодно малую величину $\delta>0$, а конечное значение $x_1>0$ превосходит фиксированную величину $\varepsilon>0$. Аналогичная ситуация и у исходной системы (23): существует решение (см. (25))

$$x(t), \qquad y(t)=b-\sqrt{b^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2(t)}, \qquad z(t)=\frac{\gamma}{\alpha}x(t),$$

у которого начальная точка

$$x_0, \qquad y_0=b-\sqrt{b^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x_0^2}, \qquad z_0=\frac{\gamma}{\alpha}x_0$$

сколь угодно близка к началу координат ($y_0\approx\dfrac{\beta^2}{2b\alpha^2}x_0^2$), а конечная точка

$$x_1, \qquad y_1=b-\sqrt{b^2-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x_1^2}, \qquad z_1=\frac{\gamma}{\alpha}x_1$$

за пределами ε-окрестности ($|x_1,\ y_1,\ z_1|\geqslant|x_1|>\varepsilon$). Нулевое решение системы (23) неустойчиво. Перманентное вращение вокруг неэкстремальной главной оси инерции неустойчиво.

Отметим, что примеру 2 соответствует $\gamma=0$, уравнение (26) принимает вид $\dot{x}=0$, и из приведенных в примере 5 рассуждений не следует вывод о неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–01–00940, 07–01–00217).

1. *Зубов В.И.* Методы Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. — 241 с.

2. *Козлов В.В.* О неустойчивости равновесия в потенциальном поле // Успехи мат. наук. — 1981. — **36**, вып. 3. — С. 215–216.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. — 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1990. — 170 с.
4. *Яковенко Г.Н.* Теорема о неустойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений с симметрией // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 112—118.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Московский физико-техн. ин-т, Долгопрудный, Россия
yakovenko_g@mtu-net.ru
Получено 06.11.07