УДК 531.38

©2007. **М.П. Харламов**

ОСОБЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Для вполне интегрируемой системы с тремя степенями свободы (случай А.Г. Реймана и М.А. Семенова–Тян-Шанского) найдено множество точек, в которых ранг интегрального отображения равен единице. Тем самым определены все особые периодические решения, порождающие узловые точки бифуркационной диаграммы. Все фазовые переменные выражены через набор постоянных и одну вспомогательную переменную, для которой выписано дифференциальное уравнение, интегрируемое в эллиптических функциях времени. Показано, что соответствующие точки в трехмерном пространстве констант первых интегралов лежат на пересечении двух листов дискриминантной поверхности представления Лакса.

1. Введение. Рассмотрим уравнения движения гиростата в двойном поле

$$\begin{gathered}
\mathbf{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_1\times\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2\times\boldsymbol{\beta},\\
\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\omega},
\end{gathered} \tag{1}$$

отнесенные к жестко связанному с телом триэдру $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ главных осей инерции в неподвижной точке O. Полагаем, что главные моменты инерции подчинены отношению Ковалевской $2:2:1$, гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbf{e}_3$ ($\lambda = \mathrm{const}$), а постоянные в теле радиус-векторы центров приложения сил $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ параллельны экваториальной плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. В работе [1] доказана полная интегрируемость ограничения этой системы на любой совместный уровень P^6 трех геометрических интегралов в $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

Как показано в работах [2] и [3], линейной заменой переменных с постоянными коэффициентами система (1) сводится к такой, у которой $\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$ (указанные в [2, 3] подстановки применимы при наличии гиростатического момента, направленного по оси динамической симметрии). В дальнейшем рассматривается несводимый к двум степеням свободы случай $|\alpha| \ne |\beta| \ne 0$. Поэтому без ограничения общности рассматриваем геометрические интегралы

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha} = a^2, \quad \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta} = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0 \tag{2}$$

с постоянными

$$a > b > 0. \tag{3}$$

Единицы измерения выбираем так, что $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\{2,2,1\}$. Тогда тройка интегралов в инволюции на уровне (2) запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1 - \beta_2 - \frac{\lambda^2}{2},\\
&K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 + \\
&\qquad + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3 + 2\omega_2\beta_3],\\
&G = \frac{1}{4}(M_\alpha^2 + M_\beta^2) + \frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda)M_\gamma - b^2\alpha_1 - a^2\beta_2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь

$$
M_\alpha = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\alpha}, \quad M_\beta = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{\beta}, \quad M_\gamma = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}),
$$

а сдвиг энергии на константу $-\lambda^2/2$ выполнен для сопоставимости с обозначениями работы [1] и более подробной работы [4]. Отметим, что интеграл K в таком виде для гиростата в двойном поле впервые указал Х.М. Яхья [5], а интеграл G, обобщающий квадрат интеграла момента классической задачи, найден А.Г. Рейманом и М.А. Семеновым–Тян-Шанским [1] с помощью построенного ими представления Лакса для системы (1).

Рассмотрим интегральное отображение

$$
J = H \times K \times G : \ P^6 \to \mathbf{R}^3. \tag{5}
$$

Его уровни $J^{-1}(h,k,g)$ при всех $(h,k,g) \in \mathbf{R}^3$ задают в P^6 слоение Лиувилля. Если система (1) на P^6 невырождена (а она является таковой, например, для классического аналога), то периодические траектории, отвечающие резонансным торам, всюду плотны в P^6. Однако такие траектории не представляют интереса с точки зрения аналитического интегрирования или топологического анализа системы. Для последнего существенную роль играют особые, узловые точки бифуркационной диаграммы $\Sigma(J) \subset \mathbf{R}^3$ отображения J [6]. Рассматривая $\Sigma(J)$ как двумерный клеточный комплекс, получаем, что особые точки – это объединение остовов размерности 0 и 1. Нульмерный остов отвечает неподвижным точкам системы, которых, как показано в [7], ровно четыре на каждом из многообразий P^6, удовлетворяющих неравенствам (3). Существенно более сложен вопрос о нахождении особых точек $\Sigma(J)$, образующих 1-клетки. В фазовом пространстве этим точкам отвечают периодические траектории, сами являющиеся одномерными торами Лиувилля, то есть такие замкнутые орбиты, в точках которых $\operatorname{rank} J = 1$. Такие траектории называем особыми периодическими движениями (ОПД).

Для классического случая (волчок Ковалевской в поле силы тяжести) ОПД являются равномерными вращениями вокруг вертикали. Для волчка Ковалевской в двойном поле (уравнения (1) при $\boldsymbol{\lambda} = 0$) множество ОПД, как показано в [8], исчерпывается семействами маятниковых движений около главных осей инерции, отмеченными в [2], и семействами критических траекторий обобщенного случая Делоне [9], впервые описанными в [10] и проинтегрированными в [11]. Легко проверить, что в случае гиростата из всех маятниковых движений сохраняются только следующие:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha} = a(\mathbf{e}_1 \cos\varphi - \mathbf{e}_2 \sin\varphi), \quad \boldsymbol{\beta} = \pm b(\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi), \quad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \equiv \pm ab\mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\omega} = \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{e}_3, \quad \varphi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = -(a \pm b)\sin\varphi.\end{gathered} \tag{6}$$

Им соответствуют значения интегралов (4), определенные условиями

$$k = (a \pm b)^2, \quad g = \mp\, abh \tag{7}$$

с неравенствами для h, которые легко выписываются для любой комбинации знаков. Допустимые значения (7), очевидно, входят в состав 1-остова бифуркационной диаграммы. Ниже в дополнение к решениям (6) найдены все особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле, выписаны выражения для значений первых интегралов, заполняющих оставшуюся часть 1-остова бифуркационной диаграммы. Доказано, что соответствующие точки в образе отображения J являются точками пересечения двумерных листов дискриминантной поверхности алгебраической кривой представления Лакса.

2. Уравнения критического множества. Введем замену переменных ($i^2 = -1$):

$$\begin{gathered}x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), \quad x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), \quad y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 = \omega_1 + i\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - i\omega_2, \quad w_3 = \omega_3.\end{gathered} \tag{8}$$

Обозначая штрихом дифференцирование по it, из (1) для новых переменных получим

$$\begin{gathered}x_1' = -x_1 w_3 + z_1 w_1, \quad x_2' = x_2 w_3 - z_2 w_2, \\ y_1' = -y_1 w_3 + z_2 w_1, \quad y_2' = y_2 w_3 - z_1 w_2, \\ 2z_1' = x_1 w_2 - y_2 w_1, \quad 2z_2' = -x_2 w_1 + y_1 w_2, \\ 2w_1' = -w_1(w_3 - \lambda) - z_1, \quad 2w_2' = w_2(w_3 - \lambda) + z_2, \quad 2w_3' = y_2 - y_1,\end{gathered} \tag{9}$$

а геометрические интегралы (2) примут вид

$$z_1^2 + x_1 y_2 = r^2, \quad z_2^2 + x_2 y_1 = r^2, \tag{10}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + 2z_1 z_2 = 2p^2. \tag{11}$$

Здесь в силу (3) введены положительные константы $p = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Первые интегралы (4) запишутся так:

$$
\begin{aligned}
& H = w_1 w_2 + \frac{1}{2} w_3^2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + \lambda^2), \\
& K = (w_1^2 + x_1)(w_2^2 + x_2) + 2\lambda(w_1 w_2 w_3 + z_2 w_1 + z_1 w_2) - 2\lambda^2 w_1 w_2, \\
& G = \frac{1}{4}(p^2 - x_1 x_2) w_3^2 + \frac{1}{2}(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2) w_3 + \\
& \qquad + \frac{1}{4}(x_2 w_1 + y_1 w_2)(y_2 w_1 + x_1 w_2) - \frac{1}{4} p^2 (y_1 + y_2) + \frac{1}{4} r^2 (x_1 + x_2) + \\
& \qquad + \frac{1}{2}\lambda(z_1 z_2 w_3 + y_2 z_2 w_1 + y_1 z_1 w_2) + \frac{1}{4}\lambda^2(p^2 - y_1 y_2).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Пусть f – гладкая функция переменных (8). Для отыскания ее критических точек на подмногообразии (10), (11) удобны следующие уравнения [3]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial w_3} = 0, \\
2z_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + 2z_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \\
2z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + 2z_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \\
x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0
\end{gathered} \tag{13}
$$

(шесть дифференциальных операторов, задающих эти уравнения, линейно независимы и обращают в ноль левые части уравнений (10), (11)).

Поскольку все неподвижные точки системы (1) невырождены как критические точки гамильтониана H на P^6 (см. [7]), то в них $\operatorname{rank} J = 0$. Отсюда следует, что на искомых решениях $dH \neq 0$ и условие $\operatorname{rank} J = 1$ можно записать как пропорциональность обоих дифференциалов dK и dG дифференциалу dH (все дифференциалы вычислены на P^6). Введем поэтому функции с неопределенными множителями Лагранжа σ, τ

$$
L_K = K - 2\sigma H, \quad L_G = 2G - (p^2 - \tau) H
$$

и выпишем системы уравнений вида (13), полагая последовательно $f = L_K$ и $f = L_G$. Для функции L_K получим уравнения

$$
\begin{gathered}
(w_1^2 + x_1) w_2 + \lambda[z_1 + w_1(w_3 - \lambda)] - \sigma w_1 = 0, \\
(w_2^2 + x_2) w_1 + \lambda[z_2 + w_2(w_3 - \lambda)] - \sigma w_2 = 0,
\end{gathered} \tag{14}
$$

$$
\lambda w_1 w_2 - \sigma w_3 = 0, \tag{15}
$$

$$
\begin{gathered}
(w_1^2 + x_1) z_2 - \lambda(w_2 x_1 + w_1 y_1) + \sigma z_1 = 0, \\
(w_2^2 + x_2) z_1 - \lambda(w_1 x_2 + w_2 y_2) + \sigma z_2 = 0,
\end{gathered} \tag{16}
$$

$$
x_1 w_2^2 - x_2 w_1^2 + \sigma(y_1 - y_2) = 0. \tag{17}
$$

Для функции L_G аналогично будем иметь

$$
\begin{array}{l}
(\tau - z_1 z_2)w_1 + x_1 y_1 w_2 + x_1 z_2 w_3 + y_1 z_1 \lambda = 0,\\
x_2 y_2 w_1 + (\tau - z_1 z_2) w_2 + x_2 z_1 w_3 + y_2 z_2 \lambda = 0,\\
x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + (\tau - x_1 x_2) w_3 + z_1 z_2 \lambda = 0,\\
(x_2 z_1 + y_2 z_2) w_1^2 + (x_1 z_2 + y_1 z_1) w_1 w_2 + (2 z_1 z_2 - x_1 x_2) w_1 w_3 - \\
\qquad - x_1 y_1 w_2 w_3 - x_1 z_2 w_3^2 + (z_1 z_2 - \tau) z_1 + x_1 y_2 z_2 + \\
\qquad + \lambda (2 z_1 z_2 - y_1 y_2) w_1 - \lambda x_1 y_1 w_2 - \lambda (x_1 z_2 + y_1 z_1) w_3 - \lambda^2 y_1 z_1 = 0,\\
(x_1 z_2 + y_1 z_1) w_2^2 + (x_2 z_1 + y_2 z_2) w_1 w_2 + (2 z_1 z_2 - x_1 x_2) w_2 w_3 - \\
\qquad - x_2 y_2 w_1 w_3 - x_2 z_1 w_3^2 + x_2 y_1 z_1 + (z_1 z_2 - \tau) z_2 - \\
\qquad - \lambda x_2 y_2 w_1 + \lambda (2 z_1 z_2 - y_1 y_2) w_2 - \lambda (x_2 z_1 + y_2 z_2) w_3 - \lambda^2 y_2 z_2 = 0,\\
(\tau - x_1 x_2)(y_1 - y_2) + x_2 z_1^2 - x_1 z_2^2 + 2(x_2 y_2 w_1^2 - x_1 y_1 w_2^2) + \\
\qquad + 2(x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2) w_3 + 2\lambda (y_2 z_2 w_1 - y_1 z_1 w_2) = 0.
\end{array}
\tag{18}
$$

Как будет показано ниже, в критических точках функции L_K система (18) оказывается всегда совместной.

3. Аналитические решения. Рассмотрим вначале множество критических точек функции K. Для его нахождения нужно в уравнениях (14)–(17) положить $\sigma = 0$. Уравнение (15) сразу же дает $w_1 = w_2 = 0$, а из уравнений (14) получаем тогда, что $z_1 = z_2 = 0$. Система (18) этими значениями удовлетворена, если положить $\tau = x_1 x_2$. В частности, все критические точки интеграла K оказываются критическими и для функции L_G с указанным значением τ, поэтому из условия $dK = 0$ (при $dH \neq 0$) следует, что $\operatorname{rank} J = 1$. В исходных переменных на соответствующих траекториях имеем $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$, $\alpha_3 = \beta_3 \equiv 0$. Подстановка в систему (1) приводит к решениям (6) с постоянными (7). В частности, при $\lambda \neq 0$ отсутствует прямой аналог 1-го класса Аппельрота (класса Делоне $K = 0$) и его обобщения, найденного в работе [9], поскольку нулевое значение K не является критическим. Далее полагаем $\sigma \neq 0$. Неподвижные точки системы уже исключены, поэтому из уравнения (15) следует, что

$$
w_1 w_2 \neq 0. \tag{19}
$$

Четыре уравнения (14), (16) образуют линейную систему по y_1, y_2, z_1, z_2, из которой эти переменные находятся как функции от x_1, x_2, w_1, w_2. Подстановка найденных зависимостей в (17) дает тождество. Из (15) переменную w_3 выражаем через w_1, w_2. После этого четыре переменные x_1, x_2, w_1, w_2 оказываются связанными тремя уравнениями, вытекающими из (10), (11). В результате, вообще говоря, для произвольно заданного значения σ получаем одномерное многообразие, инвариантное относительно системы (9), т. е. искомое периодическое решение.

Обозначим

$$
w = w_1 w_2, \quad q = w_1/\sqrt{w}, \quad x = x_1 x_2. \tag{20}
$$

Это возможно в силу (19). Отметим, что $q \in \mathbf{C}$, $|q| = 1$, $\overline{q} = 1/q$. Выполняя описанную выше процедуру, из (14)–(16) находим

$$
\begin{aligned}
w_3 &= \frac{\lambda}{\sigma} w, \\
z_1 &= -\frac{\sqrt{w}}{\lambda\,\sigma q}[\,\sigma x_1 + (\lambda^2+\sigma) q^2 (w-\sigma)\,], \\
z_2 &= -\frac{\sqrt{w}}{\lambda\,\sigma q}[\,\sigma q^2 x_2 + (\lambda^2+\sigma)(w-\sigma)\,], \\
y_1 &= -\frac{(x_1+q^2 w)(q^2 x_2 + w)}{\lambda^2 q^2} - \frac{w^2}{\sigma} + \frac{\sigma(\lambda^2+\sigma)}{\lambda^2} - \frac{x_1 w}{\sigma q^2}, \\
y_2 &= -\frac{(x_1+q^2 w)(q^2 x_2 + w)}{\lambda^2 q^2} - \frac{w^2}{\sigma} + \frac{\sigma(\lambda^2+\sigma)}{\lambda^2} - \frac{q^2 x_2 w}{\sigma}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Используем эти значения для решения системы (10) относительно x_1, x_2. Получим

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{r^2\lambda^2\sigma}{(w-\sigma)^2(\lambda^2+\sigma) - \sigma x} - \frac{\lambda^2+\sigma}{\sigma}\, q^2 w, \\
x_2 &= \frac{r^2\lambda^2\sigma}{(w-\sigma)^2(\lambda^2+\sigma) - \sigma x} - \frac{\lambda^2+\sigma}{\sigma}\, \frac{w}{q^2}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Отсюда видно, что удобно ввести обозначение

$$u = (w-\sigma)^2(\lambda^2+\sigma) - \sigma x. \tag{23}$$

Подставляя (22), (23) в последнее соотношение (20), получим

$$2r^2\lambda^2\sigma^2(\lambda^2+\sigma) u w Q = \sigma u^3 + (\lambda^2+\sigma)[\lambda^2 w^2 + \sigma^2(2w-\sigma)]u^2 + r^4\lambda^4\sigma^4, \tag{24}$$

где обозначено

$$Q = \frac{1}{2}(q^2 + \frac{1}{q^2}) = \frac{w_1^2 + w_2^2}{2 w_1 w_2} = \cos(2\arg(w_1)). \tag{25}$$

В дополнение к уравнению (24) для определения связи между w, Q, u имеется еще уравнение (11). Подставляя в него зависимости (21), (22), приходим к уравнению

$$
\begin{aligned}
2r^2\lambda^4\sigma^2[(\lambda^2+\sigma)^2 u^2 + r^4\lambda^4\sigma^2] u w Q &= [(\lambda^2+\sigma)^2(\lambda^2 w + \sigma^2)^2 - 2p^2\lambda^4\sigma^2]u^4 + \\
&+ r^4\lambda^4\sigma^2[(\lambda^2 w + \sigma^2)^2 + (\lambda^2-\sigma)^2\sigma^2 - 4\sigma^4]u^2 + r^8\lambda^8\sigma^6.
\end{aligned}
$$

Исключая из него переменную Q с помощью (24), получим

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2(\lambda^2+\sigma)^2 u^5 + (\lambda^2+\sigma)[2p^2\lambda^4 - (\lambda^2+\sigma)^3\sigma]\sigma u^4 + \\
&\quad + r^4\lambda^6\sigma^2 u^3 + 2r^4\lambda^4\sigma^4(\lambda^2+\sigma)^2 u^2 - r^8\lambda^8\sigma^6 = 0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Итак, при заданном σ величина u оказывается константой – вещественным корнем уравнения (26) с постоянными коэффициентами. После того как она определена, из (24) находим

$$Q(w) = \frac{\sigma u^3 + (\lambda^2+\sigma)[\lambda^2 w^2 + \sigma^2(2w-\sigma)]u^2 + r^4\lambda^4\sigma^4}{2r^2\lambda^2\sigma^2(\lambda^2+\sigma)uw} \tag{27}$$

с очевидным ограничением согласно (25)

$$Q^2(w) \leqslant 1. \tag{28}$$

Поэтому можно записать в алгебраических радикалах

$$q(w) = \sqrt{Q + i\sqrt{1-Q^2}}, \tag{29}$$

и тогда все фазовые переменные оказываются выражены через одну вещественную переменную w:

$$\begin{gathered}
w_1 = q(w)\sqrt{w}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{w}}{q(w)}, \quad w_3 = \frac{\lambda}{\sigma}w, \\
x_1 = \frac{1}{\sigma u}[\, r^2\lambda^2\sigma^2 - (\lambda^2+\sigma)\, u\, q^2(w)w\,], \;\; x_2 = \frac{1}{\sigma u}[\, r^2\lambda^2\sigma^2 - (\lambda^2+\sigma)\, u\, \frac{w}{q^2(w)}\,], \\
y_1 = \sigma(1 + \frac{\sigma}{\lambda^2} - \frac{r^4\lambda^2\sigma}{u^2}) + \frac{r^2\lambda^2}{u}q^2(w)w, \\
y_2 = \sigma(1 + \frac{\sigma}{\lambda^2} - \frac{r^4\lambda^2\sigma}{u^2}) + \frac{r^2\lambda^2}{u}\frac{w}{q^2(w)}, \\
z_1 = -\frac{r^2\lambda\,\sigma}{u}\frac{\sqrt{w}}{q(w)} + \frac{\lambda^2+\sigma}{\lambda}q(w)\sqrt{w}, \;\; z_2 = -\frac{r^2\lambda\,\sigma}{u}q(w)\sqrt{w} + \frac{\lambda^2+\sigma}{\lambda}\frac{\sqrt{w}}{q(w)}.
\end{gathered} \tag{30}$$

Подставляя найденные зависимости (27), (29), (30) в систему (18), убеждаемся, что все ее уравнения сводятся к одному

$$\lambda^2\sigma\,\tau + (\lambda^2+\sigma)u = 0,$$

которое всегда разрешимо относительно τ ввиду предположения $\sigma \neq 0$. В частности, отсюда следует, что точки, критические для функции L_K всегда будут критическими и для функции L_G при подходящем τ, а условия (14)–(16) при $\sigma \neq 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы выполнялось требование $\operatorname{rank} J = 1$.

4. Зависимость от времени. Найдем дифференциальное уравнение, определяющее зависимость $w(t)$. Для этого достаточно выполнить подстановку значений (29), (30) в любое из уравнений системы (9). В результате получим

$$(\frac{dw}{dt})^2 = \frac{r^4\lambda^2\sigma^2w^2}{u^2}[1 - Q^2(w)]. \tag{31}$$

Используя выражение (27), после несложных преобразований найдем

$$\Bigl(\frac{dw}{dt}\Bigr)^2 = -\frac{\lambda^2}{4\sigma^2}P_+(w)P_-(w), \tag{32}$$

где

$$P_\pm(w) = w^2 + 2\sigma^2\frac{u \pm r^2\lambda^2}{\lambda^2 u}w + \frac{\sigma[u^3 - (\lambda^2+\sigma)\sigma^2u^2 + r^4\lambda^4\sigma^3]}{(\lambda^2+\sigma)\lambda^2u^2}. \tag{33}$$

Поскольку $\deg P_+(w)P_-(w) = 4$, уравнение (32) интегрируется в эллиптических функциях времени. Корни трехчленов (33) явно вычисляются, что делает это уравнение удобным для исследования с точки зрения существования решений, удовлетворяющих необходимым и достаточным требованиям вещественности:

$$P_+(w)P_-(w) \leqslant 0, \quad w \geqslant 0. \tag{34}$$

Достаточность условий (34) вытекает из сопоставления (31) с неравенством (28), определяющим ограничения на переменную w в решении (30).

5. Значения первых интегралов и связь с представлением Лакса. Для получения уравнений, позволяющих построить узловые точки бифуркационной диаграммы, найдем значения интегралов (4) в точках найденных решений. Подстановка (27), (29), (30) в (12) дает следующие выражения для соответствующих постоянных

$$\begin{aligned}
h_* &= -\frac{u}{2(\lambda^2+\sigma)\sigma} - \frac{(\lambda^2+\sigma)\lambda^2+2\sigma^2}{2\lambda^2} + \frac{(\lambda^2+2\sigma)r^4\lambda^2\sigma^2}{2(\lambda^2+\sigma)u^2},\\
k_* &= -\frac{(\lambda^2+2\sigma)u}{(\lambda^2+\sigma)\sigma} + (\lambda^2+2\sigma)\sigma - \frac{r^4\lambda^4\sigma^3}{(\lambda^2+\sigma)u^2},\\
g_* &= -\frac{(\lambda^2+\sigma)^2u^2 - r^4\lambda^4\sigma^2}{8(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^6\sigma^2u^6}\bigl[\lambda^4u^6 + (\lambda^2-\sigma)(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^2\sigma u^5 -\\
&\quad - (\lambda^2-2\sigma)(\lambda^2+\sigma)^4\sigma^3u^4 - (\lambda^2+3\sigma)r^4\lambda^6\sigma^3u^3 -\\
&\quad - 4(\lambda^2+\sigma)^2r^4\lambda^4\sigma^6u^2 + (\lambda^2+2\sigma)r^8\lambda^8\sigma^7\bigr].
\end{aligned} \tag{35}$$

Напомним, что константа u связана с σ уравнением (26). Выражения (35) могут быть использованы при компьютерном построении бифуркационных диаграмм отображения J (или его ограничений на изоэнергетические уровни) как граничные условия для двумерных листов (соответственно, гладких криволинейных отрезков). Конечно, этому должны предшествовать непростые исследования условий существования найденных здесь решений в терминах параметра σ (или ему эквивалентного выражения) и величины гиростатического момента. Здесь ограничимся лишь некоторыми соображениями. Найденная совокупность периодических решений характеризуется двумя параметрами λ и σ. Определенные вырождения имеют место в очевидных особых случаях $\lambda = 0$ (гиростатический момент отсутствует, имеем задачу о движении волчка в двойном поле, совокупность решений обращается в маятниковые движения [2]), $\sigma = 0$ (случай $dK = 0$, изученный выше) или $\lambda^2 + \sigma = 0$ (требуется отдельное рассмотрение в силу особенностей в полученных выше формулах). Бифуркации этих решений по параметрам происходят также при возникновении кратного корня у многочлена $P_+(w)P_-(w)$. При значениях λ, σ, отличных от уже отмеченных, ни P_+, ни P_- кратного корня иметь не могут. Их общий корень может быть только нулевым. Условие совместности по u уравнения $P_+(0) = 0$ с уравнением (26) даст разделяющие множество в плоскости (λ, σ), отвечающее положениям равновесия гиростата. Кроме того, необходимо исследовать случаи наличия кратного корня уравнения (26), при выборе которого существуют вещественные решения (32). Компьютерные системы аналитических вычислений позволяют получить соответствующие условия на параметры и разработать алгоритмы вычисления точек 1-остова бифуркационной диаграммы для любого заданного значения энергии.

Представление Лакса для данной задачи, найденное в работе [1], в наших обозначениях может быть записано в виде

$$L' = LM - ML, \tag{36}$$

где

$$L = \begin{Vmatrix} 2\lambda & \dfrac{x_2}{\kappa} & -2w_1 & \dfrac{z_2}{\kappa} \\ -\dfrac{x_1}{\kappa} & -2\lambda & -\dfrac{z_1}{\kappa} & 2w_1 \\ -2w_1 & \dfrac{z_2}{\kappa} & -2w_3 & -\dfrac{y_1}{\kappa} - 4\kappa \\ -\dfrac{z_1}{\kappa} & 2w_2 & \dfrac{y_2}{\kappa} + 4\kappa & 2w_3 \end{Vmatrix}, \quad M = \begin{Vmatrix} -\dfrac{w_3}{2} & 0 & \dfrac{w_2}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{w_3}{2} & 0 & -\dfrac{w_1}{2} \\ \dfrac{w_1}{2} & 0 & \dfrac{w_2}{2} & \kappa \\ 0 & -\dfrac{w_2}{2} & -\kappa & -\dfrac{w_3}{2} \end{Vmatrix},$$

через κ обозначен спектральный параметр, производная в (36) вычисляется в силу системы (9). Уравнение для собственных значений ζ матрицы L определяет ассоциированную с данным представлением алгебраическую кривую [4]. Положим $s = 2\kappa^2$ и обозначим через h, k, g произвольные постоянные интегралов (12). Уравнение алгебраической кривой примет вид

$$\begin{gathered} \zeta^4 - \frac{4}{s}[\,p^2 - 2(h+\lambda^2)s + 2s^2\,]\zeta^2 + \frac{4}{s^2}[\,r^4 + 4(2g - p^2h - p^2\lambda^2)s + \\ +4(k + 2\lambda^2 h + \lambda^4)s^2 - 8\lambda^2 s^3\,] = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Записывая условия наличия особых точек этой кривой, получим две параметрически заданные поверхности в $\mathbf{R}^3(h,k,g)$

$$\Pi_1: \quad \left\{ \begin{array}{l} k = p^2 + h^2 - 4hs + 3s^2 - \dfrac{p^4 - r^4}{4s^2} \\ g = (h-s)s^2 + \dfrac{p^4 - r^4}{4s} \end{array} \right. , \tag{38}$$

$$\Pi_2: \quad \left\{ \begin{array}{l} k = -2\lambda^2(h-2s) - \lambda^4 + \dfrac{r^4}{4s^2} \\ g = \dfrac{1}{2}p^2(h+\lambda^2) - \lambda^2 s^2 - \dfrac{r^4}{4s} \end{array} \right. , \tag{39}$$

или две параметрически заданные кривые в плоскости фиксированного значения h. Замечая, что условие приводимости кривой (37) дает значения (7), можно высказать предположение о том, что бифуркационная диаграмма отображения J содержится в множестве, определяемом уравнениями (7), (38), (39). Строгое доказательство этого утверждения требует приемлемого описания множества критических точек отображения (5), формирующего фазовые пространства подсистем с двумя степенями свободы, а также некоторых явных выражений через фазовые переменные для параметра s на критических точках в прообразах поверхностей Π_1, Π_2. Это является предметом отдельной работы. Интересно отметить, что благодаря сдвигу энергии на константу в (4), не имеющему механического смысла, уравнения поверхности (38) оказались не зависящими от гиростатического момента. Они совпадают с параметрическими уравнениями обобщения 4-го класса Аппельрота для волчка в двойном поле [2].

Покажем, что точки (35) принадлежат обеим поверхностям Π_1, Π_2. Для поверхности Π_1 положим

$$u = \frac{r^2\lambda^2\sigma}{R}, \quad R = \sqrt{(\lambda^2+\sigma)^2 + 2\lambda^2 s}. \tag{40}$$

Тогда из (35) получим следующие значения:

$$h_* = \frac{(\lambda^2+2\sigma)s}{\lambda^2+\sigma} + \sigma - \frac{r^2\lambda^2}{2(\lambda^2+\sigma)R}, \qquad k_* = -\frac{2\lambda^2\sigma s}{\lambda^2+\sigma} + \sigma^2 - \frac{(\lambda^2+2\sigma)r^2\lambda^2}{(\lambda^2+\sigma)R},$$

$$g_* = \frac{s}{2(\lambda^2+\sigma)^2}\left\{ \frac{r^4\lambda^4}{2[2\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2]} + 2[(\lambda^2+2\sigma)s + (\lambda^2+\sigma)^2]\sigma s - \right. \tag{41}$$

$$\left. - \frac{r^2[(\lambda^2+3\sigma)\lambda^2 s + 2(\lambda^2+\sigma)^2\sigma]}{R} \right\}.$$

Необходимо учесть уравнение (26). Подставляя в него выражение для u из (40), имеем

$$r^2[\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2] - [2\sigma s^2 - p^2(\lambda^2+\sigma)]R = 0. \tag{42}$$

Исключая R из выражений (41) с помощью (42), найдем

$$
\begin{aligned}
h_* &= s + \sigma + \frac{2(\lambda^2+\sigma)\sigma s + \lambda^2 p^2}{2[\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2]},\\
k_* &= -\frac{4\lambda^2\sigma s^2 + (2\lambda^2+\sigma)\lambda^2\sigma s - (\lambda^2+\sigma)^2\sigma^2 - (\lambda^2+2\sigma)\lambda^2 p^2}{\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2},\\
g_* &= -s^3 + \sigma s^2 + p^2 s - \frac{(8\lambda^2 s^3 - r^4)\lambda^2}{8(\lambda^2+\sigma)^2} + \frac{(2s^2-p^2)\lambda^2 s}{\lambda^2+\sigma} -\\
&\quad - \frac{r^4\lambda^2}{8[2\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2]} + \frac{[2(\lambda^2+\sigma)\sigma s + \lambda^2 p^2]s^2}{2[\lambda^2 s + (\lambda^2+\sigma)^2]}.
\end{aligned}
$$

Непосредственная подстановка этих выражений вместо h, k, g в уравнения (38) обращает их в тождества.

Для поверхности Π_2 положим

$$
u = -2\lambda^2\sigma s. \tag{43}
$$

Значения (35) примут вид

$$
\begin{aligned}
h_* &= \frac{8\lambda^4 s^3 - 4(\lambda^2+\sigma)[(\lambda^2+\sigma)\lambda^2 + 2\sigma^2)]s^2 + (\lambda^2+2\sigma)r^4}{8(\lambda^2+\sigma)\lambda^2 s^2},\\
k_* &= \frac{8(\lambda^2+2\sigma)\lambda^2 s^3 + 4(\lambda^2+\sigma)(\lambda^2+2\sigma)\sigma s^2 - r^4\sigma}{4(\lambda^2+\sigma)s^2},\\
g_* &= -\frac{4(\lambda^2+\sigma)^2 s^2 - r^4}{512(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^6 s^6}[64\lambda^8 s^6 - 32(\lambda^2-\sigma)(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^4 s^5 -\\
&\quad - 16(\lambda^2-2\sigma)(\lambda^2+\sigma)^4\sigma s^4 + 8(\lambda^2+3\sigma)r^4\lambda^4 s^3 -\\
&\quad - 16(\lambda^2+\sigma)^2 r^4\sigma^2 s^2 + (\lambda^2+2\sigma)r^8\sigma].
\end{aligned} \tag{44}
$$

Подстановка h_*, k_* вместо h, k в первое уравнение (39) обращает его в тождество. Уравнение (26) в подстановке (43) дает

$$
\begin{aligned}
&32(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^4 s^5 - 16(\lambda^2+\sigma)[2p^2\lambda^4 - (\lambda^2+\sigma)^3\sigma]s^4 +\\
&+8r^4\lambda^4 s^3 - 8(\lambda^2+\sigma)^2 r^4\sigma s^2 + r^8\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Подставим значения h_*, g_* из (44) в выражение

$$
4s\,g_* + r^4 - 2s\,p^2(h_*+\lambda^2) + 4\lambda^2 s^3. \tag{46}
$$

Получим левую часть уравнения (45), домноженную на

$$
\frac{8\lambda^4 s^3 + 4(\lambda^2-2\sigma)(\lambda^2+\sigma)^2 s^2 + (\lambda^2+2\sigma)r^4}{128(\lambda^2+\sigma)^2\lambda^6 s^5}.
$$

Следовательно, величина (46) равна нулю, что доказывает выполнение второго уравнения (39).

Итак, значения первых интегралов найденного семейства периодических траекторий позволяют в параметрической форме записать все реализуемые на вещественных решениях точки трансверсального пересечения двумерных бифуркационных листов задачи о движении гиростата Ковалевской в двойном силовом поле.

1. *Рейман А.Г., Семенов–Тян-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, № 2. – С. 87–88.
2. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
3. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. – 2005. – **10**, № 4. – P. 381–398.
4. *Bobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // Commun. Math. Phys. – 1989. – **122**, № 2. – P. 321–354.
5. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, № 3. – P. 169–172.
6. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. – Ижевск: Изд-во РХД, 1999. – Т. 1. – 444 с.; Т. 2. – 448 с.
7. *Kharlamov M.P., Zotev D.B.* Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. – 2005. – **10**, № 1. – P. 15–19.
8. *Харламов М.П.* Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 13–22.
9. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359–1363.
10. *Zotev D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // Регулярная и хаотическая динамика. – 2000. – **5**, № 4. – С. 437–458.
11. *Харламов М.П.* Особые периодические решения обобщенного случая Делоне // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 23–33.

Волгоградская академия гос. службы, Россия
mharlamov@vags.ru

Получено 22.08.07