В дни проведения эйлеровской конференции в Мелекино из Москвы пришло печальное известие о кончине Валентина Витальевича Румянцева. Академик В.В. Румянцев на протяжении более чем 15 лет поощрял и всемерно поддерживал исследования автора по тематике – обратимые механические системы.

Светлой памяти Учителя посвящаю работу.

УДК 531.36; 531.38

 В.Н. Тхай

ДВЕ ЗАДАЧИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА[1]

Задачи Л. Эйлера – ограниченная задача трех тел и задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки – относятся к классу обратимых механических систем. Статья состоит из трех частей. В первой части излагаются вопросы теории обратимых механических систем, допускающих первые интегралы. Дается определение обратимой механической системы, вводятся основные понятия, выделяется типичная ситуация для симметричных периодических движений, обсуждается проблема первых интегралов.
Во второй части анализируется обратимая консервативная механическая система с двумя степенями свободы и симметричным потенциалом, допускающая интеграл Якоби. В частном случае получаются выводы для ограниченной задачи трех тел. Наконец, в третьей части исследуется задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. В задачах Л. Эйлера, в частности, продемонстририровано положение: параметрическое пространство задачи разбивается на множество полной меры, где дополнительный гладкий интеграл отсутствует, и на его дополнение (нулевой меры), где выполнены необходимые условия существования такого интеграла.

Введение. В 1764 г. Эйлер заканчивает работу “Размышления о движении небесных тел” (опубликована в 1766 г. [1]) и вводит в небесную механику ограниченную задачу трех тел. Впоследствие эта задача стала основной задачей небесной механики (см. [2]).

Л. Эйлер строил одним из первых математические модели природы, полагая, что “...всемудрейший Творец учитывал слабость наших сил, когда ни одно небесное тело не расположил так, чтобы его нельзя было отнести или к планетам, или спутникам” (см. [3]). Слова Эйлера относятся к движениям небесных тел. Эти слова с полным правом относятся и к задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Задача входит составной частью во все курсы теоретической механики и является эталонной моделью в динамике твердого тела.

Задачи Эйлера – замечательные примеры систем, обладающих свойством пространственно-временной симметрии (см. [4]). Точнее, систем, инвариантных относительно линейного преобразования фазового пространства при одновременном изменении знака времени. Такие системы названы [5] обратимыми механическими системами. К этому классу систем относятся уравнения

[1] В статье излагается содержание лекции, прочитанной на конференции “Классические задачи динамики твердого тела”, посвященной 300-летию Л. Эйлера.

Лагранжа, уравнения в квазикоординатах, уравнения Аппеля и др. Теория обратимых механических систем описывает с единых позиций как голономные, так и неголономные системы.

Три обстоятельства делают работу Эйлера [1] особенно замечательной (см. [6]). Во-первых, здесь вводится в рассмотрение ограниченная задача трех тел. Во-вторых, впервые были открыты два коллинеарных решения. В-третьих, найдены впервые периодические движения в окрестности одного из коллинеарных решений. Решения Эйлера, как оказалось уже в конце 20-го века (см. [7]), принадлежат к ляпуновскому семейству симметричных периодических орбит обратимой механической системы.

Теория обратимых механических систем позволяет продвинуться в задачах Эйлера. В первую очередь, это относится к результатам по симметричным периодическим движениям (СПД) типа колебаний и вращений. Во-вторых, по новому ставится проблема неинтегрируемости и выводится ее решение: параметрическое пространство P задачи состоит из множества полной меры P^*, где дополнительный первый интеграл отсутствует, и его дополнения P^{**} нулевой меры, где выполняются необходимые условия существования такого интеграла.

Задача трех тел стала эталоном для теории обратимой консервативной системы с двумя степенями свободы и симметричным потенциалом. Ниже доказывается неинтегрируемость такой системы в типичной ситуации. Анализуются периодические движения. С этой целью вводится угол φ между касательной к траектории и осью ординат и получается обратимая система 3-го порядка. Устанавливается, что почти на всех ограниченных решениях угол φ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$, и указанные решения вполне задаются отображением $\varphi:\ 0 \to 2\pi$ плоскости (x, y) на себя. Решения с монотонным изменением φ описываются системой второго порядка. Доказывается существование однопараметрического семейства симметричных периодических движений, сохранение его в возмущенной автономной системе, а также – рождение (под действием периодических возмущений) изолированного СПД из семейства СПД порождающей задачи. Предлагается метод построения всех периодических движений и исследования их устойчивости. В частности, выводятся результаты для задачи трех тел.

В задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки используются уравнения Эйлера–Пуассона. Дана классификация классических первых интегралов в общем случае задачи: интегралы энергии и геометрический являются симметричными, в то время как интеграл кинетического момента оказывается асимметричным.

В частном случае задачи, когда центр тяжести тела расположен в главной плоскости эллипсода инерции, все три классических интеграла становятся симметричными. Здесь имеем систему с двумя неподвижными множествами. Выясняется, что любое СПД тела содержит четыре нулевых характеристических показателя (ХП), из которых два – простые, а два других образуют жорданову клетку. В типичной ситуации оставшиеся два ХП не равны нулю. Отсюда следует принадлежность любого СПД к двухпараметрическому семейству. В частности, такой вывод справедлив для маятниковых движений Млодзеевского, инициирующих псевдомаятниковые движения, и прецессий Гриоли, приводящих к псевдопрецессиям.

В рассматриваемом случае доказано отсутствие дополнительного первого интеграла в задаче. Проанализированы классические интегрируемые случаи. Предложен подход к построению всех СПД в задаче Н. Ковалевского.

Установлено, что тело совершает маятниковые движения и в случае, когда центр тяжести находится близ главной плоскости эллипсоида инерции, а также в самом общем случае тела. В этом общем случае также доказано отсутствие дополнительного первого интеграла почти во всем параметрическом пространстве задачи.

1. Обратимая механическая система. Первые интегралы. Математический маятник

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$$

дает пример простейшей обратимой механической задачи. В самом деле, фазовый портрет маятника симметричен относительно оси абсцисс, а направления движений по симметричным друг другу траекториям в верхней и нижней полуплоскостях взаимно противоположные. В записи уравнения обратимость проявляется как инвариантность его относительно замены: $(t, \varphi, \dot{\varphi}) \to \to (-t, \varphi, -\dot{\varphi})$.

Другие, более сложные примеры, предоставляют: задача трех тел, тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой, твердое тело в ньютоновском поле сил, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой плоскости (пример неголономной обратимой системы), спутник на эллиптической орбите (неавтономная обратимая система) и др.

Понятие обратимой механической системы отражает свойство пространственно-временной симметрии, присущее моделям аналитической механики.

Определение. Обратимой механической системой называется система вида

$$\begin{array}{lll} \dot{u} = U(u,v), & \dot{v} = V(u,v), & \\ U(u,-v) = -U(u,v), & V(u,-v) = V(u,v); & u \in R^l, v \in R^n \quad (l \geq n). \end{array} \tag{1}$$

Замечание. Здесь важно, что размерность вектора u не меньше размерности вектора v. В моделях аналитической механики переменная u имеет смысл координаты, а v – скорости (квазискорости).

Определение. 1. Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратимой механической системы (1).

2. Движение $u(u^0, t), v(u^0, t)$ с начальной точкой $(u^0, 0) \in M$ называется симметричным (относительно M) движением системы (1) (см. рис. 1).

3. Постоянное решение, принадлежащее неподвижному множеству M, называется положением равновесия системы (1).

4. Симметричное движение, по крайней мере, дважды пересекающее неподвижное множество, называется симметричным периодическим движением.

Эти типы движений представлены на рис. 1.

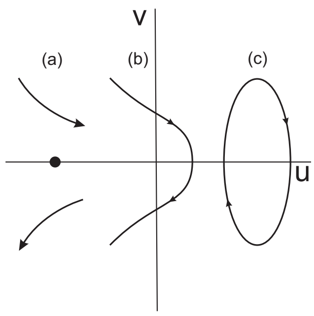

Рис. 1. a – пара симметричных друг другу движений, b – симметричное движение, c – симметричное периодическое движение.

Условие $V(u^0, 0) \neq 0$ является необходимым и достаточным для прохождения через точку $(u^0, 0) \in M$ симметричного решения, отличного от постоянного.

Условия [7]

$$v_s(u_1^0, \ldots, u_l^0, T) = 0, \quad s = 1, \ldots, n \tag{2}$$

являются необходимыми и достаточными для существования СПД периода $2T$. СПД образуют q-семейства, причем ожидается $q = l - n + 1$ [7]. Параметрами этого семейства могут служить $l - n$ величин из начальных значений $u_1^0, \ldots, u_l^0$ плюс полупериод T.

Определение. Первый интеграл $W(u, v) = h$ (const) системы (1) называется симметричным, если $W(u, -v) = W(u, v)$, и асимметричным, если $W(u, -v) = -W(u, v)$.

Справедливы следующие утверждения [8].

Теорема 1. *Если система (1) допускает первый интеграл общего вида, то этот интеграл представляется суммой симметричного и асимметричного первых интегралов.*

Теорема 2. *На симметричных движениях постоянные асимметричных интегралов равны нулю.*

Для математического маятника $l = n = 1$, а неподвижное множество M_1 такое: $M_1 = \{\varphi, \dot{\varphi} : \dot{\varphi} = 0\}$. Положения равновесия принадлежат неподвижному множеству M_1, сепаратрисы представляют собой пару симметричных друг другу решений, а колебания образуют семейство СПД, параметризованное постоянной интеграла энергии h.

Математический маятник – пример системы с двумя неподвижными множествами, о чем свидетельстует симметричность фазового портрета относительно оси ординат: уравнение инвариантно относительно замены $(t, \varphi, \dot{\varphi}) \to (-t, -\varphi, \dot{\varphi})$, а соответствующее второе неподвижное множество: $M_2 = \{\varphi, \dot{\varphi} : \varphi = 0\}$. Вращения симметричны относительно M_2 и также образуют семейство СПД по h.

Множества M_1, M_2 пересекаются в начале координат и приводят к равновесию. На фазовом портрете имеется счетное число равновесий – центров и седел. Это и неудивительно, так как угол φ входит в уравнение под знаком синуса. Учет этого обстоятельства приводит к необходимости вместо множества M_1 рассматривать множество $M_1^* = \{\varphi, \dot{\varphi} : \sin\varphi = 0\}$. Тогда получим все "интегральные многообразия" в виде равновесий.

Интеграл энергии относится к типу симметричных интегралов.

2. Зависимость периода СПД от постоянных интегралов. Рассмотрим q-семейство СПД по параметру h

$$u = \varphi(h,t), \quad v = \psi(h,t),$$

где значениям $h_1^*, ..., h_q^*$ отвечает движение с полупериодом $T(h^*) = \pi$.

Функции $\varphi(h, (T/\pi)t)$, $\psi(h, (T/\pi)t)$ имеют не зависящий от параметра h период, равный 2π. Такими же будут их производные по h_j. Вычислим эти производные, помечая нижней звездочкой подстановку значения $h = h^*$,

$$p_j(t) = (\frac{\partial\varphi}{\partial h_j})_* + \frac{t}{\pi}(\frac{\partial T}{\partial h_j})_*(\frac{\partial\varphi}{\partial t})_*, \qquad g_j(t) = (\frac{\partial\psi}{\partial h_j})_* + \frac{t}{\pi}(\frac{\partial T}{\partial h_j})_*(\frac{\partial\psi}{\partial t})_*. \tag{3}$$

Функции $(\partial\varphi/\partial h_j)_*$, $(\partial\psi/\partial h_j)_*$ составляют систему q независимых решений системы уравнений в вариациях. Из равенств (3) видно, что при $(\partial T/\partial h_j)_* = 0$ получаем периодическое решение и наоборот: для периодического решения имеем $(\partial T/\partial h_j)_* = 0$.

Рассмотрим случай наличия в системе (1) k асимметричных интегралов G_j [8].

Теорема 3. *Если обратимая механическая система (1) имеет k асимметричных первых интегралов, то частные производные периода СПД по $l - n + k$ параметрам h_j семейства равны нулю.*

Замечание. Если в системе (1) $q = l - n + k + 1$, то в точке h^* имеем

$$dT = a dh_q, \quad a = \text{const},$$

т.е. в первом приближении период СПД зависит только от одного параметра.

3. Типичная ситуация для СПД обратимой механической системы. Естественное условие $\mathrm{rank}\,(\mathrm{dG_1}, ..., \mathrm{dG_k}) = \mathrm{k}$ означает невырожденность системы асимметричных интегралов в точке $(u^*, 0) \in M$, через которую проходит СПД периода 2π.

Число r параметров семейства СПД фиксированного периода не меньше $l - n + k$. Пусть векторный параметр $h = (h_*, h_{**})$ семейства СПД содержит две компоненты, причем $\partial T/\partial h_* = 0$, $\partial T/\partial h_{**} \neq 0$. Согласно теореме 3, размерность $\dim h_* \geq l - n + k$. При этом строгое неравенство возникает в вырожденном случае, когда одна из не равных нулю производных обращается в нуль.

Пусть параметры обратимой механической системы фиксированы. Тогда вырождение обнаруживается в фазовом пространстве, когда наблюдатель перемещается в нем вдоль семейства СПД. Другая причина возникновения нетипичной для СПД ситуации – изменение парамеров системы.

Линеаризуем асимметричные интегралы на СПД. Тогда может случиться, что число k^* интегралов линейной системы вида, который дает линеаризация асимметричного интеграла, больше k. Такую ситуацию также следует признать нетипичной для СПД.

Определение. Ситуацию, в которой число k асимметричных первых интегралов совпадает с числом k^* и $\dim h_* = l - n + k$, назовем типичной для СПД.

Замечание. Типичная ситуация определяется для индивидуального СПД.

Сформулируем выводы [8], которые пока не связаны явно с наличием симметричных интегралов.

Теорема 4.
В типичной ситуации имеем

$$Ra_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{rank} \| \frac{\partial \mathrm{v_s}(\mathrm{u_1^0}, ..., \mathrm{u_l^0}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{u_j^0}} \|_* = \mathrm{n} - \mathrm{k}$$

(звездочка означает подстановку значений $u^0 = u^*, T = T^* = \pi$).

Теорема 5. *Если система содержит СПД в типичной ситуации, то размерность q семейства СПД равна $l-n+k+1$ и оно обязательно включает $(l - n + k)$-подсемейство движений фиксированного периода.*

Следствие. В типичной ситуации $\dim h_{**} = 1$.

Замечание. Укажем, что существование СПД в типичной ситуации является достаточным условием для справедливости локального варианта теоремы (в окрестности СПД). Однако, так как размерность семейства СПД определяется только размерностью векторов l и n и числом k асимметричных интегралов, то это дает глобальный вариант теоремы. Также заметим, что семейство СПД может содержать и СПД не в типичной ситуации.

Найдем грубые случаи теории продолжения СПД по параметру для обратимой механической системы.

Теорема 6. *В типичной ситуации, независимо от вида конкретных возмущений, справедливо следующее: а) в возмущенной автономной системе семейство СПД продолжается по параметру в случаях $k = 0, k = 1$, б) при действии периодических возмущений в случае $k = 0$ рождается $(l-n)$-семейство СПД.*

Выше, в теоремах 4–6, наличие симметричных интегралов специально не оговаривалось. Предположим, что система (1) допускает m симметричных интегралов. Тогда за параметры семейства СПД можно выбрать произвольные постоянные этих интегралов.

Теорема 7. *В типичной ситуации СПД содержит $l - n + 2k$ простых нулевых ХП и $\max\{1, m - (l - n + k)\}$ жордановых клеток, отвечающих* *нулевым ХП. Если $m > l - n + k$ и СПД содержит $2m - (l - n)$ нулевых ХП, то получим типичную ситуацию.*

Замечание. Из теоремы 7 следует, что при $m = l - n + k + 1$ среди всех симметричных интегралов выделяется только один интеграл. В примерах: это – интеграл энергии.

4. Проблема дополнительных первых интегралов в обратимой механической системе. Следующее утверждение связано с несуществованием в обратимой механической системе дополнительных первых интегралов.

Впервые задачу о существовании дополнительного интеграла в гамильтоновых системах, отличного от интеграла энергии, поставил Пуанкаре [9]. Отрицательный ответ на этот вопрос связан с рождением изолированных колебаний на фиксированном уровне энергии [10].

Различают глобальные и локальные первые интегралы [11]. Глобальный интеграл существует во всем фазовом пространстве, в то время как локальный интеграл – только в части фазового пространства. В постановке Пуанкаре рассматривается глобальный интеграл.

Глобальные первые интегралы рассматриваются и в параметрическом пространстве P. Интегрируемость или неинтегрируемость в части пространства P не дает подобного вывода для всего пространства. Обычно в конкретных задачах интересен вопрос о множестве интегрируемости в пространстве P и вывод о неинтегрируемости почти везде в P [12].

В обратимой механической системе факт несуществования дополнительного первого интеграла следует из наличия типичного семейства СПД (в виде колебаний и/или вращений).

Теорема 8. *Если известно, что обратимая механическая система имеет m симметричных и k асимметричных первых интегралов, причем $m > l - n + k$, и допускает СПД (какое-нибудь), содержащее $2m - (l - n)$ нулевых ХП, то в системе нет дополнительного к известным первым интегралам первого интеграла.*

Доказательство. По теореме 7 система допускает СПД в типичной ситуации. Выделим его звездочкой. Все нулевые ХП для СПД* даются теоремой 7 и число их равно $2m - (l - n)$. Само СПД* принадлежит $l - n + k + 1$ семейству (теорема 5), которое отвечает известным первым интегралам.

Пусть система имеет дополнительный первый интеграл. Если этот интеграл – асимметричный, то размерность семейства СПД становится равной $l - n + k + 2$. В случае дополнительного симметричного интеграла число нулевых ХП становится равным $2(m + 1) - (l - n)$. Оба случая невозможны, поэтому в окрестности СПД* дополнительный первый интеграл отсутствует.

Если дополнительный первый интеграл не существует в окрестности СПД*, то этот интеграл, будучи глобальным, не существует во всем фазовом пространстве. $\square$

Замечание. 1. Укажем, что в формулировке теоремы неявно предполагается существование в системе только одного неподвижного множества.

2. Фактически известным первым интегралам системы ставится в соответствие вполне определенное семейство СПД. При наличии дополнительного первого интеграла система обладает уже другим семейством СПД.

3. Условие, наложенное на ХП, позволяет конструктивно применять теорему к конкретным задачам.

4. Интегралы различаем по линеризованной на СПД части.

5. Для гамильтоновой системы утверждение известно. Метод Пуанкаре здесь дает ответ для систем, близких к интегрируемым [10].

5. Возможный сценарий рождения новых первых интегралов в обратимой механической системе. Условие $m > l - n + k$ является естественным и выполняется, например, в задаче трех тел $(l = n = 2,\ m = 1,\ k = 0)$, для тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и т.д.

Предложение 1 [12]. *Пусть обратимая механическая система содержит параметр $p \in P$ и в каждой точке $p \in P$ имеет m симметричных и k асимметричных первых интегралов, $m > l - n + k$, а на множестве $P_1 \in \in P$ допускает СПД. Если почти всюду на P_1 для этого СПД реализуется типичная ситуация, то возможен только один сценарий рождения новых асимметричных (и вместе с ними симметричных) первых интегралов: на множестве $P^* \in P_1$ ненулевые пары ХП проходят через нуль.*

6. Обратимая консервативная механическая система с двумя степенями свободы. Неинтегрируемость. В случае задачи трех тел $l = n = 2$, а сама система допускает один симметричный интеграл. Поэтому теория для обратимых механических систем, допускающих первые интегралы [8], позволяет сделать выводы как для задачи трех тел, так и для обратимой консервативной механической системы с двумя степенями свободы.

Ниже установлена неинтегрируемость задачи, устойчивость в смысле сохранения почти всех СПД в возмущенной автономной модели, а также – рождение при действии периодических возмущений изолированного СПД из семейства СПД порождающей задачи. Получен ряд выводов для ограниченных решений. Особое внимание уделено задаче трех тел.

Рассмотрим консервативную механическую систему

$$\begin{gathered} \ddot{x} - 2\dot{y} = \partial\Omega/\partial x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \partial\Omega/\partial y, \\ \Omega(x, -y) = \Omega(x, y) \end{gathered} \tag{4}$$

с симметричным потенциалом $\Omega(x, y)$. Свойство симметрии (четность по переменной y) функции $\Omega(x, y)$ приводит к тому, что система (4) принадлежит к классу обратимых механических систем (1). Это свойство широко используется, например, в исследованиях по задаче трех тел [2].

Запишем систему (4) в виде (1). Тогда $l = n = 2, u = \{x, \dot{y}\}^T, v = \{y, \dot{x}\}^T$ (T – транспонирование), а неподвижное множество такое: $M_x = \{x, y, \dot{x}, \dot{y} : y = 0, \dot{x} = 0\}$.

Система (4) допускает симметричный первый интеграл (Якоби)

$$H = h, \qquad H \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y). \tag{5}$$

Интересен вопрос о возможности существовании еще одного интеграла – вопрос, связанный с интегрируемостью (неинтегрируемостью) системы.

Пусть система (4) допускает СПД. Тогда, вследствие наличия симметричного интеграла (5), имеется семейство $\Sigma(h)$ СПД, параметризованное постоянной h интеграла Якоби. На $\Sigma(h)$ период $T(h)$ СПД зависит от постоянной h. В общем случае $\Sigma(h)$ содержит как обыкновенные точки, где $dT \neq 0$, так и критические точки ($dT(h) = 0$) [8]. В нелинейной системе критические точки являются исключительными.

Вычислим характеристические показатели (ХП) для СПД периода 2π. При этом имеем в виду, что ХП для 2π-периодической линейной системы определяются с точностью до $\pm\nu i, \quad \nu \in N$.

Определение. Ситуация для СПД системы (3) называется типичной, если СПД содержит одну жорданову клетку из нулевых ХП плюс пару $\pm\varkappa$ ненулевых ХП.

Отметим возможные вырождения, связанные с ХП. По теореме Пуанкаре [9] периодическому движению системы (4) обязательно отвечает один нулевой ХП. Для СПД обратимой системы таких показателей – два. В обыкновенной точке семейства П имеем жорданову клетку. В критической точке происходит распадение жордановой клетки и получим первое из возможных вырождений. Второе вырождение связано с переходом числа $\varkappa$ через нулевое значение.

Таким образом, в типичной ситуации для СПД нет ни одного из возможных вырождений.

Пример 1. В случае $\Omega(x, y) = -3(x^2 + y^2)/2$ имеется семейство СПД: $x = a\cos 3t,\ y = a\sin 3t,\ a = \text{const}$. Однако период T не зависит от h; все точки семейства – критические. Так всегда происходит в линейной системе.

Ниже различаем СПД и точки равновесия обратимой механической системы.

Теорема 9. *Если обратимая консервативная механическая система с двумя степенями свободы (4) допускает семейство СПД по параметру h, содержащее обыкновенную точку, то эта система имеет единственный гладкий первый интеграл – интеграл Якоби.*

Замечание. Таким образом, существование только семейства СПД $\Sigma(h)$ гарантирует единственность известного первого интеграла – интеграла Якоби.

Доказательство. Теорема 9 является следствием теоремы 8, примененной к (4).

Дадим независимое доказательство теоремы. На СПД системы (4) имеем:

$$x = x^*(t), \quad y = y^*(t); \quad x^*(-t) = x^*(t), \quad y^*(-t) = -y^*(t).$$

Пусть период СПД равен 2π. Линеаризуем интеграл (5) на СПД. Получим линейный 2π–периодический по t интеграл

$$F \equiv \dot{x}^*(t)\delta\dot{x} + \dot{y}^*(t)\delta\dot{y} - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_* \delta x - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_* \delta y$$

($\delta x, \delta y, \delta\dot{x}, \delta\dot{y}$ – вариации, а вычисление на СПД помечено звездочкой) системы уравнений в вариациях для СПД. В обыкновенной точке имеем нулевую жорданову клетку, отвечающую интегралу H. Клетка дает второй линейный интеграл

$$tF + G; \qquad G(\delta x, -\delta y, -\delta\dot{x}, \delta\dot{y}, -t) = G(\delta x, \delta y, \delta\dot{x}, \delta\dot{y}, t)$$

этой системы.

Предположим, что система (4) допускает дополнительный (симметричный или асимметричный) первый интеграл $W = \mathrm{const}$. Линеаризуем интеграл W на СПД. Тогда приходим к линейному первому интегралу f (с 2π-периодическими по t коэффициентами) для системы уравнений в вариациях. В случае симметричного интеграла W получим или жорданову клетку из нулевых ХП, или два простых нулевых ХП. В случае асимметричного интеграла W асимметричный интеграл f также приводит к двум нулевым ХП. В любом случае имеем $\varkappa = 0$, что невозможно для обыкновенной точки.

Отсутствие глобального интеграла W в области, содержащей обыкновенную точку, доказывает несуществование W. $\square$

Замечание. В случае существования асимметричного интеграла W интеграл f будет дополнительным к интегралу F. В случае симметричного интеграла W интегралы f и F не различаются на данном семействе СПД.

Система (4), вместе с СПД в типичной ситуации, допускает только однопараметрическое семейство СПД $\Sigma(h)$. Другое подобное семейство, казалось бы, инициированное симметричным интегралом W, просто не существует. Значит, по крайней мере, в части фазового пространства, содержащей $\Sigma(h)$, дополнительный первый интеграл W отсутствует.

Интересно связать тип вырождения для СПД с возможностью наличия дополнительного интеграла. При первом типе вырождения точка в фазовом пространстве задачи фиксирована. Само вырождение связано с попаданием на критическую точку при перемещении вдоль $\Pi(h)$ в фазовом пространстве. Но критические точки – исключение; из существования таких точек в нелинейной системе еще не следует наличие дополнительного глобального первого интеграла.

Что касается второго типа вырождения, то переход $\varkappa$ через нулевое значение происходит, как правило, при изменении параметров системы. В точке $\varkappa = 0$ возможно появление дополнительного первого интеграла.

Пример 2. Система в примере 1 не зависит от параметра. Здесь реализуются оба типа вырождения. Дополнительный первый (симметричный) интеграл $\dot{y}x - \dot{x}y + x^2 + y^2 = \mathrm{const}$ существует.

Приведем простые достаточные условия несуществования дополнительного первого интеграла. Частная производная $\partial\Omega/\partial y$ – функция, нечетная по y. Следовательно, уравнение

$$\frac{\partial\Omega(x,0)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

дает все положения равновесия обратимой механической системы (4). В случае, когда уравнение (6) не имеет корней, все траектории являются симметричными и пересекают неподвижное множество M.

Пусть уравнение (6) имеет корни. Тогда, как и в задаче трех тел, соответствующие положения равновесия назовем коллинеарными точками либрации L. Вычислим в L вторые частные производные от функции Ω:

$$c_{xx} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}, \quad c_{yy} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}. \tag{7}$$

Если выполняется неравенство

$$c_{xx} c_{yy} < 0, \tag{8}$$

то характеристическое уравнение (ХУ) имеет одну пару чисто мнимых корней (другие два корня будут действительными). Если же знак неравенства в (8) меняется на противоположный, но

$$\Delta \equiv (c_{xx} + c_{yy} + 4)^2 - 4 c_{xx} c_{yy} > 0,$$

то имеем две пары чисто мнимых корней. Наконец, когда $\Delta < 0$, мнимые корни отсутствуют.

Чисто мнимые корни инициируют ляпуновское семейство (семейство СПД [13]). Это локальное семейство всегда содержит [14] пару нулевых ХП в жордановой клетке (туда перешла пара чисто мнимых корней ХУ). Другая пара ХП с точностью до малого параметра – амплитуды колебаний на СПД, совпадает с оставшейся парой корней ХУ. Поэтому выписанные условия гарантируют неинтегрируемость системы (4).

Отметим, что здесь неинтегрируемость связана не столько с чисто мнимыми корнями ХУ, сколько с ляпуновским семейством (семейство СПД), которое эти корни порождает.

Пример 3. В случае $\Omega(x, y) = -3(x^2 + y^2)/2$ ляпуновские семейства отсутствуют.

В заключении раздела укажем, что теорема 9 охватывает также вывод об неинтегрируемости, основанный на орбитах Пуанкаре в задаче трех тел [9].

7. Ограниченные на (x, y) орбиты. СПД в возмущенной системе. Доказательством несуществования дополнительного интеграла не исчерпывается интерес к важному классу механических систем (4). Ниже предложен подход к описанию всех ограниченных на (x, y) движений (или орбит). Выводы, основанные здесь на свойстве обратимости, в определенной мере дополняют метод Хилла [15]. В конце раздела получены также выводы по СПД в возмущенной задаче.

Введем новую переменную

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dx}{dy} \tag{9}$$

– угол между касательной к траектории и осью y (рис. 2).

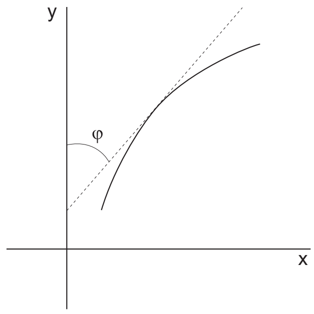

Рис. 2. Введение угла, сохраняющего свойство обратимости системы.

Подобную переменную – угол с осью x впервые использовал Биркгоф [16]. Введенный по формуле (9) угол [17] позволяет сохранить свойство обратимости системы (4) при переходе к системе третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, y, \varphi) \equiv [2(\Omega + h)]^{1/2} \sin\varphi, \\ \dot{y} &= Y(x, y, \varphi) \equiv [2(\Omega + h)]^{1/2} \cos\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Phi(x, y, \varphi) \equiv 2 + \frac{\Omega_x \cos\varphi - \Omega_y \sin\varphi}{[2(\Omega + h)]^{1/2}}. \end{aligned} \tag{10}$$

В самом деле, видно, что система (10) инвариантна относительно замены $(t, x, y, \varphi) \to (-t, x, -y, -\varphi)$.

Сделаем ряд выводов по ограниченным на плоскости (x, y) орбитам.

Пусть на решении системы (3.2) в момент времени $t = 0$ угол $\varphi(0) = 0$, а при $t > 0$ все время имеем $\sin\varphi \neq 0$, скажем, $\sin\varphi > 0$. Тогда в ограниченной по x области из первого уравнения системы (3.2) получим: $|x| < \text{const}, \dot{x} > 0, x \to x_0(\text{const})$. Правая часть этого уравнения при $t \to \infty$ необходимо стремится к нулю. Если $\Omega + h \to 0$, то из интеграла Якоби получим асимптотическое к положению равновесия решение. Если же $\sin\varphi \to 0$, то из уравнения для y имеем $\cos\varphi \to \pm 1$, поэтому для ограниченных по y решений также необходимо $\Omega + h \to 0$.

Вывод 1. *Решения, на которых $\sin\varphi$ сохраняет знак, являются асимптотическими к положениям относительного равновесия.*

Теперь обратимся к решениям, на которых угол φ меняется от 0 до π.

Пусть G^+ – множество точек A^+ верхней полуплоскости, на котором начинаются эти решения, причем $\varphi(0) = 0$.

В нижней полуплоскости находится такое же множество G^-, состоящее из точек A^-. Если в точке A^- начинается решение, на котором угол φ не достигает значения π, то, согласно выводу 1, точка A^- лежит на асимптотическом к относительному равновесию решении. Мера таких точек равна 0. В случае, когда на решении, исходящему из A^-, угол φ достигает значения π; тогда на решении, проходящем через точку A^+, угол φ меняется на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 3).

Вывод 2. *Почти для всех точек множества $G^{\pm}$, где начинаются ограниченные решения, угол φ пробегает все значения из $(-\infty, +\infty)$.*

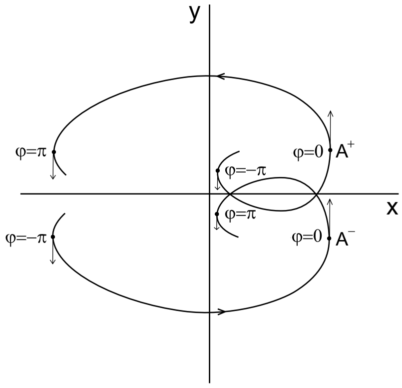

Рис. 3. Монотонное изменение угла φ на ограниченных траекториях.

Обозначим через $G(0)$ множество точек, принадлежащих при $\varphi(0) = 0$ ограниченным решениям. Используем систему (10) и построим отображение $F : 0 \to 2\pi$, в котором угол φ изменяется на 2π, а $G(0)$ переходит в множество $G(2\pi)$. Из рассуждений, использованных при получении вывода 2, следует: множества совпадают до точек нулевой меры. Система (10) сохраняет меру. Поэтому почти все точки $G(0)$ устойчивы по Пуассону.

Обозначим

$$\Phi^*(x, y) \equiv \Phi(x, y, 0) = \Phi(x, y, 2\pi).$$

Функция $\Phi^*(x, y)$ меняет знак на множестве $G(0)$. С другой стороны, $\Phi^*(x, y)$ задает знак производной $d\varphi/dt$. Наконец, в результате отображения $\varphi : 0 \to \pi$ множества $G(0)$ получим равное ему по мере множество.

Вывод 3. *Множества $G_+ = \{x, y : (x, y) \in G(0), \Phi(x, y) > 0\}$ и $\{x, y : (x, y) \in G(2\pi), \Phi(x, y) > 0\}$ совпадают до точек нулевой меры. Меры множеств G_+ и $\{x, y : (x, y) \in G(0), \Phi(x, y) < 0\}$ равны.*

Выводы обосновывают изучение ограниченных орбит на основе системы (10).

Перейдем к частному классу ограниченных орбит – СПД. Идея метода построения всех СПД-орбит системы (10) видна из рис. 4.

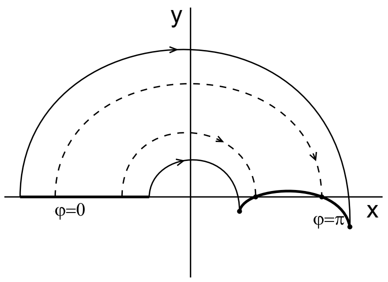

Рис. 4. Идея метода построения всех СПД-орбит.

Используем систему (10). В момент $t = 0$ выпускаем траектории из точек оси x, причем $\varphi(0) = 0$. При $\varphi = \pi$ получим кривую, точки пересечения которой с осью x принадлежат СПД в момент $\varphi = \pi$. Траектории СПД (две) на рис. 4 изображены шриховыми линиями. Отметим, что несмотря на численное построение, факт существования СПД устанавливается точно. Метод реализован, эффективность продемонстрирована на задаче Хилла [17], задаче трех тел (см. раздел 4), фотогравитационной задаче трех тел [18]. Другой метод применялся ранее [19, 20] в задаче трех тел.

На решениях системы (10) с монотонно изменяющимся углом φ используем новую независимую переменную – угол φ. Тогда вместо системы (10) третьего порядка получим систему второго порядка

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{X(x,y,\varphi)}{\Phi(x,y,\varphi)}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{Y(x,y,\varphi)}{\Phi(x,y,\varphi)}, \tag{11}$$

которая позволяет применить метод [21] построения и исследования на устойчивость всех СПД. С другой стороны, вывод 2 позволяет использовать для построения периодических движений и исследования их устойчивости отображение F плоскости (x, y) на себя. При этом изучаются произвольные периодические движения, включая СПД.

Таким образом, для построения и исследования на устойчивость всех (произвольных) периодических движений системы (4) используется система (10), строится отображение $\varphi : 0 \to 2\pi$, находятся его неподвижные точки и эти точки исследуются на устойчивость. В частном случае, для изучения СПД в (10) применяется метод построения всех СПД. Наконец, для движений, на которых угол φ меняется монотонно, используем систему (11) и ранее предложенный метод [21].

Конструктивное решение задачи построения СПД в системе (10) позволяет установить существование СПД в возмущенной задаче. Предполагаем, что возмущения сохраняют свойство обратимости системы. При этом систему (4) назовем порождающей системой.

Ниже примем, что для СПД пара ХП $(\pm\varkappa)$ отлична от нуля.

Справедливы утверждения.

Утверждение 1. *Если возмущения не зависят от времени, то почти все СПД порождающей системы, несколько деформируясь, сохраняются в возмущенной системе. Исключение составляют СПД только в критических точках семейства.*

Замечание. Вывод не зависит от того, остается или нет система консервативной. Важно, чтобы система сохраняла свойство обратимости.

Утверждение 2. *Если на порождающую систему действуют периодические возмущения периода 2π, то из каждой обыкновенной точки семейства, где $T = 2\pi/m, m \in N$, рождаются изолированные 2π-периодические СПД.*

Доказательство утверждений базируется на теореме 6.

8. Задача трех тел. Для ограниченной плоской круговой задачи трех тел (см. рис. 5) функция $\Omega(x, y)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \Omega(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + (1-\mu)/r_1 + \mu/r_2, \\ r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2, \end{gathered} \tag{12}$$

где μ – массовый параметр, r_1, r_2 – расстояние от основных тел S, J до частицы P.

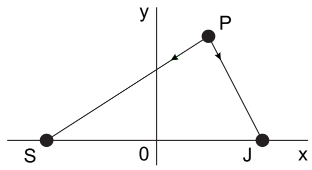

Рис. 5. Задача трех тел.

Постоянные решения системы (4), (12) находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} \equiv x(1-a) + \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x} \equiv y(1-a) = 0,$$
$$a = \frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}. \tag{13}$$

В случае, когда $y \neq 0$, необходимым условием совместности системы (13) будет равенство $a = 1$. При выполнении его из первого равенства находим единственное решение, в котором $r_1 = r_2$ (треугольные точки либрации). Для остальных решений имеем $y = 0$, и они – положения равновесия обратимой механической системы (4), (12).

Коллинеарные точки либрации открыты Л. Эйлером [1]. Подробный анализ этих точек имеется (см., например, [2]). Для них при $\mu > 0$ характеристическое уравнение всегда имеет два действительных корня противоположного знака и два чисто мнимых корня. Неинтегруемость задачи при всех $\mu \in (0, 1)$ выводится из существования ляпуновского семейства, примыкающего к коллинеарной точке либрации. Это семейство СПД в окрестности точки либрации является единственным, поэтому выполняются все условия теоремы 9.

Теорема 10. *В задаче трех тел нет дополнительного гладкого первого интеграла при любых* $\mu \in (0, 1/2)\bigcup(1/2, 1)$.

Замечание. 1. Брунс [22] доказал отсутствие дополнительного алгебраического интеграла в общей (неограниченной) задаче трех тел. Для ограниченной задачи трех тел такой результат позднее получил Зигель [23]. Несуществование аналитического интеграла в неограниченной задаче трех тел в случае, когда массы двух точек малы, доказал Пуанкаре [9]. Для ограниченной задачи подобный результат получен только в 1960 г. [24].

2. В случае $\mu = 1/2$ задача (12) допускает второе неподвижное множество $M_y = \{x, y, \dot{x}, \dot{y} : x = 0, \dot{y} = 0\}$.

Критические точки семейства СПД – исключение. Это наглядно показано на рис. 6, где в случае $\mu = 1/2$ дана зависимость $T(h)$ для семейства СПД (СПД-1), симметричного относительно неподвижного множества M_x и примыкающего к внутренней точке либрации (L_2) (крайняя левая кривая до точки неединственности).

Здесь $dT \neq 0$. При дальнейшей эволюции СПД-1 также почти везде имеем $dT \neq 0$.

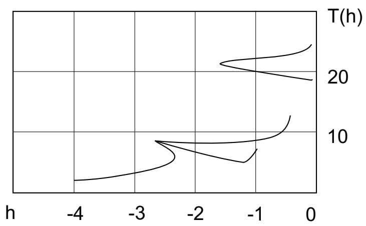

Рис. 6. Семейства СПД-орбит, примыкающие к внутренней коллинеарной точке либрации.

Как и выше в разделе 7, полагаем, что орбита содержит пару ненулевых ХП ($\pm\varkappa$). Укажем, что $\varkappa = 0$ только в отдельных точках семейства СПД. На основе утверждений 1, 2 заключаем:

Утверждение 3. *В задаче, близкой к задаче трех тел, сохраняются почти все симметричные периодические орбиты. Исключение составляют орбиты в критических точках семейства порождающей задачи.*

Замечание. Результат интересно использовать в задаче N тел, выбирая в качестве порождающих орбит орбиты задачи трех тел.

Утверждение 4. *При переходе от круговой к слабоэллиптической задаче трех тел из каждой обыкновенной точки семейства* σ *с* $T = 2\pi/m$, $(m \in \in N)$, *рождаются изолированные* 2π*-периодические орбиты.*

Таким образом, возмущение в виде малого эксцентриситета орбиты основных тел, как правило, приводит к рождению изолированных периодических орбит.

9. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой. Движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой описывается уравнениями Эйлера–Пуассона

$$
\begin{array}{ll}
A\dot{p} = (B - C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\
B\dot{q} = (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\
C\dot{r} = (A - B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p.
\end{array}
\tag{14}
$$

Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела, P – вес тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести, $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

Система (14) допускает классические интегралы

$$
\begin{aligned}
&W_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = 2h(\text{const}), \\
&W_2 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \sigma(\text{const}), \\
&W_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Можно убедиться, что система (14) не меняет свой вид при замене $R : (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, t) \to (-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, -t)$. Значит, система (14) принадлежит [4] к классу обратимых механических систем (1). Здесь $l = n = 3$, а неподвижное множество системы (14) такое:

$$
M = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r : p = 0, q = 0, r = 0\}.
$$

Следовательно, на симметричных движениях в какой-то момент времени угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ обращается в нуль. Если обращение в нуль угловой скорости происходит и второй раз, то получим СПД. Множеству M принадлежат равновесия обратимой механической системы (14). В случае $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$ для этих решений получим

$$\frac{\gamma_1}{x_0} = \frac{\gamma_2}{y_0} = \frac{\gamma_3}{z_0} = \chi, \quad \chi = \pm 1/l \tag{16}$$

(l – расстояние от неподвижной точки до центра тяжести), откуда следует существование только двух равновесий – верхнего и нижнего положений равновесия. На сфере Пуассона эти точки находятся на противоположных концах диаметра.

Обратимся к интегралам (15). Интегралы энергии и геометрический симметричны относительно M, т.е.

$$W_{1,3}(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = W_{1,3}(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

в то время, как интеграл кинетического момента оказывается асимметричным

$$W_2(-p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -W_2(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Поэтому постоянная $\sigma = 0$ (теорема 2), что, впрочем, хорошо видно из вида интеграла кинетического момента.

10. Случай расположения центра тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции ($\boldsymbol{y_0 = 0}$). В данном случае система (14) инвариантна также относительно замены

$$R_y : (p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, t) \to (p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3, -t),$$

т.е. допускает второе неподвижное множество

$$M_y = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : q = 0, \gamma_2 = 0\}.$$

В этом случае все классические интегралы становятся симметричными относительно неподвижного множества M_y, т.е.

$$W_j(p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) = W_j(p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Случаю $y_0 = 0$ принадлежат [25] почти все известные точные решения задачи Эйлера, кроме перманентных вращений. К симметричным относительно множества M_y относятся, например, маятниковые движения Млодзеевского [26], регулярные прецессии Гриоли [27] и др. Оказывается [27, 28], решения Гриоли принадлежат к двухпараметрическому семейству СПД.

В случае $y_0 = 0$ уравнения Эйлера–Пуассона (14) запишем в виде обратимой системы (1) с $l = 4, n = 2$ и векторами $u = (p, q, \gamma_1, \gamma_3)^T$, $v = (q, \gamma_2)^T$.

Регулярные прецессии Гриоли. Гриоли [29] обнаружил регулярные прецессии у тела, закрепленного в такой точке, что выполнены условия

$$x_0^2(B-C)=z_0^2(A-B), \quad A>B>C \quad (y_0=0). \tag{17}$$

Прецессии Гриоли имеют две замечательные особенности: *а*) они возникают при движении динамически несимметричного тела, подчиненного только условиям (17); *б*) тело прецессирует вокруг не вертикальной, а наклонной к вертикали под некоторым углом β оси.

Из явных формул для решений Гриоли [30] видно, что при условиях закрепления (17) имеем механически единственное возможное движение в виде прецессии. Эти формулы можно записать в таком виде [27]

$$\begin{aligned}
&p=\frac{n}{l}(x_0-z_0\cos\tau), \quad q=n\sin\tau, \quad r=\frac{n}{l}(z_0+x_0\cos\tau);\\
&\gamma_1=-\frac{n^2}{Pl^2}(Cz_0\cos\tau+(B-C)x_0\sin^2\tau),\\
&\gamma_2=\frac{n^2}{Pl^3}((Ax_0^2+Cz_0^2)-(A-C)x_0z_0\cos\tau)\sin\tau,\\
&\gamma_3=\frac{n^2}{Pl^2}(Ax_0\cos\tau+(A-B)z_0\sin^2\tau), \quad \tau=nt-\varepsilon+\pi/2,\\
&\varepsilon=nt_0, \ n^2=P^2l^2/((A-B)(B-C)+(A-B+C)^2).
\end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда следует, что p, r, γ_1, γ_3 задаются четными функциями независимой переменной τ, а q, γ_2 – нечетными функциями τ. Поэтому решение Гриоли симметрично относительно множества M_y, т.е. представляет собой СПД [27, 28, 31].

Маятниковые движения Млодзеевского [26]. Эти движения реализуются в задаче при $y_0=0$ без наложения каких-либо дополнительных ограничений на моменты инерции и описываются обратимой механической системой третьего порядка

$$B\dot{q}=P(x_0\gamma_3-z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1=-q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3=q\gamma_1 \tag{19}$$

($p=r=0, \gamma_2=0$), допускающей интеграл энергии и геометрический интеграл ($\gamma_1^2+\gamma_3^2=1$). С помощью подстановки $\gamma_1=\sin\theta$, $\gamma_3=\cos\theta$ сведем (19) к уравнению математического маятника. Поэтому движения Млодзеевского содержат СПД как в виде колебаний, так и вращений. Семейство СПД параметризовано естественным параметром – постоянной интеграла энергии h.

11. Продолжение СПД в фазовом и параметрическом пространствах. **Утверждение 5**. *При фиксированных произвольных параметрах* A, B, C, x_0, z_0 *и* $y_0=0$ *в типичной ситуации СПД системы (4) образуют двухпараметрическое от* h *и* σ *семейство, содержащее подсемейство фиксированного периода от параметра* h*, и это семейство продолжается (при* $y_0=0$*) по параметрам задачи.*

Это утверждение следует из теорем 5, 6, наличия трех симметричных первых интегралов и учета фиксированной постоянной в геометрическом интеграле. Далее, два простых нулевых ХП связаны с интегралом кинетического момента и геометрическим интегралом; интегралы дают параметр σ. Другой параметр h доставляется интегралом энергии и связанной с ним парой нулевых ХП с жордановой клеткой. Утверждение 5 анонсировалось [31–33].

Укажем, что для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида энерции ($y_0 = 0$) в типичной ситуации СПД системы (14) содержит два простых нулевых ХП, одну пару нулевых ХП, образующих жорданову клетку, а оставшиеся два ХП вычисляются построением только одного решения задачи Коши [31]. В типичной ситуации два ХП не равны нулю.

Отметим, что ХП для прецессий Гриоли и маятниковых движений Млодзеевского и других решений вычислялись [27, 28, 31–41]; реализуется типичный случай.

Из утверждения 5 следует, что прецессии Гриоли: *а*) принадлежит двухпараметрическому семейству СПД от h и σ; *б*) это семейство продолжается на тот случай, когда условия (17) выполняются приближенно. Иными словами, в несимметричном тяжелом теле с неподвижной точкой, в котором условие (17) выполняются точно или приближенно, всегда существует двухпраметрическое семейство псевдопрецессий Гриоли, включающее прецессии Гриоли.

Такой же вывод справедлив для однопараметрического семейства Млодзеевского, которое принадлежит к двухпараметрическому семейству СПД, содержащему не только плоские, но и близкие к плоским движения.

12. Несуществование четвертого первого интеграла (случай $y_0 = 0$).

Утверждение 6. *Задача (14) при $y_0 = 0, x \neq 0, z \neq 0$ не имеет дополнительный к классическим гладкий первый интеграл почти везде в параметрическом пространстве (A, B, C, x_0, z_0). Ислючением может быть только множество параметров нулевой меры, где ХП $\pm\varkappa$ для СПД проходят через нуль.*

Доказательство. При $y_0 = 0$ тело совершает маятниковые движения, которые включают самые общие СПД, симметричные относительно множества M_y. Эти СПД состоят из колебаний и вращений, причем колебания являются симметричными также относительно множества M. В формулировке теоремы 8 неявно предполагается существование в системе только одного неподвижного множества. При этом известным первым интегралам ставится в соответствие вполне определенное семейство СПД. Здесь такое семейство содержит колебания и вращения, и симметричность колебаний относительно двух неподвижных множеств не мешает использовать выводы теоремы 8. Поэтому утверждение 6 непосредственным образом следует из теоремы 8, примененной к ситуации $y_0 = 0$. $\square$

Замечания. 1. В случае $x = 0$ или $z = 0$ имеем два различных семейства маятниковых вращений – результат расщепления одного семейства СПД-колебаний, симметричных одновременно относительно трех неподвижных множеств.

2. Полученный вывод не зависит от того, какое СПД берется для доказательства утверждения.

3. В типичной ситуации маятниковые колебания содержат, как и в случае $y_0 = 0$, два простых нулевых ХП плюс два нулевых ХП, образующих жорданову клетку, и два ($\pm\varkappa$) ненулевых ХП противоположного знака [8, 31].

4. Для случаев, близких к интегрируемым, утверждение известно [42] (см. также [10, 43–46]).

5. Утверждение 6 получено в работах [8, 12, 33].

Таким образом, почти везде в пространстве параметров x_0, z_0, A, B, C дополнительный гладкий интеграл отсутствует. Исключение составляет множество P^{**}, где $\varkappa$ обращается в нуль и выполняются необходимые условия существования дополнительного интеграла. Множество P^{**} можно вычислить численно.

Перейдем к уравнениям в вариациях для СПД Млодзеевского, на которых примем

$$p = 0, \quad q = q^*(t), \quad r = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1^*(t), \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^*(t). \tag{20}$$

Введем вариации

$$\delta p = p, \quad \delta q = q - q^*(t), \quad \delta r = r, \delta\gamma_1 = \gamma_1 - \gamma_1^*(t), \quad \delta\gamma_2 = \gamma_2, \quad \delta\gamma_3 = \gamma_3 - \gamma_3^*(t).$$

Тогда система уравнений в вариациях разбивается на две подсистемы:

$$B\dot{\delta} q = P(x_0\delta\gamma_3 - z_0\delta\gamma_1), \ \dot{\delta}\gamma_1 = -\gamma_3^*\delta q - q^*\delta\gamma_3, \ \dot{\delta}\gamma_3 = \gamma_1^*\delta q + q^*\delta\gamma_1; \tag{21}$$

$$\begin{gathered} A\dot{\delta} p = (B - C)q^*\delta r + Pz_0\delta\gamma_2, \quad C\dot{\delta} r = (A - B)q^*\delta p - Px_0\delta\gamma_2, \\ \dot{\delta}\gamma_2 = \gamma_3^*\delta p - \gamma_1^*\delta r. \end{gathered} \tag{22}$$

Система (21) представляет собой систему уравнений в вариациях для маятниковых движений, отвечающих множеству M_y. Она наследует интегралы, получаемые из интегралов энергии и геометрического. Поэтому, во-первых, все ХП равны нулю, во-вторых, имеется одна жорданова клетка.

Обратимся к системе (22). От интеграла кинетического момента система (22) наследует линейный интеграл

$$Ap^*\delta\gamma_1 + B\gamma_2^*\delta q + Cr^*\gamma_3^*\delta r = \delta\sigma. \tag{23}$$

Но даже не зная этого, можно сразу говорить об одном нулевом ХП, так как имеем обратимую систему третьего порядка с векторами $(\delta q, \delta r)$ и $\delta\gamma_2$. Более того, для нахождения ненулевых ХП достаточно построить только одно решение задачи Коши (см. напр. [27]).

Таким образом, задача вычисления ХП для СПД Млодзеевского свелась к построению одного решения Коши на периоде СПД с известной начальной точкой $\delta q(0) = 0$, $\delta r(0) = 0$, $\delta \gamma_2(0) = 1$. Такой подход использовался в [34, 40, 41].

Замечание 2 связано с тем, что в частном случае, когда центр тяжести лежит на главной оси инерции, задача, помимо M, M_y, допускает другие неподвижные множества. Так при $x_0 = 0, z_0 \neq 0$ имеем неподвижное множество

$$M_x = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : p = 0, \gamma_1 = 0\},$$

а при $x_0 \neq 0, z_0 = 0$ – неподвижное множество

$$M_z = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : r = 0, \gamma_3 = 0\}.$$

В случае, когда центр тяжести лежит на главной оси, имеем $x_0 = 0$ или $z_0 = 0$. При одновременном обращении в нуль x_0, z_0 имеем интегрируемый случай Эйлера. Здесь маятниковых движений в задаче нет.

В случае Лагранжа ($x_0 = 0,\ A = B$) движение тела (20) реализуется, однако второе уравнение системы (22) дает еще один первый интеграл $\delta r = \mathrm{const}$. Поэтому в этом случае все ХП обратимой системы (22) равны нулю.

В случае С. Ковалевской ($x_0 \neq 0, y_0 = 0, z_0 = 0, A = B = 2C$) существует два семейства маятниковых движений. На одном из них имеем

$$p = r = 0, \quad \gamma_2 = 0 \quad (a),$$

на втором –

$$p = q = 0, \quad \gamma_3 = 0 \quad (b).$$

Интеграл Ковалевской

$$(p^2 - q^2 - n\gamma_1)^2 + (2pq - n\gamma_2)^2 = \mathrm{const}, \quad n = Px_0/C \tag{24}$$

на движении (a) совпадает с интегралом энергии, а на движении (b) – с геометрическим интегралом. Поэтому подсчет ХП на маятниковых движениях не приводит к необходимому результату.

Трудность различения первых интегралов по линеаризованной на СПД части отчетливо проявилась в случае С. Ковалевской. В случае принадлежности центра тяжести главной плоскости эллипсоида инерции все классические интегралы становятся симметричными, а на маятниковых движениях Млодзеевского постоянная кинетического момента принимает нулевое значение. С другой стороны, таких проблем нет при изучении общего случая (см. разд. 14), так как в этом случае семейство СПД содержит только один параметр h.

Случай С. Ковалевской стал показательным для применения теоремы 8. То, что здесь не все характеристические показатели на маятниковых вращениях обращаются в нули, связано с наличием в задаче еще одного неподвижного множества $M_z = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : r = 0, \gamma_3 = 0\}$.

Наконец, укажем, что неинтегрируемость задачи в случаях, близких к случаям Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, следует из наличия пары малых ненулевых ХП системы (22).

13. Сведение к обратимой системе 3-го порядка в случае $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$. Задача построения всех СПД. Выполним замену

$$\gamma_1 = \cos\theta\cos\varphi, \quad \gamma_2 = \cos\theta\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \sin\theta. \tag{25}$$

Тогда получим

$$\dot\theta = -p\sin\varphi + q\cos\varphi, \qquad \dot\varphi = -r + (p\cos\varphi + q\sin\varphi)\tan\theta. \tag{26}$$

Укажем, что замена (25) автоматически использует геометрический интеграл, поэтому понижает размерность системы (14) на единицу.

В рассматриваемом случае динамические уравнения Эйлера примут вид

$$A\dot p = (B-C)qr,\ B\dot q = (C-A)rp + Px_0\gamma_3,\ C\dot r = (A-B)pq - Px_0\gamma_2 \tag{27}$$

и вместе с уравнениями (26) составляют систему, инвариантную относительно двух преобразований: 1) $\theta \to -\theta, \varphi \to \varphi, (p,q) \to (p,q), r \to -r$, 2) $\theta \to \theta$, $\varphi \to -\varphi$, $(p,q) \to (p,-q)$, $r \to r$. Система (26), (27) допускает два семейства маятниковых движений:

$$\theta = 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad C\dot r = -Px_0\sin\varphi \quad (\dot\varphi = -r), \tag{28}$$

$$\varphi = 0, \quad p = 0, \quad r = 0, \quad B\dot q = Px_0\sin\theta \quad (\dot\theta = q). \tag{29}$$

Для изучения движений, на которых $\dot\varphi \neq 0$, используем обратимую систему третьего порядка

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{d\varphi} = (B-C)qr/\dot\varphi,\\ &B\frac{dq}{d\varphi} = [(C-A)rp + Px_0\sin\theta]/\dot\varphi,\\ &\frac{d\theta}{d\varphi} = -p\sin\varphi + q\cos\varphi/\dot\varphi. \end{aligned} \tag{30}$$

Система (30) – 2π-периодическая по φ, имеет неподвижное множество $\{p,q,\theta : \theta = 0 \ (\mathrm{mod}\pi)\}$ и нулевое решение – СПД (28). Все другие СПД строятся следующим образом. Выберем начальное значение p^0 для угловой скорости p. Теперь разобьем отрезок $[a,b]$ оси q $(\theta = 0)$ точками $a = q_0^0 < < q_1^0 < \ldots < q_l^0 = b$ и при $\varphi = 0$ выпустим из этих точек решения. Концы построенных решений Γ_j при $\varphi = \pi$ принадлежат некоторой Γ. Предположим, что в некоторых соседних точках Γ_j и Γ_{j+1} для значений θ получим $\theta_j * \theta_{j+1} < 0$. Тогда между точками q_j^0 и q_{j+1}^0 обязательно находится точка A, где начинается СПД. Понятно, что точность определения A зависит от выбранного метода интегрирования и алгоритма деления отрезка $[a,b]$. Но в любом случае сам факт существования точки A обнаруживается точно, а компьютер позволяет построить СПД с нужной точностью.

Далее, меняем точки p^0 и получим семейство СПД от параметра p^0. Это отличает задачу построения СПД для системы третьего порядка от такой же задачи для системы второго порядка [21].

Аналогично, для исследования движений, на которых $\dot{\theta} \neq 0$, можно использовать обратимую периодическую систему третьего порядка, которая содержится в (26), (27). Наконец, для движений, на которых знаки производных $\dot{\varphi}, \dot{\theta}$ меняются, можно пользоваться обратимым отображением в трехмерном пространстве.

14. Общий случай ($x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$). Маятниковые колебания. Неинтегрируемость. СПД Млодзеевского симметричны относительно неподвижного множества M_y, причем на колебаниях угловая скорость обращается в нуль. Значит, колебания симметричны также относительно неподвижного множества M. Симметричность колебаний относительно M позволяет применить теорему 6 к общему случаю $(y_0 \neq 0)$ задачи (14) и получить следующий результат.

Теорема 11. *В задаче (14) с центром тяжести, расположенным близ главной плоскости эллипсоида инерции, всегда существует однопараметрическое от h семейство СПД колебаний, близких к плоским.*

Доказательство. В случае $y_0 \neq 0$ в обратимой механической системе (14) имеем $l = n = 3, m = 2, k = 1$. По теореме 6 в типичной ситуации имеем однопараметрическое семейство СПД (постоянная в геометрическом интеграле фиксирована). □

Определение. Маятниковыми колебаниями тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой называется однопараметрическое от постоянной энергии h семейство симметричных периодических движений, связывающее верхнее и нижнее положения равновесия.

Из теоремы 11 следует, что маятниковые колебания – самые общие СПД задачи; эти движения реализуются как в случае $y_0 = 0$ (колебания Млодзеевского), так и в общем случае. Отметим, эти СПД симметричны относительно множества M.

В задаче (14) $l = n = 3, m = 2, k = 1$. По теореме 5 размерность семейства СПД равна $l - n + k + 1 = 2$. Параметрами этого семейства служат постоянные симметричных интегралов – энергии и геометрического. Учитывая, что постоянная в геометрическом интеграле фиксирована и равна 1, получим однопараметрическое семейство СПД.

Утверждение 7. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой при любом наборе параметров (A, B, C, x_0, y_0, z_0), где $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 0$, допускает маятниковые колебания.

Семейство маятниковых колебаний в типичной ситуации содержит, как и в случае $y_0 = 0$, два простых нулевых ХП плюс два нулевых ХП, образующих жорданову клетку, и два ХП $(\pm\varkappa)$ противоположного знака.

В рассматриваемом общем случае тело имеет только два положения равновесия, на которых выполняются условия (16). Характеристическое уравнение для этих решений содержит два нулевых корня. Остальные корни определяются из биквадратного уравнения

$$\lambda^4 - Pb\chi\lambda^2 + P^2c\chi^2 = 0,$$
$$b = \frac{x_0^2 + y_0^2}{C} + \frac{x_0^2 + z_0^2}{B} + \frac{y_0^2 + z_0^2}{A}, \qquad c = \frac{x_0^2}{BC} + \frac{y_0^2}{AC} + \frac{z_0^2}{AB}. \tag{31}$$

Вычислим $\Delta = b^2 - 4c \equiv (x_0^2 + y_0^2)^2/C^2 +$

$$+\frac{(x_0^2 + z_0^2)^2}{B^2} + \frac{(y_0^2 + z_0^2)^2}{A^2} + 2\frac{x_0^2y_0^2 - z_0^2l^2}{AB} + 2\frac{x_0^2z_0^2 - y_0^2l^2}{AC} + 2\frac{y_0^2z_0^2 - x_0^2l^2}{BC}.$$

Можно показать, что $\Delta > 0$. Отсюда следует, что при $\chi < 0$ (нижнее положение равновесия) уравнение (31) имеет только чисто мнимые корни, при $\chi > 0$ (верхнее положение равновесия) – две пары действительных корней противоположного знака. Нижнее (верхнее) положение – устойчиво (неустойчиво).

Вывод об устойчивости нижнего положения равновесия нетрудно сделать, используя в его окрестности знакоопределенную связку интегралов. Обозначим отклонения величин от их значений в положениях равновесия через Δ и разложим правые части интегралов в окрестности равновесия. Получим

$$\Delta W_1 = 2P(x_0\Delta\gamma_1 + y_0\Delta\gamma_2 + z_0\Delta\gamma_3) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$
$$\Delta W_2 = \chi(Ap + Bq + Cr) + Ap\Delta\gamma_1 + Br\Delta\gamma_2 + Cr\Delta\gamma_3,$$
$$\Delta W_3 = 2\chi(x_0\Delta\gamma_1 + y_0\Delta\gamma_2 + z_0\Delta\gamma_3) + \Delta\gamma_1^2 + \Delta\gamma_2^2 + \Delta\gamma_3^2.$$

Отсюда следует, что с помощью интегралов W_2, W_3 в окрестности равновесия порядок системы можно снизить на две единицы и получить систему со знакоопределенным около нижнего положения равновесия интегралом $W^* \equiv \Delta W_1/P - \Delta W_3/\chi$. Отсюда следует устойчивость нижнего положения равновесия и примыкание к нему двух ляпуновских семейств. Движения семейства представляют собой СПД [13]. Поэтому их используем для доказательства отсутствия четвертого интеграла.

Утверждение 8. В случае $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$ задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки не имеет дополнительного гладкого первого интеграла всюду в пространстве параметров $A, B, C,\ x_0, y_0, z_0$, где $A > 0, B > 0, C > 0$.

Замечание. Как и в задаче трех тел, отсутствие дополнительного первого интеграла в общем случае задачи связано с существованием семейства СПД только по параметру h.

Теперь вернемся к вопросу о маятниковых колебаниях. Ляпуновские семейства примыкают к устойчивому равновесию, как и маятниковые колебания. Других СПД такого типа нет. Поэтому ляпуновские семейства содержатся в маятниковых колебаниях.

В задаче имеем два ляпуновских семейства. Значит, маятниковых движений тоже два. Так и должно быть, так как теорема 11 говорит о возможности продолжения СПД при ненулевом параметре, имея в виду, положительный и отрицательный параметры.

Таким образом, допольнительный, к известным классическим первым интегралам, гладкий первый интеграл может быть найден только в случае, когда центр тяжести расположен в главной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки ($y_0 = 0$), или в вырожденном случае тела, когда один из моментов инерции обращается в нуль.

Отметим, что часть результатов раздела 13 анонсирована [12].

15. Близкие задачи. Задача трех тел является эталонной для задач с симметричной силовой функцией $\Omega(x, -y) = \Omega(x, y)$. Здесь, кроме частных случаев задачи трех тел (задача Хилла и др.) и ее обобщений (обобщенная задача трех тел, фотогравитационная задача трех тел с одним или двумя излучающими основными телами), интересны прикладные задачи (пружинный маятник на эллиптической орбите, орбитальная связка тел и др.). Другой класс задач связан с тяжелым твердым телом с одной неподвижной точкой (твердое тело в центральном ньютоновском поле сил, тяжелое твердое тело на абсолютно шероховатой плоскости, гиростаты и др.).

Автор благодарит организаторов конференции “Классические задачи динамики двердого тела” за предоставленную возможность изложить вышеприведенный материал в лекции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06–01–00068), программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ – 6667. 2006.1) и программы Президиума РАН.

1. *Eulero L.* Considerations de matu corporum coelestrium // Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. – 1766. – T. 10. – 544 p.
2. *Себехей В.* Теория орбит. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
3. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны. / Пер. с лат. А.Н. Крылова. – Л.: Изд-во АН СССР, 1934. – 208 с.
4. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем// Прикл. математика и механика. – 1991. – **55**, вып.4. – С. 578–586.
5. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. – М.:Физматлит, 2001. – С. 131-146.
6. *Герасимов И. А., Мушаилов Б. Р.* Методы Пуанкаре и Ляпунова в небесной механике. – М.: Изд–во МГУ, 1993. – 117 с.
7. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N-планетной задаче // Прикл. математика и механика. – 1998. – **62**, вып.1. – С. 56–72.
8. *Тхай В.Н.* Первые интегралы и семейства симметричных периодических движений обратимой механической системы // Там же. – 2006. – **70**, вып. 6. – С. 977–989.
9. *Poincare H.* Sur le probleme des trois corps et les equations de la Dynamique // Acta Math. – 1890. – **13**. – P. 1–270.
10. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: УРСС, 2002. – 414 с.
11. *Bruno A.D., Edneral V.F.* Normal forms and integrability of ODE systems // Proc. of CASC 2005 (V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov Eds.). LNCS 3718. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – P. 65–74.

12. *Тхай В.Н.* Неинтегрируемость и интегрируемость в задачах механики // Докл. РАН. – 2006. – **408**, № 6. – С. 621–624.
13. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 1. – С. 46–58.
14. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: ГТТЛ, 1956. – 492 с.
15. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – 560 с.
16. *Birkhoff G.D.* The resticted problem of three bodies // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1915. – **43**. – P. 1–115.
17. *Ефимов И.Л., Тхай В.Н.* Устойчивость периодических орбит в задаче Хилла // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения / Под ред. В.В. Румянцева. – М: ВЦ РАН, 1999. – С. 45–60.
18. *Титова Н.Н.,Тхай В.Н.* Семейства периодических орбит фотогравитационной задачи трех тел, примыкающие к коллинеарным точкам либрации. Вариант двойной звезды // Там же. – 2001. – Ч. 1. – С. 113–137.
19. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. – Ижевск: Изд. дом "Удмуртский ун-т", 1999. – 588 с.
20. *Schanzle A.F.* Horseshoe-Shaped Orbits in the Jupiter - Sun Restricted Problem // Astron.J. – 1967. – **72**, № 2. – P. 149–157.
21. *Тхай В.Н.* Периодические движения обратимой механической системы второго порядка. Приложение к задаче Ситникова // Прикл. математика и механика. – 2007. – **70**, вып. 5. – С. 813–834.
22. *Bruns H.* Uber die Integrale des Vielkorper-problems // Acta Math. – 1887. – **11**. – P. 25–96.
23. *Siegel C.L.* Uber die algebraischen Integrale des restrigierten Dreikorperproblems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1936. – **39**, N 2. – P. 225–233.
24. *Llibre J., Simo C.* Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem // Math. Ann. – 1960. – **248**, N 2. – P. 153–184.
25. *Горр Г.В., Кудряшова Л.А., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
26. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. – 1894. – **7**, вып.1. – С. 46–48.
27. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 5. – С. 848–857.
28. *Тхай В.Н.* Периодические движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, близкие к регулярным прецессиям Гриоли // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 2000. – Ч. 1. – С. 60–67.
29. *Grioli G.* Esistensa e determinazione della precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante assimetrico // Ann. mat. pura ed appl. – 1947. – Ser. 4. – **26**, Facs. 3–4.– P. 271–281.
30. *Гуляев М.П.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Вестн. МГУ. Сер. Физ.-мат. и естеств. наук. – 1955. – № 3. – С. 15–21.
31. *Тхай В.Н.* О характеристических показателях симметричного периодического движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 3–8.
32. *Тхай В.Н.* Семейства симметричных периодических движений в задаче Эйлера // Докл. РАН. – 2005. – **401**, N 4. – С. 483–485.
33. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы с первыми интегралами // Четвертые поляховские чтения. Избр. тр. – СПб: Изд-во ВВМ, 2006. – С. 197–206.
34. *Тхай В.Н., Швыгин А.Л.* Об устойчивости вращений вокруг горизонтальной оси тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Там же. – Ч. 2. – С. 149–160.
35. *Маркеев А.П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли)// Докл. РАН, 2002. – **387**, № 3. – С. 338–342.

36. *Маркеев А.П.* Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 6. – С. 929–938.
37. *Маркеев А.П.* Об устойчивости прецессий Гриоли // Там же. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 557–572.
38. *Гашененко И.Н., Кучер Е.Ю.* Характеристические показатели периодических решений уравнений Эйлера–Пуассона // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 50–59.
39. *Кучер Е.Ю.* Характеристические показатели периодических решений Стеклова и Чаплыгина // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 33–39.
40. *Швыгин А.Л.* Об устойчивости колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Там же. – 2005. – Вып. 35. – С. 103–108.
41. *Швыгин А.Л.* Об устойчивости колебаний и вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Четвертые поляховские чтения. Избр. тр. – СПб: Изд-во ВВМ, 2006. – С. 207–215.
42. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 230 с.
43. *Козлов В.В.* Несущесвование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. – 1975. – № 1. – С. 105–110.
44. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I.II // Функциональный анализ и его приложения. – 1982. – **16**, вып. 3. – С. 30–41; – 1983. – **17**, вып. 1. – С. 8–23.
45. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. I. II // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. – 1985. – N 6. – С. 73–81; – 1986. – № 1. – С. 39–44.
46. *Довбыш С.А.* Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Там же. – 1990. – N 3. – С. 70–77.

Ин-т проблем управления РАН, Москва, Россия
tkhai@ipu.rssi.ru

Получено 16.11.07