

УДК 531.55

©2007. Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская

## ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса под действием гравитационного момента. Орбитальные движения с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо. Установлен эффект убывания кинетической энергии вращательных движений спутника. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. Проведены численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

**1. Динамически несимметричный спутник.** Рассмотрим движение спутника с полостью, целиком заполненной сильно вязкой однородной жидкостью, относительно центра масс под действием момента сил гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики квазитвердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли [1].

Введем три декартовы системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2, 3]. Система координат  $Ox_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) движется поступательно вместе с центром инерции: ось  $Ox_1$  параллельна радиус-вектору перигея орбиты, ось  $Ox_2$  – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось  $Ox_3$  – нормали к плоскости орбиты. Система координат  $Oy_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) связана с вектором кинетического момента  $\mathbf{G}$ . Ось  $Oy_3$  направлена по вектору кинетического момента  $\mathbf{G}$ , ось  $Oy_2$  лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости  $Ox_1x_2$ ), ось  $Oy_1$  лежит в плоскости  $Ox_3y_3$  и направлена так, что векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  образуют правую тройку [2–4]. Оси системы координат  $Oz_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей  $Oy_i$  определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы  $\alpha_{ij}$  осей  $Oz_i$  относительно системы  $Oy_i$  выражаются через углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  по известным формулам. Ориентация вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  относительно его центра масс в системе координат  $Ox_i$  определяется углами  $\lambda$  и  $\delta$  [2–4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме

[3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\
 \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left( \frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\
 \frac{d\psi}{dt} &= G \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $L_i$  – моменты приложенных сил относительно осей  $Oy_i$ ,  $G$  – величина кинетического момента,  $A_i (i = 1, 2, 3)$  – главные центральные моменты инерции относительно осей  $Oz_i$ .

Удобно в дальнейшем наряду с переменной  $\theta$  использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику – кинетическую энергию  $T$  движения спутника относительно центра масс. Выпишем выражения для  $T$  и ее производной:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{G^2}{2} \left[ \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{A_3} \right], \\
 \frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[ \cos \theta \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - \right. \\
 &\quad \left. - L_1 \sin \psi) + \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом  $e$  и периодом обращения  $Q$ . Зависимость истинной аномалии  $\nu$  от времени  $t$  дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{\ell_0^3}}. \tag{3}$$

Здесь  $\ell_0$  – фокальный параметр орбиты,  $\omega_0$  – угловая скорость орбитального движения,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\mu$  – гравитационная постоянная.

Проекция  $L_i$  момента приложенных сил складывается из гравитационного момента  $L_i^g$  и момента вязких сил жидкости в полости  $L_i^p$ . Здесь приведена проекция на ось  $Oy_1$  гравитационного момента, на другие оси проекции по-

лучаются циклической перестановкой индексов и имеют аналогичный вид [3]

$$L_1^g = \frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \theta)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}),$$

$$S_{mj} = \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta,$$

$$\beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta. \quad (4)$$

Проекции момента вязких сил в полости  $L_i^p$  на оси  $Oy_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с учетом влияния на них гравитационных моментов имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \left\{ p [q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)] \alpha_{i1} + \right.$$

$$+ q [r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2)] \alpha_{i2} +$$

$$+ r [p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)] \alpha_{i3} +$$

$$+ \frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \left( \left[ A_2 A_3 (A_3 - A_2) \left\{ -\gamma_{31} \gamma_{33} r + \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2} [\gamma_{31} \gamma_{33} (p\alpha_{31} + \right. \right. \right.$$

$$+ q\alpha_{32}) \alpha_{33} + [(-\alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2) \gamma_{33} + (-\alpha_{23} \beta_1 + \alpha_{13} \beta_2) \gamma_{32}] (p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) +$$

$$+ [\gamma_{33}^2 \alpha_{32} + \gamma_{32} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{32} \beta_3] (p\alpha_{32} - q\alpha_{31}) \left. \right\} \alpha_{i1} +$$

$$+ A_1 A_3 (A_1 - A_3) \left\{ -\gamma_{32} \gamma_{33} r + \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2} [\gamma_{32} \gamma_{33} (p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) \alpha_{33} + \right.$$

$$+ [(-\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{11} \beta_2) \gamma_{33} + (-\alpha_{23} \beta_1 + \alpha_{13} \beta_2) \gamma_{31}] (p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) +$$

$$+ [\gamma_{33}^2 \alpha_{31} + \gamma_{31} \gamma_{33} \alpha_{33} - \gamma_{31} \beta_3] (p\alpha_{32} - q\alpha_{31}) \left. \right\} \alpha_{i2} +$$

$$+ (A_2 - A_1) \left\{ (\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) r - \frac{1}{1 - \alpha_{33}^2} [(\gamma_{32}^2 - \gamma_{31}^2) (p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) \alpha_{33} + \right.$$

$$+ [(-\alpha_{21} \beta_1 + \alpha_{11} \beta_2) \gamma_{32} + (-\alpha_{22} \beta_1 + \alpha_{12} \beta_2) \gamma_{31}] (p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) +$$

$$+ \gamma_{33} [\gamma_{32} \alpha_{31} + \gamma_{31} \alpha_{32}] (p\alpha_{32} - q\alpha_{31}) \left. \right\} \alpha_{i3} \left. \right] + [\gamma_{31} \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_1^2 -$$

$$- A_2 A_3 + A_3^2) \alpha_{i1} + \gamma_{31} \gamma_{32} q A_2 (A_1 A_3 - A_1^2 - A_2 A_3 + A_2^2) \alpha_{i1} +$$

$$+ \gamma_{31} \gamma_{32} p A_1 (A_3 A_2 - A_2^2 - A_1 A_3 + A_1^2) \alpha_{i2} + \gamma_{32} \gamma_{33} r A_3 (A_1 A_2 - A_2^2 -$$

$$- A_1 A_3 + A_3^2) \alpha_{i2} + \gamma_{32} \gamma_{33} q A_2 (A_1 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_2^2) \alpha_{i3} +$$

$$+ \gamma_{31} \gamma_{32} p A_1 (A_2 A_3 - A_3^2 - A_1 A_2 + A_1^2) \alpha_{i3} \Big) \Big\},$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2i} + \beta_3 \alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  – направляющие косинусы между системами координат  $Oy_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $Oz_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $p, q, r$  – проекции на оси  $Oz_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) соответственно вектора абсолютной угловой скорости  $\omega$  спутника относительно системы координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Величина  $\tilde{P}$  – тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил в квазистатическом приближении, обусловленный вязкой жидкостью [1]. Для простоты в уравнениях (5) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной  $P > 0$ : компоненты которого имеют вид  $\tilde{P}_{ij} = P \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера (такой вид тензор  $\tilde{P}$  имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству  $A_1 > A_2 > A_3$ , в предположении, что угловая скорость  $\omega$  движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения  $\omega_0$ , т.е.  $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1 \omega_0/G \ll 1$ . В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил. Подобная задача рассмотрена в [5] для случая, когда главные моменты инерции спутника близки друг к другу.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е.  $\vartheta \gg 1$  ( $\vartheta^{-1} \sim \varepsilon$ ), форма полости сферическая, тогда [1]

$$\tilde{P} = P \text{diag} ( 1, 1, 1 ), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{525\vartheta}. \quad (6)$$

Здесь  $\rho, \vartheta$  – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости соответственно,  $a$  – радиус полости.

С учетом рассмотренных выше предположений при построении модели видно, что второе слагаемое (с коэффициентом  $\omega_0^2$ ) в формуле проекции момента вязких сил (5) имеет порядок  $\varepsilon^2$ , а значит с точностью до малых первого порядка малости ( $P \sim \varepsilon$ ) проекции момента вязких сил имеют вид:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3} \{ p [ q^2 A_2 (A_1 - A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1) ] \alpha_{i1} +$$

$$+ q [ r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2) ] \alpha_{i2} +$$

$$+ r [ p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3) ] \alpha_{i3} \}$$

$$(i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Для решения задачи будем применять метод усреднения [6]. Рассмотрим невозмущенное движение ( $\varepsilon = 0$ ), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины  $G, \delta, \lambda, T, \nu$  обращаются в постоянные, а  $\varphi, \psi, \theta$  – эллиптические функции времени  $t$  [7]. Медленными переменными в возмущенном движении будут  $G, \delta, \lambda, T, \nu$ , а быстрыми – углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ .

Рассмотрим движение при условии  $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$ , соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось максимального момента инерции  $Oz_1$ . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \quad (8)$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение. При  $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$  нужно поменять местами буквы  $A_1$  и  $A_3$  в формуле (8).

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений движения (1), (4) и проведем усреднение по переменной  $\psi$ , а затем по времени  $t$  с учетом зависимости  $\varphi, \theta$  от  $t$ . При этом для медленных переменных  $\delta, \lambda, G, T$  сохраняются прежние обозначения. В результате получим для них эволюционные уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2(1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*, \\ \frac{dT}{dt} = -\frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3[A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \times \\ \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[ (k^2 - 1) + (1 + k^2) \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\ + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[ (k^2 - 2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] + \\ \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[ (1 - 2k^2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left( \frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[ A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [8]. Согласно первому уравнению (9) кинетический момент спутника остается постоянным и равен  $G_0$ . Дифференцируя выражение (8) для  $k^2$  и используя уравнения для кинетической энергии (9), получим диф-

дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных [1, 9]

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1 - \chi)(1 - k^2) - [(1 - \chi) + (1 + \chi)k^2] \frac{E(k)}{K(k)},$$

$$\chi = \frac{3A_2[(A_1^2 + A_3^2) - A_2(A_1 + A_3)]}{(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]}, \quad (10)$$

$$\xi = (t - t_*)/N, \quad N = \frac{3A_1^2A_2^2A_3^2}{PG_0^2(A_1 - A_3)[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-1}.$$

Здесь  $t_*$  – постоянная. Значению  $k^2 = 1$  отвечает равенство  $2TA_2 = G^2$ , что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (10) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  на сфере постоянного радиуса  $G_0$ . Анализ уравнения (10) свидетельствует об отсутствии стационарных значений  $k$ , кроме  $k = 0$  и  $k = 1$ .

Из уравнений движения (9) следует, что под влиянием момента вязких сил происходит эволюция кинетической энергии тела  $T$ . Изменения углов  $\lambda, \delta$  зависят как от действия силы гравитационного притяжения, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (9) для  $T$  положительно (при  $A_1 > A_2 > A_3$ ), так как справедливы неравенства  $(1 - k^2)K \leq E \leq K$  [8]. Поэтому  $dT/dt < 0$  поскольку  $T > 0$ , т.е. переменная  $T$  строго убывает для любых  $k^2 \in [0, 1]$ .

Рассмотрим систему, состоящую из третьего уравнения системы (9) и уравнения (10). Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетической энергии, считая характерными величинами задачи  $N$  (10) и момент инерции  $A_1$ . Имеем

$$\frac{dT'}{d\xi} = - \frac{2(T')^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3][A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \times$$

$$\times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[ (k^2 - 1) + (1 + k^2) \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \quad (11)$$

$$+ A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[ (k^2 - 2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] +$$

$$\left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[ (1 - 2k^2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] \right\},$$

где  $T' = 2A_1T/G_0^2$ . Это равенство выполняется при  $\xi > 0$ , т.е. для случая  $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$ . Проведен численный расчет при значениях моментов инерции  $A_1 = 8, A_2 = 5, 6, 7, A_3 = 4; k^2(0) = 0.99999, G(0) = 1$ . Начальное значение кинетической энергии равно

$$T(0) = \frac{G_0^2}{2} \frac{A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0)}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}. \quad (12)$$

В безразмерном виде имеем

$$T'(0) = \frac{A_1(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

Рассмотрен также случай  $\xi < 0$ , что соответствует случаю  $2TA_2 \geq G^2 \geq 2TA_3$ . Уравнение (11) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{d\xi} = & \frac{2(T')^2(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_3[A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1A_3][A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2]^2} \times \\ & \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2) \left[ (k^2 - 1) + (1 + k^2) \frac{E(k)}{K(k)} \right] + \right. \\ & + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1) \left[ (k^2 - 2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] + \\ & \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3) \left[ (1 - 2k^2) \left( 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + k^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

с начальным условием

$$T'(0) = \frac{A_3(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений центральных моментов инерции  $A_1 = 4$ ,  $A_2 = 5, 6, 7$ ,  $A_3 = 8$ . Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 1.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям  $A_2 = 5, 6, 7$ . Значение  $T' = 2$  соответствует вращению около оси  $A_3$  (неустойчивое движение),  $T' = 1$  – вращение около оси  $A_1$  (устойчивое движение). При  $\xi = 0$  (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба), которые визуально незаметны.

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для  $\lambda$  и  $\delta$  системы (9) и уравнения (5). Их можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), & \dot{\lambda} &= \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\ \dot{\nu} &= \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, & h(e) &= (1 - e^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

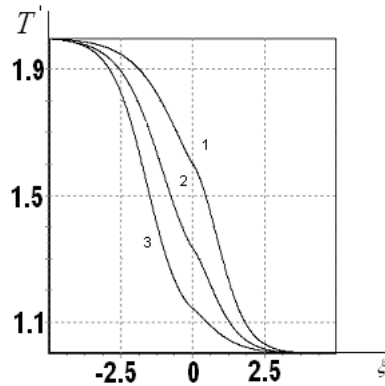


Рис. 1

Здесь  $\Delta$ ,  $\Lambda$  – коэффициенты в правых частях второго и третьего уравнений (9),  $\delta$ ,  $\lambda$  – медленные переменные, а  $\nu$  – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [10]

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu, \quad \dot{\lambda} = \frac{\omega_0^2 h(e)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu.$$

После усреднения получим

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N^* \cos \delta}{4G_0 h(e)}. \quad (13)$$

Видно, что угол отклонения вектора кинетического момента от вертикали остается постоянным в указанном приближении. Для численного расчета угла  $\lambda$  необходимо провести обезразмеривание второго уравнения системы (13). Имеем

$$\begin{aligned} \xi > 0: \quad \frac{d\lambda}{d\xi} &= \Gamma \frac{N' \cos \delta}{h(e)}, \quad N' = \frac{N^*}{A_1}, \\ \Gamma &= \frac{4725\omega_0^2 A_1^3 A_2^2 A_3^2}{32G_0^3 \pi a_0^7 (A_1 - A_3) [A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}, \\ N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3(T' - 1) \left[ A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right], \\ \xi < 0: \quad \frac{d\lambda}{d\xi} &= -\Gamma \frac{N' \cos \delta}{h(e)}, \quad N' = \frac{N^*}{A_3}, \\ \Gamma &= \frac{4725\omega_0^2 A_1^2 A_2^2 A_3^3}{32G_0^3 \pi a_0^7 (A_1 - A_3) [A_2(A_1 + A_3 - A_2) + 2A_1 A_3]}, \\ N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left( \frac{A_1}{A_3} T' - 1 \right) \left[ A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводился численный расчет системы (9) в безразмерном виде при начальных условиях для углов  $\delta(0) = 0.785$ ,  $\lambda(0) = 0.785$ , для значений коэффициента  $\Gamma = 10, 1, 0.1, 0.01$ . Во всех расчетных случаях функция имела один и тот же вид, отличаясь только диапазоном принимаемых значений. На рис. 2 приведен график функции  $\lambda = \lambda(\xi)$  при  $\Gamma = 1$  и моменте инерции  $A_2 = 5$  для круговой орбиты.

Если рассмотреть промежуток  $\xi \in [0, 1]$  (рис.3), то видно, что функция  $\lambda = \lambda(\xi)$  не является монотонной при  $\xi > 0$ , а при  $\xi < 0$  – монотонно возрастающая. Для малых времен  $\xi \in [-5, 3]$  функция является криволинейной, а для



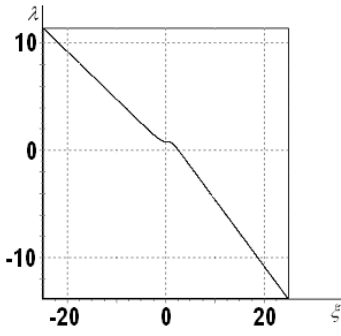


Рис. 2

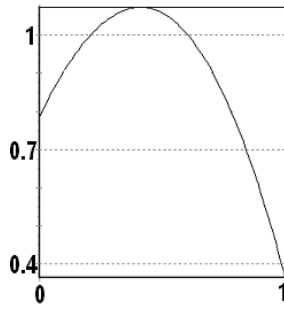


Рис. 3

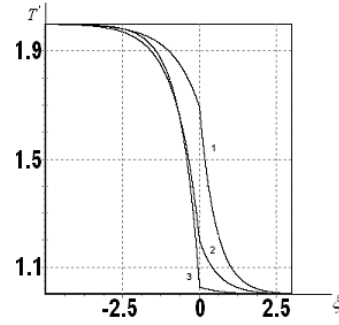


Рис. 4

больших времен практически прямолинейной. Из уравнения (14) видно, что приращение функции  $\lambda = \lambda(t)$  зависит от непостоянной величины  $N'$ , которая определяется функцией  $k^2 = k^2(\xi)$ , полными эллиптическими интегралами  $K(k)$  и  $E(k)$ , а также кинетической энергией  $T = T(\xi)$ . Согласно результатам численного расчета, представленным на рис. 1, при больших значениях безразмерного времени  $\xi$  кинетическая энергия стремится к асимптотическим значениям, при этом  $k^2 \rightarrow 0$ , а дробь  $(K(k) - E(k)) / (K(k)k^2) \rightarrow 1/2$ . При  $\xi > 0$  имеем, что  $T' \rightarrow 1$ , следовательно,  $N' \rightarrow (A_2 + A_3 - 2A_1) / A_1$ . Аналогично при  $\xi < 0$ , имеем, что при больших по модулю значениях  $\xi$  изменение функции  $\lambda = \lambda(\xi)$  аппроксимируется линейной функцией. При  $\xi > 0$  кинетическая энергия является функцией убывающей, поэтому величина  $N'$  является знакопеременной, что приводит к немонотонности функции  $\lambda = \lambda(\xi)$ .

Согласно численному расчету было получено, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента гравитационных сил притяжения вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом  $\delta$  к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора  $\mathbf{G}$  движется по сфере радиуса  $G_0$ , сначала против хода часовой стрелки, за счет имеющейся начальной кинетической энергии, а затем по ходу часовой стрелки, при этом кинетическая энергия убывает до значения 1, что соответствует устойчивому вращению спутника вокруг оси  $Oz_1$  (при положительных временах).

**2. Предельный случай.** Рассмотрим движение тела при малых  $k^2 \ll 1$ , отвечающим движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси  $Oz_1$ . В этом случае правую часть уравнения (10) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по  $k^2$  [8]. Тогда уравнение (10) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$\begin{aligned}
 k^2 &= C_1 \exp \left[ -\frac{(3 + \chi)\xi}{2} \right] & \xi > 0, \\
 k^2 &= C_1 \exp \left[ \frac{(3 - \chi)\xi}{2} \right] & \xi < 0, \\
 C_1 &= \text{const}, \quad 0 \leq C_1 \leq 1.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Изменение кинетической энергии можно качественно грубо получить, следуя работе [1], простым пересчетом из соотношения (8), используя найденное решение для малых  $k^2$  (15). Имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{2A_1^2(A_2 - A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2}\right] & \xi > 0, \\ T &= \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{2A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3 - \chi)\xi}{2}\right] & \xi < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (16) примут вид

$$\begin{aligned} T' &= 1 + \frac{(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2}\right] & \xi > 0, \\ T' &= \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_3^2(A_2 - A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3 - \chi)\xi}{2}\right] & \xi < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Константа интегрирования  $C_1$  находится грубо из условия равенства кинетической энергии по формулам (17) при  $\xi = 0$ . Имеем

$$C_1 = \frac{A_1 A_3 (A_2 - A_3) (A_1 - A_2)}{A_3^2 (A_1 - A_2)^2 + A_1^2 (A_2 - A_3)^2}. \quad (18)$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии в случае малых  $k^2$  имеют вид, представленный на рис. 4.

Кривые 1, 2, 3 получены для значений центральных моментов инерции  $A_1 = 4$ ,  $A_3 = 8$  и  $A_2 = 5, 6, 7$  соответственно. Как видно из рисунка, характер функции  $T' = T'(\xi)$  тот же, что и для  $0 \leq k^2 \leq 1$ , а также асимптотические значения на положительных и отрицательных безразмерных временах сохраняют свои величины. Движение тела стремится к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции  $A_1$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение (14) изменения угла  $\lambda$  для малых  $k^2$  с учетом (15) и (17). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\xi} &= \Gamma \frac{\cos \delta}{(1 - e^2)^{3/2}} \left[ \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} - 2 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)}{A_1^2(A_2 - A_3)} \frac{(A_2 + A_3)}{2} C_1 \exp\left[-\frac{(3 + \chi)\xi}{2}\right] \right]. \end{aligned}$$

После элементарного интегрирования для угла  $\lambda$  получается уравнение вида

$$\lambda = \Gamma \frac{\cos \delta}{(1 - e^2)^{3/2}} \left[ \left( \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} - 2 \right) \xi - \frac{3(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 + A_3)}{2A_1^2(A_2 - A_3)(3 + \chi)} C_1 \exp \left[ -\frac{(3 + \chi)\xi}{2} \right] + C_0 \right],$$

$$C_0 = \frac{\lambda_0(1 - e^2)^{3/2}}{\Gamma \cos \delta} + \frac{3(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 + A_3)C_1}{2A_1^2(A_2 - A_3)(3 + \chi)}.$$

На рис. 5 приведен график изменения функции  $\lambda = \lambda(\xi)$  для малых  $k^2$ . Видно, что характер функции совпадает с характером изменения функции угла  $\lambda$  для  $0 \leq k^2 \leq 1$ , приведенной на рис. 3. При расчете принято то же начальное значение угла  $\lambda$ , а также величин центральных моментов инерции, угла  $\delta$ , кинетического момента  $G$ , а также коэффициента  $\Gamma$ . Однако ввиду малости модуля эллиптических функций  $k^2$ , график изменения  $\lambda = \lambda(\xi)$  имеет меньшие градиенты.

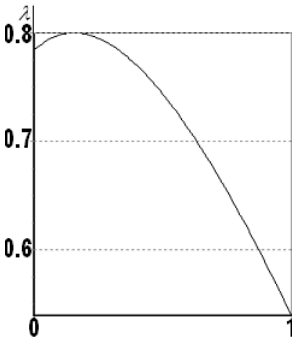


Рис. 5

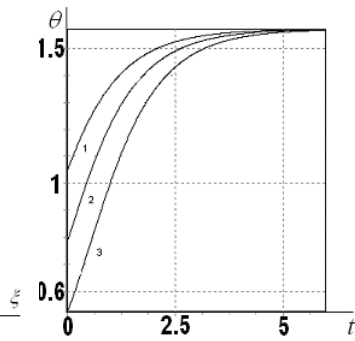


Рис. 6

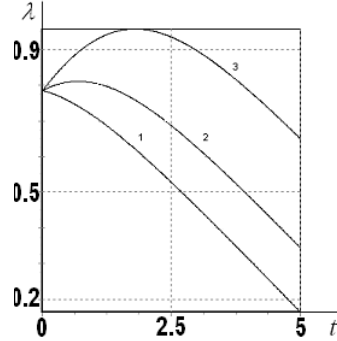


Рис. 7

**3. Динамически симметричный спутник.** Рассмотрим движение динамически симметричного спутника в случае  $A_1 = A_2$ , моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству  $A_1 > A_3$ . Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме:

$$\frac{dG}{dt} = L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G \cos \theta \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A_1} - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta.$$

Проекции момента вязких сил  $L_i^p$  на оси  $Oy_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $A_1 = A_2$  будут иметь вид:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1^2 A_3} [pr^2 A_3^2 (A_1 - A_3) \alpha_{i1} + qr^2 A_3^2 (A_1 - A_3) \alpha_{i2} + \\ + rp^2 A_1 A_3 (A_3 - A_1) \alpha_{i3} + q^2 A_1 A_3 (A_3 - A_1) \alpha_{i3}]. \quad (19)$$

В случае невозмущенного движения Эйлера – Пуансо (при  $\varepsilon = 0$ ), когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения,  $\varphi, \psi$  являются линейными функциями, а угол  $\theta$  – величина постоянная [7]. Величины  $G, \delta, \lambda, \nu$  в невозмущенном движении обращаются в постоянные. Для возмущенного движения углы  $\varphi, \psi$  являются быстрыми переменными, а переменные  $G, \delta, \lambda, \nu, \theta$  – медленными. Поэтому проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных  $G, \lambda, \delta, \theta$  по быстрым переменным: сначала по  $\psi$ , а затем по  $\varphi$ . После усреднения по  $\psi$  и  $\varphi$  имеем

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{PG^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} \sin(\nu - \lambda) \cos(\nu - \lambda) \sin \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right), \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{G (1 - e^2)^3} \cos^2(\nu - \lambda) \cos \delta (A_1 - A_3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right).$$

Согласно первому уравнению (19) кинетический момент спутника остается постоянным и равен  $G_0$ , как и в случае несимметричного спутника (9).

Интегрируя второе уравнение системы (19) для угла нутации, получим

$$\theta = \arctg \left( \operatorname{tg} \theta_0 \exp \left[ \frac{PG_0^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3) t \right] \right). \quad (20)$$

Здесь  $\theta_0$  – начальное значение угла нутации. Коэффициент в квадратных скобках есть величина положительная, так как задача рассматривается в предположении  $A_1 > A_3$ . При различных начальных значениях угла  $\theta$  график функции угла нутации  $\theta = \theta(t)$  стремится к асимптотическому значению  $\pi/2$ , что видно на рис. 6. Кривая 1 соответствует начальному значению  $\theta = \pi/3$ , кривая 2 – начальному значению  $\pi/4$  и кривая 3 –  $\pi/6$ .

Рассмотрим два последних уравнения системы (19) и уравнение для истинной аномалии (5).

$$\dot{\delta} = \omega_0^2 \Delta(\nu, \delta, \lambda), \quad \dot{\lambda} = \omega_0^2 \Lambda(\nu, \delta, \lambda), \\ \dot{\nu} = \frac{\omega_0}{h(e)} (1 + e \cos \nu)^2, \quad h(e) = (1 - e^2)^{3/2}. \quad (21)$$

Здесь  $\Delta, \Lambda$  – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (21),  $\delta, \lambda$  – медленные переменные, а  $\nu$  – полумедленная. Применяя модифицированный метод усреднения, имеем [10]:

$$\dot{\delta} = 0, \quad \dot{\lambda} = \frac{3\omega_0^2 N \cos \delta}{2Gh(e)}, \quad N = (A_1 - A_3)\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right). \quad (22)$$

Видно, что угол отклонения  $\delta$  вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника. Проинтегрируем уравнение (22) для угла  $\lambda$ , учитывая закон изменения угла нутации (20). Имеем

$$\lambda = \frac{3\omega_0 \cos \delta (A_1 - A_3)}{2G(1 - e^2)^{3/2}} \left( t + \frac{3}{2\gamma} (\ln |1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 e^{\gamma t}| - \ln |1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0|) \right), \quad (23)$$

$$\gamma = \frac{2PG_0^2}{A_1^3 A_3} (A_1 - A_3).$$

На рис. 7 представлен график изменения функции угла  $\lambda$  для различных начальных значений угла  $\theta$ . Кривая 1 соответствует начальному значению  $\theta = \pi/3$ , кривая 2 – начальному значению  $\pi/4$  и кривая 3 –  $\pi/6$ . Видно, что характер кривых 2 и 3 совпадает, а кривая 1 является монотонной.

В правой части уравнения (22) имеется функция  $N$ , которая является знакопеременной и зависит от знака выражения  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$ . При углах  $\theta \in [0; \theta^*]$ ,  $\theta^* \approx 0.955$  эта функция положительна. Поэтому при начальных значениях  $\theta = \pi/6, \pi/4$  выражение  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$  остается положительным до момента времени, когда угол нутации при своем увеличении (рис. 6) достигает критического значения  $\theta^*$ , после чего знак выражения  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$  меняется на “минус” и, следовательно, функция  $\lambda = \lambda(t)$  становится убывающей. При начальном значении  $\theta = \pi/3$  выражение  $\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right)$  не меняет знак со временем, поэтому функция  $\lambda = \lambda(t)$  является монотонной.

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного момента вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом  $\delta$  к вертикали плоскости орбиты. При начальных значениях угла нутации  $\theta \in [0; \theta^*]$  конец вектора  $\mathbf{G}$  движется по сфере радиуса  $G_0$ , сначала против хода часовой стрелки, а затем по ходу часовой стрелки. При начальных значениях угла нутации  $\theta(0) > \theta^*$  конец вектора  $\mathbf{G}$  движется по сфере радиуса  $G_0$  по ходу часовой стрелки.

1. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математика и мат. физ. – 1965. – 5, № 6. – С. 1049–1070.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

3. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 3. – С. 474–483.
4. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
5. Осипов В.З, Суликашвили Р.С. О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. Тбилис. мат. ин-та АН Груз.ССР. – 1978. – **58**. – С. 175–186.
6. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
9. Смирнова Е.П. Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1974. – **33**, вып.6. – С. 980 – 985.
10. Акуленко Л.Д. Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып.2. – С. 165 – 176.

Ин-т проблем механики РАН, Москва, Россия  
Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса  
leshchenko\_d@ukr.net, rachinskaya@onu.edu.ua

Получено 01.09.07