ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2007. Вып. 37

УДК 531.38

©2007. **И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Е.И. Харламова**

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА

Дан обзор работ, посвященных исследованию проблемы понижения порядка уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Обсуждаются замены переменных, упрощающие поиск алгебраических инвариантных соотношений. С использованием переменных Гесса, Харламова, Андуайе–Деприполучены новые формы уравнений.

Введение. История создания дифференциальных уравнений динамики твердого тела является весьма интересной и поучительной, она дает возможность проследить все этапы формирования одной из наиболее удачных математических моделей аналитической механики.

В 1749 г. Жан Лерон Даламбер приступил к изучению чрезвычайно трудной задачи о движении Земли, рассматриваемой как твердое тело, под действием сил притяжения Солнца и Луны. Эта работа привлекла к себе большое внимание научной общественности и явилась мощным стимулом развития исследований по динамике твердого тела. Последовавшие за этим работы Леонарда Эйлера признаны классическими. Он создал геометрию масс, ввел понятие угловой скорости, определил главные оси координат, отнеся к ним кинематические характеристики, записал динамические и кинематические уравнения, свел к квадратурам задачу о движении произвольного тела по инерции.

Результатом титанической работы Эйлера явились дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Эти знаменитые уравнения носят теперь название *уравнений Эйлера–Пуассона*:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{M} = A\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент, $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела в его неподвижной точке, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт силы тяжести, $\mathbf{r}$ – орт, направленный из неподвижной точки к центру тяжести тела. Первые интегралы уравнений (1) определяются следующими формулами:

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\gamma} = h, \qquad G = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\gamma} = g, \qquad I = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1. \tag{2}$$

Сформированные Л. Эйлером уравнения стремились усовершенствовать Ж.Л. Лагранж, С.Д. Пуассон, В. Гесс [1], П.А. Шифф [2], С.А. Чаплыгин [3], Н. Ковалевский [4], А.Д. Билимович [5] и др. В результате были созданы замечательные уравнения, которые до сих пор удивляют остроумием и разнообразием примененных математических приемов.

1. Специальные оси и уравнения П.В. Харламова. Существенным образом понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1) с помощью известных первых интегралов (2) удалось не так давно: в 1962 году П.В. Харламов отказался от традиционного использования главных осей тензора инерции в неподвижной точке тела и определяющую роль придал оси, идущей из неподвижной точки к центру масс тела. Вместо тензора инерции он использовал гирационный тензор и связал с ним определенным образом выбор оставшихся двух осей. Такие оси П.В. Харламов [6] назвал специальными. Понижение порядка уравнений Эйлера–Пуассона осуществляется в специальных осях координат наиболее простым способом, что и обусловило их появление. Задача о движении тела была сведена к двум дифференциальным уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок.

Пусть $\mathbf{e}_i$ – собственный вектор оператора инерции A, соответствующий диагональной компоненте A_i. Положение твердого тела в трехмерном координатном евклидовом пространстве задано ортонормированным репером $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Выберем новый ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$ так, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1{}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{e}_2^{'} &= \frac{1}{|\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1|}\left[(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1)\cos\alpha + (\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1))\sin\alpha\right], \\ \mathbf{e}_3^{'} = \mathbf{e}_1^{'}\times\mathbf{e}_2^{'} &= \frac{1}{|\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1|}\left[(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1))\cos\alpha - (\mathbf{r}\times\mathbf{e}_1)\sin\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Угол α соответствует повороту координатных осей, жестко связанных с телом. Целесообразный выбор угла α позволяет упрощать дифференциальные уравнения движения. Следуя работе [7, §2.6], положим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_1(A_2 - A_3)\, r_1 r_2 r_3}{A_2(A_3 - A_1)(r_2^2 + r_3^2)^2 + A_1(A_2 - A_3)(r_3^2 - r_2^2 r_1^2)}. \tag{4}$$

Формулами (3),(4) задано преобразование от главных осей к специальным осям П.В. Харламова. В результате первая координатная ось проведена через центр масс тела, а вторая и третья направлены так, чтобы интеграл энергии принял вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\, a_{11}\mathcal{M}_1^2 + \frac{1}{2}\, a_{22}\mathcal{M}_2^2 + \frac{1}{2}\, a_{33}\mathcal{M}_3^2 + a_{12}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + a_{13}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 - \nu_1, \tag{5}$$

где $\mathcal{M}_i$ – компоненты кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и ν_i – компоненты единичного вектора вертикали $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$. В новых переменных интегралы G, I имеют тот же вид, что и в старых переменных:

$$\mathcal{G} = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\nu} = g, \qquad \mathcal{I} = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{6}$$

Изменение координатного базиса соответствует следующим преобразованиям гирационного тензора и тензора инерции твердого тела:

$$a = RBA^{-1}B^T R^T, \qquad \mathcal{A} = a^{-1} = RBAB^T R^T,$$

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ -\dfrac{(r_2^2+r_3^2)}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_1 r_2}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_1 r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} \\ 0 & -\dfrac{r_3}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} & \dfrac{r_2}{\sqrt{r_2^2+r_3^2}} \end{pmatrix}.
$$

Следствием (4) являются равенства $a_{23} = a_{32} = 0$, $\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{13} - \mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{23} = 0$.

Рассмотрим простейшие частные случаи. Пусть $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, тогда преобразование подвижного базиса (3) не требуется, так как в исходных переменных $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ гамильтониан имеет вид (5) с коэффициентами

$$
a_{11} = A_1^{-1}, \quad a_{22} = A_2^{-1}, \quad a_{33} = A_3^{-1}, \; a_{12} = a_{13} = 0.
$$

В случае Лагранжа следует положить $A_2 = A_3 > A_1/2$, т.е. $a_{22} = a_{33} < 2a_{11}$.

Пусть центр масс тела находится в главной плоскости, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$. В этом случае, в соответствии с (4), зададим $\alpha = 0$. Находим выражения

$$
B = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 & (A_2 - A_1)\, r_1 r_2 & 0 \\ (A_2 - A_1)\, r_1 r_2 & A_1 r_2^2 + A_2 r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix},
$$

$$
R = \operatorname{diag}(1,1,1), \quad a = \begin{pmatrix} A_1^{-1} r_1^2 + A_2^{-1} r_2^2 & (A_2^{-1} - A_1^{-1})\, r_1 r_2 & 0 \\ (A_2^{-1} - A_1^{-1})\, r_1 r_2 & A_1^{-1} r_2^2 + A_2^{-1} r_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}.
$$

Для краткости обозначим x, y, z компоненты $\mathcal{M}_i$ кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$.

Уравнения П.В. Харламова (1962):

$$
\begin{gathered}
X\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right) + (a_{12}y + a_{13}z)(y^2+z^2) + \\
+x\left[(a_{11} - \frac{1}{2}\,a_{22})y^2 + (a_{11} - \frac{1}{2}\,a_{33})z^2\right] + \frac{1}{2}\,a_{11}x^3 - hx - g = 0,
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\left[(a_{11} - a_{22})xy + (a_{12}y + a_{13}z)y - a_{12}x^2 + X\frac{dz}{dx}\right]^2 + \\
+\left[(a_{11} - a_{33})xz + (a_{12}y + a_{13}z)z - a_{13}x^2 - X\frac{dy}{dx}\right]^2 + \\
+\left[\frac{1}{2}\,(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + (a_{12}y + a_{13}z)x - h\right]^2 = 1,
\end{gathered} \tag{8}
$$

где $X = (a_{33} - a_{22})yz + (a_{13}y - a_{12}z)\,x$, x – независимая переменная, y, z – две зависимые переменные. Уравнения Харламова [6, 7] получены в предположении $x \neq \mathrm{const}$. Определив из уравнений (7),(8) зависимость y и z от x, найдем $x(t)$ из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (a_{33} - a_{22})yz + (a_{13}y - a_{12}z)\,x. \tag{9}$$

Таким образом задача понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона была полностью решена.

С помощью кинетической энергии $T = \dfrac{1}{2}\,a\boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}$ уравнения (7), (8) записываются в более компактном виде:

$$\left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(y\frac{dz}{dx} - z\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial T}{\partial x} - (T + h)x - g = 0,$$

$$\left[y\frac{\partial T}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial y} + \left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{dz}{dx}\right]^2 + \tag{10}$$

$$+\left[z\frac{\partial T}{\partial x} - x\frac{\partial T}{\partial z} - \left(y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}\right]^2 + (T - h)^2 = 1.$$

Компоненты гирационного тензора a_{ij} входят в уравнения (10) неявно, как коэффициенты функции T и ее производных.

2. Уравнения В. Гесса. Идея исключения компонент γ_i из уравнений Эйлера–Пуассона с помощью интегралов (2) принадлежит Вильгельму Гессу. В работе [1] он показал, что уравнения (1) могут быть приведены к уравнению

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \zeta_1 \mathbf{r} \times A\boldsymbol{\omega} + \zeta_3 \mathbf{r} \times (A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{11}$$

Пусть векторы $A\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}$ неколлинеарны, тогда положим

$$\boldsymbol{\gamma} = \zeta_1 A\boldsymbol{\omega} + \zeta_2 \mathbf{r} + \zeta_3 A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{12}$$

Подстановкой (12) в интегралы (2) находим коэффициенты

$$\zeta_1 = \frac{g - (T - h)(A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}{|A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2}\,, \quad \zeta_2 = \frac{(T - h)|A\boldsymbol{\omega}|^2 - (A\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})g}{|A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2}\,, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{|A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2}\,,$$

где $$T = \frac{1}{2}\,A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \qquad f = |A\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 - |(T - h)A\boldsymbol{\omega} - g\mathbf{r}|^2.$$

Функция $f(\boldsymbol{\omega})^{-\frac{1}{2}}$ – последний множитель уравнений (11).

П.В. Харламов показал [7, §3.6], что в специальных осях уравнения Гесса (11) имеют наиболее простой вид:

$$\dot{\mathcal{M}}_1 = (a_{33} - a_{22})\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 + (a_{13}\mathcal{M}_2 - a_{12}\mathcal{M}_3)\,\mathcal{M}_1,$$
$$\dot{\mathcal{M}}_2 = (a_{11} - a_{33})\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3 - a_{13}(\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_3^2) + a_{12}\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3 - \zeta_1\mathcal{M}_3 + \zeta_3\mathcal{M}_2,$$
$$\dot{\mathcal{M}}_3 = (a_{22} - a_{11})\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + a_{12}(\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) - a_{13}\mathcal{M}_2\,\mathcal{M}_3 + \zeta_1\mathcal{M}_2 + \zeta_3\mathcal{M}_3,$$

где $$\zeta_1 = \frac{g - (T-h)\,\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\sqrt{f}}{\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2},$$

$$T = \frac{1}{2}\,a_{11}\mathcal{M}_1^2 + \frac{1}{2}\,a_{22}\mathcal{M}_2^2 + \frac{1}{2}\,a_{33}\mathcal{M}_3^2 + a_{12}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 + a_{13}\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3, \tag{13}$$
$$f = \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 - (T-h)^2(\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2) + 2g(T-h)\mathcal{M}_1 - g^2.$$

Как следует из (10),(11), структуру уравнений движения вполне определяют функции $\frac{1}{2}\,A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$, $|A\boldsymbol{\omega}|^2$, $A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}$. Гесс [1] предложил использовать эти функции в качестве основных переменных. Введем следующие обозначения:

$$T = \frac{1}{2}\,A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2, \quad x = A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}, \quad w_1 = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}, \quad \omega^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2.$$

Вторая форма уравнений В. Гесса (1890):

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\,\mu}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & g & T-h \\ g & \mu & x \\ T-h & x & 1 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{d\,x}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & w_1 \\ x & \mu & 2T \\ w_1 & 2T & \omega^2 \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$\left(\mu - x^2\right)\frac{d\,T}{dt} = \left(T - \frac{1}{2}\,w_1 x\right)\frac{d\,\mu}{dt} + [g - (T-h)\,x]\,\frac{d\,x}{dt}. \tag{16}$$

Кроме трех основных переменных, уравнения (14)-(16) содержат величины ω^2, w_1, зависимость которых от T, μ, x определяется дополнительными алгебраическими соотношениями. Гессу [1, §3] удалось выписать в явном виде только одно из этих соотношений:

$$\begin{aligned} &\left(\omega^2 - w_1^2\right)(b_5\,x - b_3\,w_1) - (2\,T - x\,w_1)\,[(b_1 - b_4)x - (b_2 - b_5)w_1] + \\ &\qquad + (\mu - x^2)(x - b_4\,w_1) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

где постоянные параметры имеют вид

$$b_1 = A_1 + A_2 + A_3, \;\; b_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1, \;\; b_3 = A_1A_2A_3,$$
$$b_4 = A_1r_1^2 + A_2r_2^2 + A_3r_3^2, \;\; b_5 = A_1A_2r_3^2 + A_2A_3r_1^2 + A_3A_1r_2^2.$$

В частном случае $A_2 \neq A_3$, $\mathbf{r} = (1,0,0)$ уравнения Гесса (14)-(16) преобразуются в автономную систему уравнений следующего вида:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \mu - x^2 - g^2 + 2gx\,(T-h) - \mu(T-h)^2,$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\left[2T - \mu A_2^{-1} + (A_2^{-1} - A_1^{-1})x^2\right]\left[2T - \mu A_3^{-1} + (A_3^{-1} - A_1^{-1})x^2\right],$$
$$\left(\mu - x^2\right)\frac{dT}{dt} = \left(T - \frac{x^2}{2A_1}\right)\frac{d\mu}{dt} + \left[g - (T-h)\,x\right]\frac{dx}{dt}.$$

До тех пор, пока не определена явная и простая зависимость w_1 от T, μ, x, уравнения (14)–(16) будут иметь лишь ограниченное применение. Дополним начатое Гессом исследование общего случая. Введем обозначения

$$c_0 = \frac{a_{22} - a_{33}}{a_{12}^2 + a_{13}^2},\;\; c_1 = \frac{a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2},\;\; c_3 = \frac{a_{22}^2 a_{13}^2 + a_{33}^2 a_{12}^2}{a_{12}^2 + a_{13}^2},\;\; c_2 = a_{11} - c_1.$$

Заменим переменные w_1, T на w_0, T_0 с помощью формул

$$w_0 = w_1 - a_{11}x, \quad T_0 = 2T - c_1\mu - c_2\,x^2. \tag{18}$$

В новых переменных соотношение (17) примет вид

$$\begin{gathered} w_0\left[\omega^2 - (w_0 + a_{11}x)^2\right] - c_3\,w_0(\mu - x^2) - \\ -\left[(a_{22} + a_{33})w_0 + (a_{12}^2 + a_{13}^2)\,x\right](T_0 - xw_0) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Запишем второе алгебраическое соотношение

$$\frac{1}{a_{12}^2}\left[c_0 w_0^2 + T_0 - 2xw_0\right]^2 + \frac{1}{a_{13}^2}\left[c_0 w_0^2 - T_0 + 2xw_0\right]^2 = 4\,c_0^2 w_0^2(\mu - x^2). \tag{20}$$

Именно соотношения (18), (20) выражают зависимость w_1 от гессовых переменных T, μ, x. После исключения ω^2 уравнения (14)–(16) примут вид

$$\begin{aligned} \dot\mu^2 =&\, 4(\mu - x^2 - g^2) + 4gx\left[T_0 + c_1\mu + c_2x^2 - 2h\right] - \\ &- \mu\left[T_0 + c_1\mu + c_2x^2 - 2h\right]^2, \\ w_0\dot x^2 =&\, a_{12}^2 a_{13}^2 c_0^2 w_0(\mu - x^2)^2 - w_0(T_0 - xw_0)^2 + \\ &+ \left[(a_{12}^2 - a_{13}^2)c_0w_0 + (a_{12}^2 + a_{13}^2)\,x\right](T_0 - xw_0)(\mu - x^2), \\ \left(\mu - x^2\right)\dot T_0 =&\, \left[T_0 - xw_0\right]\dot\mu + \left[2g - (T_0 + (c_2 + a_{11})\mu - c_2\,x^2 - 2h)\,x\right]\dot x. \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) можно достаточно просто привести к системе двух дифференциальных уравнений. Выберем μ в качестве независимой переменной.

Из последнего уравнения (21) найдем w_0, подставим полученное выражение в (20) и во второе уравнение (21). Величину dt исключим с помощью первого уравнения (21). Полученные таким образом дифференциальные полиномы будут третьей и четвертой степени относительно производных $dx/d\mu$, $dT_0/d\mu$.

П.А. Шифф [2] вслед за В. Гессом получил дифференциальные уравнения вида (14)–(16), связывающие переменные x, μ, T и компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Эти уравнения, названные в [8] *уравнениями Гесса–Шиффа*, не имеют преимуществ по сравнению с исходными уравнениями Эйлера–Пуассона, поскольку их следует рассматривать совместно с тремя алгебраическими соотношениями $2T = A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$, $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$, $x = A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}$.

3. Углы Эйлера и канонические переменные для специальных осей. Положение твердого тела в пространстве определено тремя независимыми координатами – углами Эйлера φ, θ, ψ. Найдем выражения фазовых переменных $\mathcal{M}_i, \nu_i$ через импульсы $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ и углы Эйлера θ, φ, ψ :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1 = p_\varphi, \ \ \mathcal{M}_2 = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi,\\
&\mathcal{M}_3 = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi;\\
&\nu_1 = \cos\theta, \ \ \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \ \ \nu_3 = \sin\theta\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Положим $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$. Обратное к (22) преобразование дают формулы

$$\begin{aligned}
&p_\varphi = \mathcal{M}_1, \ \ \varphi = \operatorname{arctg}(\nu_2/\nu_3), \ \ p_\psi = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\nu},\\
&p_\theta = \frac{\mathcal{M}_2\nu_3 - \mathcal{M}_3\nu_2}{\sqrt{\nu_2^2+\nu_3^2}}, \quad \theta = \arccos\nu_1.
\end{aligned} \tag{23}$$

Подстановкой соотношений (22) в (5) найдем гамильтониан

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} =& \frac{1}{2}\,a_{11}p_\varphi^2 + \frac{1}{2}\,a_{22}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi\right)^2 +\\
&+ \frac{1}{2}\,a_{33}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi\right)^2 +\\
&+ a_{12}\,p_\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi\right) +\\
&+ a_{13}\,p_\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi\right) - \cos\theta.
\end{aligned}$$

Соответствующие канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\psi},$$

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}, \qquad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \qquad \frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}.$$

Переменная ψ не входит явно в гамильтониан $\mathcal{H}$, поэтому соответствующий импульс p_ψ постоянен. Исключением одного из оставшихся импульсов (p_φ или p_θ) из уравнений и заменой времени, получим систему канонических уравнений второго порядка.

Описать движение тела вокруг неподвижной точки можно уравнениями Лагранжа, в которых углы Эйлера являются обобщенными координатами. А.Д. Билимович [5] применил известные методы аналитической механики для понижения порядка такой системы: он записал уравнения Лагранжа и Рауса, перешел к уравнению Якоби, показал, что задача может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = P_3 + VP_2\sqrt{V_1P_2}$, где $x = \mathrm{tg}(\theta/2)$, $y = \mathrm{tg}(\varphi/2)$, $' \stackrel{\mathrm{def}}{=} d/dx$; V, V_1 – рациональные функции переменных x, y; P_2, P_3 – полиномы второй и третьей степени относительно производной y' с коэффициентами, рациональными функциями x, y.

Аналогичные уравнения второго порядка были получены в работах [9] – [12] другими методами, с использованием различных координат, задающих пространственную ориентацию твердого тела. См. также работы [13]–[15], развивающие эти исследования.

4. Центр масс принадлежит главной оси инерции. Некоторые частные решения уравнений Эйлера–Пуассона были найдены в предположении, что центр масс тела лежит на одной из главных осей инерции. Симметрии этого случая позволяют вводить удобные фазовые переменные и записывать дифференциальные уравнения, предназначенные для нахождения простых точных решений, выражаемых в терминах хорошо изученных функций. В работе [4] Н. Ковалевский применил метод вариации постоянных к интегрируемому случаю Эйлера, записал в достаточно простой форме уравнения движения твердого тела при ограничениях $A_2 \neq A_3$, $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$, нашел новое частное решение уравнений Эйлера–Пуассона.

Уравнения Н. Ковалевского (1908):

$$\begin{aligned} &\sigma''\tau + \frac{1}{2}\,\sigma'\tau' + a_1 + a_2\sigma + a_3\tau'\omega_1 + a_4\tau + a_5\omega_1^2 = 0, \\ &\sigma\tau'' + \frac{1}{2}\,\sigma'\tau' + b_1 + b_2\sigma'\omega_1 + b_3\sigma + b_4\tau + b_5\omega_1^2 = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где ω_1– независимая переменная, $' \stackrel{\mathrm{def}}{=} d/d\omega_1$, зависимыми переменными являются

$$\sigma = (A_2 - A_3)\,\omega_2^2/A_1, \;\; \tau = (A_2 - A_3)\,\omega_3^2/A_1,$$

постоянные a_i, b_i – рациональные функции главных моментов инерции A_i и константы энергии h.

Интегралы уравнений (24) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma' \tau - \sigma \tau' + c_1 + c_2\omega_1 + c_3\sigma\omega_1 + c_4\tau\omega_1 + c_5\omega_1^3 = 0,\\
&d_1(\sigma')^2\tau + \sigma(\tau')^2 + d_2 + d_3\sigma + d_4\tau + d_5\sigma^2 + d_6\sigma'\tau\omega_1 + d_7\sigma\tau'\omega_1 + \\
&\quad + d_8\sigma\tau + d_9\tau^2 + d_{10}\omega_1^2 + d_{11}\sigma\omega_1^2 + d_{12}\tau\omega_1^2 + d_{13}\omega_1^4 = 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

они образуют замкнутую подсистему второго порядка.

Как известно из [3], С.А. Чаплыгин стремился таким образом преобразовать исходные уравнения Эйлера, чтобы нахождение новых случаев интегрируемости стало более прозрачным. С этой целью в нескольких неопубликованных рукописях [3] он использовал переменные

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{2(A_2 - A_3)}\left(2A_2T - |\mathbf{M}|^2\right) = \frac{A_3}{2}\,\omega_3^2 - \frac{A_1(A_1 - A_2)}{2(A_2 - A_3)}\,\omega_1^2,\\
\tau_1 &= \frac{1}{2(A_2 - A_3)}\left(2A_3T - |\mathbf{M}|^2\right) = -\frac{A_2}{2}\,\omega_2^2 + \frac{A_1(A_3 - A_1)}{2(A_2 - A_3)}\,\omega_1^2
\end{aligned}
$$

для вывода дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (24), затем записал интеграл площадей (25) и показал, как из полученных уравнений следуют интегрируемые случаи Ковалевской и Горячева–Чаплыгина.

К настоящему времени уравнения Н. Ковалевского являются наиболее изученными уравнениями движения твердого тела. С помощью методов степенной геометрии для решений системы (24) в случае общего положения вычислены все семейства степенных и степенно-логарифмических асимптотик и разложений. Указаны множества значений параметров A_1, A_2, A_3, в которых разложения всех семейств *а*) не имеют комплексных показателей, *б*) не имеют логарифмов, *в*) имеют только рациональные показатели. Вычислены характеристики соответствующих семейств разложений решений уравнений Эйлера–Пуассона. Краткий обзор перечисленных результатов см. в работе [16]. Кроме того, в явном виде найдены все частные решения системы (24), представимые конечными суммами рациональных степеней независимой переменной ω_1. Эти результаты изложены в работе [17].

5. Центр масс принадлежит главной плоскости инерции. Все частные решения уравнений Эйлера–Пуассона получены при условии, что центр масс тела находится в одной из главных плоскостей инерции. Поэтому особый интерес представляют простые уравнения, полученные при ограничении $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$.

Интегродиффренциальное уравнение Е.И. Харламовой [18]:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[2\frac{dY}{dx}+a_{33}(x-iy)\right]\left[(\nu_1^0+i\nu_2^0)\,\exp\int_{x_0}^{x}\frac{ia_{33}\,d\zeta}{X(\zeta,y(\zeta))}+\right.\right.$$
$$+\int_{x_0}^{x}[(a_{22}-ia_{12})y(\zeta)+(a_{12}-ia_{11})\zeta]\,\frac{dY(\zeta,y(\zeta))}{d\zeta}\left(\exp\int_{\zeta}^{x}\frac{ia_{33}\,d\tau}{X(\tau,y(\tau))}\right)\times$$
$$\left.\left.\times\frac{d\zeta}{X(\zeta,y(\zeta))}\right]\right\}=a_{33}g+(a_{22}y^2+2a_{12}xy+a_{11}x^2-2h)\frac{dY}{dx},$$

где

$$X(x,y)=a_{12}x+(a_{22}-a_{33})y,\ \ Y(x,y)=\frac{1}{2}\,(a_{11}-a_{33})x^2+\frac{1}{2}\,(a_{22}-a_{33})y^2+a_{12}xy.$$

Интегродифференциальное уравнение связывает компоненты x,y вектора кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и тем самым определяет функцию $y(x)$. Если эта функция найдена, то зависимость $\nu_1(x),\nu_2(x)$ устанавливается из соотношения

$$\nu_1+i\nu_2=(\nu_1^0+i\nu_2^0)\exp\int_{x_0}^{x}\frac{ia_{33}\,d\zeta}{X(\zeta,y(\zeta))}+\int_{x_0}^{x}[(a_{22}-ia_{12})y(\zeta)+$$
$$+(a_{12}-ia_{11})\zeta]\,\frac{dY(\zeta,y(\zeta))}{d\zeta}\left(\exp\int_{\zeta}^{x}\frac{ia_{33}\,d\tau}{X(\tau,y(\tau))}\right)\frac{d\zeta}{X(\zeta,y(\zeta))}.$$

Интегродифференциальное уравнение содержит выражения, трансцендентные по отношению к $y(x)$. Для изучения условий существования алгебраических инвариантных соотношений, связывающих y и x, это уравнение было преобразовано в [19] к более удобной форме. В частности, в [19] введена новая независимая переменная σ, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{a_{33}}{s}\frac{dx}{d\sigma}=a_{12}x+(a_{22}-a_{33})y,$$

где s – постоянный параметр, используемый для упрощения получающихся выражений. Метод построения точных решений уравнений динамики твердого тела, основанный на использовании свойств интегродифференциального уравнения, и результаты системного анализа условий существования алгебраических инвариантных соотношений, приведшего к открытию новых решений задачи о движении гиростата, изложены в монографии [20].

Уравнения А.И. Докшевича [21]:

$$\begin{aligned}&U''+U=a_0+a_1V'V''+a_2V'^2+a_3VV'+a_4V^2,\\&(V'+b_1V)\,U'-(2V''+b_2V)\,U+b_3V^2V''+\\&+b_1V'^3+b_4VV'^2+b_5V^3+b_6V=b_0,\end{aligned}\tag{26}$$

где τ – независимая переменная, $' \stackrel{\mathrm{def}}{=} d/d\tau$, $d\tau/dt = a_{33}z$, коэффициенты a_i, b_i – постоянные. Зависимыми переменными в (26) являются

$$V = \frac{a_{33}}{a_{33}-a_{22}}\, x, \quad U = \frac{1}{2}\, z^2 + \frac{1}{2}\, x^2 \left[\frac{2a_{11}-a_{22}}{a_{33}-a_{22}} + \frac{3a_{12}^2}{(a_{33}-a_{22})^2}\right]. \tag{27}$$

Заметим, что из интеграла $\mathcal{I} = 1$ можно получить дополнительное дифференциальное уравнение в виде полинома второй степени относительно U, U' с коэффициентами, зависящими от V, V', V''. В этом случае первое уравнение (26) будет следствием остальных уравнений.

Для многих известных частных решений уравнений Эйлера–Пуассона характерна простая зависимость переменной V от τ: $V = a\tau + b$ в случае Гриоли, $V = a\cos\lambda\tau$ в случаях Стеклова и Горячева, $V = a\cos\lambda\tau + b$ в случае Ковалевского, $V = a\cos^{3/2}\lambda\tau$ в случае Чаплыгина и т.д. Это свойство позволяет записать первое уравнение (26) в виде неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$U'' + U = F(\tau).$$

Система уравнений (26) является обобщением *уравнений Н.И. Мерцалова*, полученных при ограничениях $A_1 = A_2$, $\mathbf{r} = (r_1, 0, 0)$.

Новая форма уравнений:

$$\begin{gathered}\left[[(\tau + \frac{1}{2}\, a_{33}\mu)\, x - g]x' + (\mu - x^2)\tau' + b_0x^2 - \tau - h\right]^2 - \\ - \left[b_0x^2 - \tau - h\right] x^2 b_1 = 0,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\left[1 - (\tau + \frac{1}{2}\, a_{33}\mu)^2\right] x'^2 + 2\left[(\tau + \frac{1}{2}\, a_{33}\mu)\, x - g\right] x'\tau' + \\ + (\mu - x^2)\, \tau'^2 + \frac{1}{2}\, (a_{22} - a_{33}) \left[b_0x^2 - \tau - h\right] = 0,\end{gathered} \tag{29}$$

где $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$ – независимая переменная, $' \stackrel{\mathrm{def}}{=} d/d\mu$, зависимыми переменными являются $\tau = T - h - a_{33}\,\mu/2$, $x = A\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}$, постоянные коэффициенты b_0, b_1 выражаются через компоненты гирационного тензора:

$$b_1 = \frac{1}{2}\, a_{12}^2/(a_{33} - a_{22}), \;\; b_0 = b_1 + \frac{1}{2}\, (a_{11} - a_{33}),$$

а функциональная зависимость $\mu(t)$ задана дополнительным уравнением

$$\dot\mu^2 = 4(\mu - x^2 - g^2) + 8gx\, (\tau + \frac{1}{2}\, a_{33}\mu) - 4\mu(\tau + \frac{1}{2}\, a_{33}\mu)^2. \tag{30}$$

Уравнения (28),(29) получены в предположении $a_{22} \neq a_{33}$, $\mu \neq \mathrm{const}$. В работе [22] перечислены все возможные варианты, когда действительная функция времени $\mu = |A\boldsymbol{\omega}|^2$ постоянна вдоль какой-либо траектории уравнений

Эйлера–Пуассона (1). Эти случаи суть решение Эйлера ($\mathbf{r} = 0$), равномерные вращения вокруг вертикали, частные решения при условиях Лагранжа ($a_{22} = a_{33}$, $a_{12} = a_{13} = 0$) и Гесса ($a_{22} = a_{33}$, $a_{13} = 0$), соответствующие прецессионным движениям твердого тела. Заметим, что в (28)-(30) использованы фактически те же переменные, что и в уравнениях Гесса (14)-(16).

Введением безразмерных переменных

$$\tilde{\tau} = \tau + \mu_0,\ \ \tilde{\mu} = \mu\varkappa^2 - \mu_0,\ \ \tilde{x} = x\varkappa,\ \ \tilde{t} = 2\,t\varkappa,\ \ \varkappa = \sqrt{a_{33}/2}$$

представим уравнения (28)-(30) в форме

$$\begin{aligned} &\Big[((\tilde{\tau} + \tilde{\mu})\,\tilde{x} - \tilde{g})\tilde{x}' + (\tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2)\tilde{\tau}' + \tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h}\Big]^2 - \\ &- \left(\tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h}\right)\tilde{x}^2\tilde{b}_1 = 0, \\ &\left[1 - (\tilde{\tau} + \tilde{\mu})^2\right]\tilde{x}'^{\,2} + 2\left[(\tilde{\tau} + \tilde{\mu})\,\tilde{x} - \tilde{g}\right]\tilde{x}'\tilde{\tau}' + (\tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2)\,\tilde{\tau}'^{\,2} + \\ &+ \left(\tilde{b}_0\tilde{x}^2 - \tilde{\tau} - \tilde{h}\right)\tilde{b}_2 = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\dot{\tilde{\mu}}^2 = \tilde{\mu} + \mu_0 - \tilde{x}^2 - \tilde{g}^2 + 2\,\tilde{g}\tilde{x}\,(\tilde{\tau} + \tilde{\mu}) - (\tilde{\mu} + \mu_0)(\tilde{\tau} + \tilde{\mu})^2, \tag{32}$$

где $\tilde{b}_1 = a_{12}^2/[(a_{33} - a_{22})a_{33}]$, $\tilde{b}_0 = \tilde{b}_1 + (a_{11} - a_{33})/a_{33}$, $\tilde{b}_2 = (a_{22} - a_{33})/a_{33}$, $\tilde{h} = h - \mu_0$, $\tilde{g} = g\varkappa$. Произвольная постоянная μ_0, искусственно введенная в уравнения, позволяет находить степенные по переменной $\mu + \mu_0$ разложения решений дифференциальных уравнений (28),(29) методом инвариантных соотношений [20] либо методами степенной геометрии [16].

6. Переменные Андуайе–Депри для специальных осей. Используем следующие обозначения: $OXYZ$ – неподвижный триэдр с началом в точке подвеса, $Oxyz$ – специальные оси, полученные преобразованием (3), (4), Σ – плоскость, перпендикулярная вектору кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и проходящая через точку закрепления тела. Тогда переменные Андуайе–Депри [23] таковы: I_1 – проекция вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ на подвижную ось Ox, I_2 – модуль вектора кинетического момента $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, I_3 – проекция вектора $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ на неподвижную ось OZ (вертикаль), φ_1 – угол между осью Ox и линией пересечения Σ с Oyz, φ_2 – угол между линиями пересечения Σ с плоскостями Oyz и OXY, φ_3 – угол между осью OX и линией пересечения Σ с OXY. Сопряженные с I_1, I_2, I_3 переменные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ являются углами, изменяющимися по модулю 2π. Зависимость фазовых переменных от канонических переменных Андуайе–Депри выражена следующими формулами:

$$\mathcal{M}_1 = I_1,\quad \mathcal{M}_2 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1,\quad \mathcal{M}_3 = \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1, \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &\nu_1 = \cos\eta\cos\zeta - \sin\eta\sin\zeta\cos\varphi_2, \\ &\nu_2 = (\sin\eta\cos\zeta + \cos\eta\sin\zeta\cos\varphi_2)\sin\varphi_1 + \sin\zeta\cos\varphi_1\sin\varphi_2, \\ &\nu_3 = (\sin\eta\cos\zeta + \cos\eta\sin\zeta\cos\varphi_2)\cos\varphi_1 - \sin\zeta\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\cos\eta = I_1/I_2$, $\cos\zeta = I_3/I_2$. Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} &I_1 = \mathcal{M}_1, \ \ \varphi_1 = \operatorname{arctg}(\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_3), \ \ I_3 = \boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\nu}, \\ &I_2 = |\boldsymbol{\mathcal{M}}|, \ \ \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{(\mathcal{M}_3\nu_2 - \mathcal{M}_2\nu_3)}{\sqrt{\mathcal{M}_2^2+\mathcal{M}_3^2}}\,\frac{|\boldsymbol{\mathcal{M}}|}{|\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\boldsymbol{\nu}|}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Соотношения (34) могут быть записаны в векторной форме [24]

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mathcal{M}}\,\frac{I_3}{I_2^2} + (\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\mathbf{r})\,\frac{\sqrt{I_2^2-I_3^2}}{I_2\sqrt{I_2^2-I_1^2}}\,\sin\varphi_2 + \boldsymbol{\mathcal{M}}\times(\boldsymbol{\mathcal{M}}\times\mathbf{r})\,\frac{\sqrt{I_2^2-I_3^2}}{I_2^2\sqrt{I_2^2-I_1^2}}\,\cos\varphi_2. \tag{36}$$

Гамильтониан рассматриваемой механической системы является функцией переменных Андуайе–Деприи

$$\begin{aligned} \mathcal{H} =& \frac12\,a_{11}\,I_1^2 + \frac12\,a_{22}\,(I_2^2-I_1^2)\sin^2\varphi_1 + \frac12\,a_{33}\,(I_2^2-I_1^2)\cos^2\varphi_1 + \\ &+ a_{12}I_1\sqrt{I_2^2-I_1^2}\sin\varphi_1 + a_{13}I_1\sqrt{I_2^2-I_1^2}\cos\varphi_1 - \frac{I_1I_3}{I_2^2} + \\ &+ \frac{1}{I_2^2}\sqrt{I_2^2-I_3^2}\sqrt{I_2^2-I_1^2}\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Соответствующие (37) уравнения Гамильтона записываются в стандартном виде

$$\dot\varphi_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_i}, \ \ \dot I_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi_i}, \ \ i = \overline{1,3}. \tag{38}$$

Переменная φ_3 является циклической координатой, так как не входит явно в выражение $\mathcal{H}$. Из (38) находим

$$I_3 = \text{const}, \quad \dot\varphi_3 = -\frac{I_1}{I_2^2} - \frac{I_3\sqrt{I_2^2-I_1^2}}{I_2^2\sqrt{I_2^2-I_3^2}}\,\cos\varphi_2. \tag{39}$$

Уравнения (39) достаточно просто записываются с помощью фазовых переменных:

$$I_3 = g, \quad \dot\varphi_3 = \frac{g\,\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{M}|^2 - g^2} \quad \text{или} \quad \dot\varphi_3 = \frac{g\,\nu_1 - \mathcal{M}_1}{|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2 - g^2}.$$

Запишем уравнение Гесса (14) в канонических переменных Андуайе–Деприи:

$$\frac12\,\frac{d|\boldsymbol{\mathcal{M}}|^2}{dt} \equiv I_2\frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{I_2^2-I_1^2}\sqrt{I_2^2-I_3^2}}{I_2}\,\sin\varphi_2. \tag{40}$$

Выразим координату φ_2 из интеграла энергии $\mathcal{H}(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2) = h$, вместо функции $\mathcal{H}$ запишем новый гамильтониан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \arccos \Bigg(& \frac{1}{2\sqrt{I_2^2 - I_3^2}\sqrt{I_2^2 - I_1^2}} \{2I_1I_3 + 2I_2^2h - a_{11}\, I_1^2I_2^2 - \\ & - I_2^2(I_2^2 - I_1^2)(a_{22}\,\sin^2\varphi_1 + a_{33}\,\cos^2\varphi_1) - \\ & -2I_1I_2^2\sqrt{I_2^2 - I_1^2}(a_{12}\sin\varphi_1 + a_{13}\cos\varphi_1)\} \Bigg).\end{aligned} \tag{41}$$

Гамильтонова система дифференциальных уравнений имеет второй порядок:

$$\frac{dI_1}{dI_2} = -\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\varphi_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{dI_2} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial I_1}. \tag{42}$$

Проинтегрировав систему (42), найдем величины I_1, φ_1 как функции от переменной I_2. Зависимость I_2 от времени t найдем из уравнения (40), выразив φ_2 через I_2 с учетом (41) и решений системы (42).

В развернутом виде правые части уравнений (42) содержат радикалы и тригонометрические функции. Для упрощения уравнений (42) преобразуем переменные $(I_1, \varphi_1) \to (u, v)$ по формулам

$$I_1 = I_2\frac{2u}{1+u^2}, \ \ \sqrt{I_2^2 - I_1^2} = I_2\frac{1-u^2}{1+u^2}, \ \ \sin\varphi_1 = \frac{2v}{1+v^2}, \ \ \cos\varphi_1 = \frac{1-v^2}{1+v^2}.$$

Подставим эти выражения в (38), в результате несложных упрощений получим новую форму уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$\begin{aligned} & u' I_2P_1\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)} + 2v' I_2^4P_2\frac{(1-u^2)^3}{(1+v^2)} + uP_1 = 0, \\ & v' = \frac{(1+u^2)(1+v^2)P_1}{I_2(1-u^2)^2\sqrt{F}}, \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{\sqrt{F}}{2I_2(1+u^2)^2(1+v^2)^2},\end{aligned} \tag{43}$$

где I_2 – независимая переменная системы второго порядка, $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dI_2$, u, v – две зависимые переменные, $F(u, v, I_2), P_1(u, v, I_2), P_2(u, v)$ – полиномы следующего вида:

$$F = 4(1-u^4)^2(1+v^2)^4(I_2^2 - I_3^2) - b_1^2,$$

$$P_1 = b_3I_2^3 - 2u(1+u^2)^2(1+v^2)^2\, I_2h - (1+u^2)^3(1+v^2)^2I_3,$$

$$P_2 = v(1-v^2)(1-u^2)(a_{22} - a_{33}) + u(1-v^4)a_{12} - 2uv(1+v^2)a_{13},$$

$$
\begin{aligned}
b_1 =& I_2^3 b_2 - 2(1+u^2)^2(1+v^2)^2\, I_2 h - 4u(1+u^2)(1+v^2)^2\, I_3,\\
b_2 =& 4u^2(1+v^2)^2 a_{11} + 4v^2(1-u^2)^2 a_{22} + (1-v^2)^2(1-u^2)^2 a_{33} +\\
&+ 8uv(1+v^2)(1-u^2) a_{12} + 4u(1-v^4)(1-u^2) a_{13},\\
b_3 =& 2u(1+v^2)^2(1+u^4) a_{11} - 4uv^2(1-u^2)^2 a_{22} - u(1-v^2)^2(1-u^2)^2 a_{33} +\\
&+ 2v(1+v^2)(1-u^2)^3 a_{12} + (1-v^4)(1-u^2)^3 a_{13}.
\end{aligned}
$$

Уравнения (43) могут быть получены из (20), (21) заменой переменных

$$
x = \frac{2I_2\, u}{1+u^2}, \quad \mu = I_2^2, \quad w_0 = \frac{I_2(1-u^2)(2a_{12}v + a_{13} - a_{13}v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)},
$$

$$
\frac{T_0}{w_0} = \frac{I_2(a_{22}-a_{33})(1-u^2)(2a_{12}v - a_{13} + a_{13}v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)(a_{12}^2 + a_{13}^2)} + \frac{4I_2 u}{1+u^2}.
$$

Введем переменные s, φ_1, φ_2 по формулам

$$
\mathcal{M}_1 = \frac{1}{s}\sin\varphi_2, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{1}{s}\cos\varphi_2 \sin\varphi_1, \quad \mathcal{M}_3 = \frac{1}{s}\cos\varphi_2\cos\varphi_1. \tag{44}
$$

Кинетическую энергию T найдем из (13),(44). Далее подстановкой выражений (44) в (11) получим следующие уравнения:

$$
\begin{cases}
\varphi_1' = \lambda^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}, \quad \varphi_2' = -\lambda^{-1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \dfrac{\sin\varphi_2}{s\cos\varphi_2}, \quad \dfrac{d\,s}{dt} = \lambda,\\
\lambda = s\cos\varphi_2\sqrt{s^2 - g^2 s^4 - \Phi^2}, \quad \Phi = [(T-h) - g\, s\sin\varphi_2]\; s/\cos\varphi_2.
\end{cases} \tag{45}
$$

Первые два уравнения (45) образуют замкнутую подсистему второго порядка, s – независимая переменная, $' \overset{\text{def}}{=} d/ds$. Проинтегрировав эти уравнения, найдем зависимость $s(t)$ из третьего уравнения (45). Заметим, что уравнения (45) могут быть получены преобразованием системы (38) либо непосредственной подстановкой сферических координат (44) в уравнения П.В. Харламова (7)–(9).

Уравнения (21), (28), (29), (45) получены И.Н. Гашененко, они впервые публикуются в этой работе. Проблемы понижения порядка уравнений движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки будут рассмотрены в отдельной статье.

1. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1890. – **37**. – S. 153–181.
2. *Шифф П.А.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// Мат. сборник. – 1903. – **24**, вып. 2. – С. 169–177.
3. *Сретенский Л.Н.* О работах С.А. Чаплыгина по теоретической механике. – В кн.: Чаплыгин С.А. Собр. соч. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 3. – С. 366–376.

4. *Kowalewski N.* Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt// Math. Ann. – 1908. – **65**. – S. 528–537.
5. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки// В кн.: Сб. статей, посвященных проф. Г.К. Суслову. – Киев, 1911. – С. 23–74.
6. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения твердого тела, имеющего неподвижную точку// Прикл. матем. и механика. – 1963. – **27**, вып. 4. – С. 703–707.
7. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
8. *Stäckel P.* Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels// Math. Ann. – 1909. – **67**. – S. 399–432.
9. *Харламова Е.И.* О канонических уравнениях движения тела, имеющего неподвижную точку// Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 102–107.
10. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению// Там же. – 1969. – Вып. 1. – С. 107–116.
11. *Яхья Х.М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1976. – № 6. – С. 76–79.
12. *Yehia H.M.* On the reduction of the order of equations of motion of a gyrostat in an axisymmetric field// J. de Mécanique theór. et appl. –1983. – **2**, № 3. – P. 451–462.
13. *Колосов Г.В.* О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. – СПб, 1903. – 76 с.
14. *Харламов М.П.* Понижение порядка в механических системах с симметрией// Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 4–18.
15. *Мозалевская Г.В, Харламова Е.И.* Уравнения динамики твердого тела в переменных С.А. Чаплыгина// Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 9–20.
16. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии// Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 3–15.
17. *Брюно А.Д., Гашененко И.Н.* Конечные решения уравнений Н. Ковалевского// Там же. – 2005. – Вып. 35. – С. 31–37.
18. *Харламова Е.И.* Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи// Прикл. матем. и механика. – 1966. – **30**, вып. 4. – С. 784–788.
19. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* О преобразовании интегродифференциального уравнения задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку// Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 12–16.
20. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
21. *Докшевич А.И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Прикл. механика. – 1968. – **4**, вып. 11. – С. 95–100.
22. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата// Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.
23. *Деприи А.* Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости// Механика. Сб. переводов. – 1968. – № 2. – С. 3–9.
24. *Гашененко И.Н.* Изоэнергетические поверхности в задаче о движении тела с неподвижной точкой// Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 3–12.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`applmech@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 20.07.07