

УДК 51/53(091); 51/53(092)

©2007. Г.К. Михайлов

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
(к 300-летию со дня рождения)

В 2007 г. исполнилось 300 лет со дня рождения одного из величайших математиков и механиков мира Леонарда Эйлера. С его трудами связано в значительной степени становление математического анализа, включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление, формирование общей механики, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, а также создание языка и стиля современной научной литературы. Предлагаемый очерк посвящен жизни и трудам Эйлера с акцентом на его исследования в области механики.

1. Краткая биография Эйлера. Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. (здесь и далее даты даются по новому стилю) в Базеле. Там же он получил начальное образование и окончил университет. На его способности обратил внимание Иоганн Бернулли, он взялся руководить его самостоятельными занятиями. В 1725 г. два старших сына Иоганна Бернулли были приглашены в созданную Петром Великим Петербургскую Академию наук. Вскоре в Петербург был приглашен адъюнктом и Эйлер, накануне своего 20-летия он навсегда покинул родину и в мае 1727 г. прибыл в Петербург.

Эйлер сразу же активно включился в академическую жизнь. В 1730-х годах он выступал в заседаниях чаще всех – в среднем 10 раз в год (при общем числе 30–40 докладов в год). В январе 1731 г. Эйлер стал профессором теоретической и экспериментальной физики, а еще через три года получил кафедру высшей математики. При этом его постоянно привлекали к различным техническим экспертизам, а с 1735 г. он вел большую работу и в Географическом департаменте Академии по подготовке генеральной карты России. В августе 1738 г. Эйлер потерял, в результате воспаления неясной этиологии, правый глаз, что, однако, не снизило его работоспособности.

Осенью 1740 г. скончалась императрица Анна Иоанновна, и обстановка в Петербурге стала нестабильной. Тем временем, взошедший на прусский престол Фридрих II задумал создать в Берлине блестящую Академию наук и уже летом 1740 г. распорядился о приглашении в нее “великого алгебраиста” Леонарда Эйлера. Эйлер покинул Россию летом 1741 г. со званием почетного члена Академии и пенсией. В 1746 г. он был назначен директором математического “класса” Берлинской академии. Как и в Петербурге, Эйлер выступал около 10 раз в год с научными докладами и привлекался к различным техническим экспертизам. Будучи влиятельнейшим в научном плане членом Академии, он не был назначен президентом Академии только вследствие того, что король отдавал предпочтение французским просветителям и ему претила религиозность Эйлера. В итоге, преодолев сильное сопротивление короля, Эйлер уехал из Берлина и после триумфального проезда через Варшаву, Ми-

таву и Ригу вернулся летом 1776 г. в Петербург, где его уже давно ждали.

В течение всех 25 лет своей жизни в Берлине Эйлер постоянно поддерживал связь с Петербургской Академией наук. Число научных статей, опубликованных за эти годы в Берлине и Петербурге, составляет, соответственно, около 130 и 100. В Берлине у Эйлера стажировались и жили прикомандированные к нему из Петербурга русские ученики. Как и раньше, он привлекался к разного рода экспертизам и к разрешению сложных научных и административных вопросов. В 1760 г. Эйлер писал: “Я до сих пор работал для Императорской Академии не как отсутствующий член, но, наверное, так же много, как бы я состоял там налицо”.

В Петербурге Эйлер был принят с большим почетом. Однако осенью 1766 г. у него неожиданно произошла резкая потеря зрения в левом глазу, связанная с развитием катаракты: он не смог уже больше читать и стал писать только мелом на большой грифельной доске. В результате ему пришлось пользоваться в своей работе посторонней помощью. С этой целью был, в частности, специально приглашен из Базеля – по рекомендации Даниила Бернулли – молодой Николай Фус. Тем не менее, за 17 лет второго петербургского периода своей жизни Эйлер провел множество научных исследований. В 1770-х годах его по-прежнему продолжали еще привлекать к различным экспертизам. Так, в 1776 г. Эйлер входил в комиссию по рассмотрению проекта моста через реку Неву, составленного И.П. Кулибиным.

Жизнь в Петербурге проходила, впрочем, не безоблачно. В 1771 г. во время очередного большого городского пожара сгорел и дом Эйлера. Погибла часть его библиотеки и бумаг. В 1773 г. скончалась жена Эйлера (преодолев активное сопротивление детей, Эйлер женился вторично в 1776 г.). В конце 1770-х годов обстановка в Академии осложнилась, и с 1777 г. Эйлер практически перестал посещать заседания Академии. Назначенная в 1783 г. директором Академии княгиня Дашкова проявила к Эйлеру исключительное внимание, но это стало последним проявлением благоволения властей.

18 сентября 1783 г. 76-летний Эйлер, как всегда, занимался математическими исследованиями, беседовал за обедом об открытии седьмой планеты, вечером за чаем шутил с одним из внуков и неожиданно со словами “я умираю” потерял сознание и через несколько часов умер. Петербургская Академия наук оказала Эйлеру достойные почести, в 1786 г. его бюст был установлен на мраморной колонне в зале заседаний Академии против кресла президента. Однако впоследствии могила Эйлера была утеряна. Лишь через полвека ее случайно обнаружили вновь, и в 1837 г. на нее был возложен величественный гранитный камень со скромной латинской надписью “Леонарду Эйлеру Петербургская академия”. По случаю 250-летия со дня рождения было проведено перезахоронение Эйлера в некрополь Александро-Невской лавры.

Эйлер имел 13 детей, из которых пятеро – три сына и две дочери – достигли зрелого возраста. Старший его сын Иоганн-Альбрехт стал академиком, второй сын – лейб-медиком, а младший, артиллерист, дослужился до чина генерал-лейтенанта. Иоганн-Альбрехт Эйлер был с 1769 г. конференц-

секретарем Петербургской Академии наук. После него непременно секретарем Академии стал его зять Николай Фус, а затем этот пост занял правнук Эйлера Павел Фус. Таким образом, Академия находилась под присмотром семьи Эйлеров на протяжении почти целого века (до 1855 г.).

Большинство потомков Эйлера остались в России, среди них были академики, генералы и адмиралы. В 1846 г. внук Эйлера генерал А.Х. Эйлер получил потомственное Российское дворянство (с гербом). И сегодня существуют еще прямые потомки Леонарда Эйлера по мужской линии, живущие как в России, так и в Швейцарии (эмигрировали туда после 1917 г.).

2. Начала механики и математический анализ. Наиболее значительны заслуги Эйлера в развитии математического анализа и рациональной механики. Работы Эйлера по механике составляют примерно одну треть всех его трудов, причем механика была и первым серьезным увлечением Эйлера.

Основные исходные понятия и законы механики были подытожены и сформулированы в “Началах” Ньютона (1687). Однако здесь не доставало еще многих существенных элементов для построения механики системы, твердого тела и сплошной среды. Существенным было и то, что “Начала” были изложены с помощью геометрического метода древних, не открывавшего прямого пути для дальнейшего анализа.

Молодой Эйлер направил поначалу свои усилия на упорядочение динамики точки и последовательное переложение ее на язык математического анализа. Это было исполнено им в двухтомной “Механике” (1736). Ни в математике, ни, тем более, в механике тогда еще не существовало общей системы. Требовалось поднять общие разделы высшей математики и механики от состояния совокупности отдельных решенных задач и искусных приемов до уровня систематически построенной науки. Решению этой задачи и было посвящено, главным образом, все творчество Эйлера. Определенным итогом этого явился, в частности, подготовленный Эйлером 6-томный курс математического анализа (объемом около 3000 страниц): двухтомное “Введение в анализ бесконечно малых” (1748), “Наставления по дифференциальному исчислению, с его применением к анализу конечных и к учению о рядах” (1755) и трехтомные “Наставления по интегральному исчислению” (1768–1770). Этот блестящий курс не имеет аналогов среди сочинений XVIII века. Многие из изложенного здесь принадлежат самому Эйлеру и вошло в золотой фонд достижений математического анализа. Следует упомянуть и его трактат по вариационному исчислению (1744), а также два тома “Введения в арифметику” (1738–1740) для Петербургской академической гимназии и выдержавшее около 30 изданий на шести европейских языках двухтомное “Полное руководство по алгебре” (1768–1769), включающее теорию алгебраических уравнений и диофантов анализ.

Среди конкретных результатов, принадлежащих Эйлеру в математическом анализе, для развития механики особую роль сыграли развитые им методы решения дифференциальных уравнений, в том числе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Эйлером предложены также мето-

ды приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Он заложил общие подходы в вариационном исчислении и указал дифференциальное уравнение (названное впоследствии его именем), определяющее условия экстремума функционала. Эйлер начал исследование ряда важных специальных функций, внес фундаментальный вклад в развитие теории аналитических функций и теории чисел. Ему принадлежит широкое введение многих общепринятых в наши дни математических обозначений (π , e , i , обратные тригонометрические функции и др.). «Математическая энциклопедия» (1985) упоминает около 20 понятий, носящих имя Эйлера (критерии, методы, многочлены, подстановки, постоянные, теоремы, уравнения, формулы, функции и т.п.).

Влиянию сочинений Эйлера на последующее развитие науки в значительной мере способствовал свойственный ему новый ясный стиль изложения. Работы его легко читаются и в наши дни. Лаплас писал, что Эйлер «благодаря своим открытиям во всех областях анализа и совершенству, внесенному им в язык, может считаться отцом современного анализа». Остроградский по этому поводу заметил, что «это звание отца вполне заслужено, так как именно Эйлер создал современный анализ и сформировал нынешний язык математики».

Нельзя при этом не отметить, что Эйлеру была свойственна беспредельная вера в результаты вычислений, что приводило его порой, особенно в молодости, к непростительным ошибкам. Это дало, в частности, повод Вольтеру посвятить Эйлеру страничку в своем остром сатирическом памфлете (1753), написанном в связи с одним из скандалов в Берлинской академии.

Вернемся, однако, к «Механике» Эйлера. В ней он впервые систематически изложил динамику свободной материальной точки и точки, находящейся на заданной кривой или поверхности, при ее движении в случае отсутствия сопротивления и в сопротивляющейся среде. Исследование осуществлялось в естественных координатах, связанных с траекторией движения. В первом томе «Механики» Эйлер поместил и общий план построения всей механики, как она представлялась ему в середине 1730-х годов: «Сначала мы будем рассматривать, – писал он, – тела бесконечно малые, т.е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, – тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т.е. силы». Конечно, не весь этот план Эйлеру удалось реализовать. Однако именно Эйлеру мы в большей степени, чем кому-либо другому, обязаны уяснением основ рациональной механики.

Прежде чем говорить об отдельных результатах Эйлера в механике, сде-

лаем одно общее замечание о месте его работ в ряду трудов его современников. Среди близких Эйлеру по возрасту ученых-механиков первого ранга надо назвать Даниила Бернулли, Клеро и Даламбера. Первое место в этой плеяде, безусловно, занимал Даламбер, а среди младших современников Эйлера – Лагранж. Но Лагранж и его “Аналитическая механика” олицетворяют собой уже следующий этап в математизации механики. С Даламбером у Эйлера сложились сложные отношения. Исследования Даламбера пересекались с работами Эйлера практически во всех разделах механики. Особенно тесно переплетались они в динамике твердого тела и в подходах к построению гидродинамики. Даламбер был, бесспорно, гениальнейшим соперником Эйлера. Ему принадлежали выдающиеся идеи, часто опережавшие исследования Эйлера, но стиль Даламбера был тяжеловесен, и он не доводил обычно свои результаты до завершённой формы. Эйлера же отличала общность и ясность изложения, в результате чего для конкурирующих работ Эйлера и Даламбера будущее осталось за работами Эйлера.

3. Механика систем, небесная механика. Механике систем, как таковой, Эйлер не посвятил ни одной специальной работы, хотя, конечно, многократно рассматривал различные задачи динамики механических систем. Свообразный общий метод исследования механических систем был предложен Даламбером в “Трактате по динамике” (1743). Не входя в подробности, отметим, что Эйлер уже в 1730-х годах располагал предпосылками достаточно общего метода, эквивалентного принципу Даламбера, и развивал в последующем свой подход к конкретным задачам вполне самостоятельно. Повидимому, именно поэтому Эйлер не упоминал никогда “принцип Даламбера”.

Развитие механики систем с конечным числом степеней свободы было тесно связано в первой половине XVIII века с теорией колебаний. Не останавливаясь специально на этом важном для общей истории динамики ее разделе, необходимо отметить, что в 1730-х и начале 1740-х годов Эйлер (наряду с Даниилом и Иоганном Бернулли) внес существенный вклад и в его развитие. В частности, уже в 1739 г. Эйлер открыл явление резонанса (публикация 1750 г.).

Отметим участие Эйлера в начальной разработке принципа наименьшего действия, первоначально высказанного в нечеткой, но претенциозной форме в работах Мопертюи. Эйлеру принадлежит строгая формулировка этого принципа для движения материальной точки. Дальнейший прогресс был достигнут после обобщения принципа Лагранжем на механические системы, за которым последовала в XIX в. разработка классических интегральных вариационных принципов, переросших в конечном итоге рамки самой механики.

Активное участие принял Эйлер в дискуссии о колебаниях струны. Классическое волновое уравнение колебаний струны получил в 1746 г. Даламбер. Тогда же он нашел и известное его решение, содержащее две произвольные функции. Однако Даламбер произвольно ограничил класс функций, входящих в решение, некоторыми условиями “непрерывности” и “гладкости”. Эйлер занялся исследованием волнового уравнения сразу же вслед за Даламбером и

подчеркнул, что общее решение задачи о струне должно включать функции значительно более широкого класса – произвольные кусочно-гладкие функции. Дискуссия о характере решений волнового уравнения продолжалась десятилетиями и оказала большое влияние на последующее развитие методов математической физики и, в известной мере, всей теории функций действительного переменного.

С середины 1740-х годов Эйлер посвящает много работ небесной механике. Основное место здесь занимают различные аспекты задачи трех тел – теория движения Луны и теория возмущения планетных движений. Исследования Эйлера, Даламбера и Клеро конца 1740-х годов могут по справедливости считаться отправной точкой всей современной небесной механики. Наряду с теорией возмущенных движений Эйлер внес, конечно, большой вклад и в методы определения невозмущенных кометных орбит.

Особо отметим работы Эйлера по теории движения Луны. Первый цикл этих исследований был подытожен в его берлинской монографии (1753). На основе развитой здесь теории были вычислены лунные таблицы Майера, удостоенные впоследствии Британским парламентом денежной премии (с выплатой 1/10 части суммы Эйлеру). Но наиболее интересна данная Эйлером (1772) вторая теория движения Луны. Первоначально она не привлекла широкого внимания ученых вследствие своей сравнительной сложности. Но через 100 лет этой теорией заинтересовался Хилл, он развил заложенные в ней идеи и опубликовал две работы, ставшие одним из важнейших источников дальнейшего прогресса всей небесной механики. Записанные Эйлером в прямоугольных координатах уравнения движения Луны оказались типичными для теории нелинейных колебаний, и продолженные Хиллом исследования Эйлера по методам их интегрирования внесли значительный вклад в общую теорию нелинейных колебаний.

Вклад Эйлера в становление и развитие небесной механики весьма значителен. Однако уже в XIX веке исследователи не обращались к источникам, предшествовавшим “Трактату по небесной механике” Лапласа, обобщившему основные достижения XVIII века в этой области.

4. Движение твердого тела. Выдающийся вклад был внесен Эйлером в создание общей теории движения твердого тела. Первоначально, в конце 1730-х годов, при подготовке своей “Корабельной науки” (1749), Эйлер занимался некоторыми частными задачами динамики твердого тела. В этом большом двухтомном сочинении мы находим разложение движения корабля на поступательное и вращательное, попытку расчета малых колебаний корабля на воде, продвинутое учение об устойчивости равновесия плавающих тел, элементы учения о моментах инерции.

К общей теории движения твердого тела Эйлер вернулся в 1749–1750 гг. Известным побуждением к тому послужили, по-видимому, исследования Даламбера, вошедшие в его трактат о предварении равноденствий и нутации земной оси и содержавшие определенные подходы к теории вращения твердого тела. Первый решающий шаг для построения динамики твердого тела

был совершен Эйлером в мемуаре “Открытие нового принципа механики” (1752). Здесь Эйлер изложил “общий и фундаментальный принцип всей механики”, который по существу заключался в применении основного закона динамики (второго закона Ньютона) для каждой бесконечно малой частицы тела в проекциях на оси неподвижной системы координат:

$$Md^2x = Pdt^2, \quad Md^2y = Qdt^2, \quad Md^2z = Rdt^2,$$

где M – масса частицы, а P, Q и R – составляющие внешних сил (Эйлер записывал эти уравнения с коэффициентом 2 в левой их части, что объясняется применявшейся тогда системой физических единиц, в которой ускорения безразмерны, а скорости измеряются специальным образом). В своем мемуаре Эйлер писал, что “именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так также и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам”.

Сейчас трудно себе даже представить тот скачок, который придал механике этот “новый принцип”, который кажется нам сегодня самоочевидным. Но именно он открыл естественный путь, в частности, для построения всей механики сплошной среды. Справедливости ради надо отметить, что запись основного закона динамики в проекциях на оси неподвижной системы координат применительно к изучению движения материальной точки была предложена в качестве самостоятельного “принципа” механики еще Маклореном (1742). В 1740-х годах XVIII века такая запись уравнений движения уже использовалась рядом ученых и, в частности, Иоганном Бернулли, Клеро, Даламбером и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль, что эти дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке общих задач механики. (Необходимость независимого притяжения также и закона момента количества движения была осознана Эйлером значительно позже). На основании этого подхода Эйлер вывел сразу же общие уравнения вращения твердого тела, однако представил их сначала в малоудобной для исследования форме, отнесенной к неподвижной системе координат, используя моменты инерции тела, меняющиеся в процессе движения.

В 1755 г. Сегнер опубликовал небольшое сочинение о вращательном движении тел, где обнаружил наличие трех взаимно перпендикулярных осей свободного вращения у каждого тела. По признанию Эйлера, ознакомление с работой Сегнера побудило его вернуться к изучению вращения твердых тел и дало в руки путеводную нить для построения компактной общей теории. В результате, в своих работах, относящихся к концу 1750-х годов (но опубликованных в “Мемуарах” Берлинской академии лишь в 1765 г.), Эйлер использовал в качестве основной системы координат главные оси инерции

тела, являющиеся свободными осями вращения, и придал общим динамическим уравнениям (с точностью до обозначений и с учетом применявшейся им системы физических единиц) ставшую ныне классической форму:

$$dx + \frac{c-d}{a}yzdt = \frac{Pdt}{Ma}, \quad dy + \frac{a-c}{b}xzdtdt = \frac{Qdt}{Mb}, \quad dz + \frac{b-a}{c}xydt = \frac{Rdt}{Mc}.$$

Здесь M – масса, a, b, c – главные центральные моменты инерции тела, P, Q, R – моменты внешних сил. Тогда же Эйлер исследовал и первый знаменитый случай интегрируемости в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки – центра масс. Эйлеру принадлежит, наконец, и разработка кинематики твердого тела, включающая вывод обеих форм кинематических уравнениями вращения (одну из которых иногда называют уравнением Пуассона), а равно и развернутое учение о моментах инерции, за исключением, впрочем, построения эллипсоида инерции.

Завершением основного этапа исследований Эйлера по динамике твердого тела явился его трактат “Теория движения твердых тел” (1765), который он закончил в 1760 г. и считал третьим томом своей “Механики”. Эйлер продолжал заниматься динамикой твердого тела и в последующем. В частности, в его сочинении “Новый метод определения движения твердых тел” (1776) впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы количества движения и момента количества движения:

$$\begin{aligned} \int dM \frac{d^2x}{dt^2} &= P, & \int zdM \frac{d^2y}{dt^2} - \int ydM \frac{d^2z}{dt^2} &= S, \\ \int dM \frac{d^2y}{dt^2} &= Q, & \int xdM \frac{d^2z}{dt^2} - \int zdM \frac{d^2x}{dt^2} &= T, \\ \int dM \frac{d^2z}{dt^2} &= R, & \int ydM \frac{d^2x}{dt^2} - \int xdM \frac{d^2y}{dt^2} &= U \end{aligned}$$

(у Эйлера эти уравнения записаны с дополнительным коэффициентом в правой их части, определяющимся использовавшейся системой физических единиц). Клиффорд Трусделл считает это место у Эйлера первым в истории механики появлением обоих этих законов в качестве “*фундаментальных, общих и независимых законов механики* для всех видов движения всех видов тел”. В связи с этим Трусделл предложил называть совокупность этих законов механики законами Эйлера.

5. Механика жидкости и газа. Интерес Эйлера к задачам движения жидкости проявился еще в юношеские годы. Под влиянием Иоганна Бернулли он использовал тогда при исследовании истечения жидкости из сосудов закон живых сил. Свои первые результаты Эйлер доложил Петербургской академии летом 1727 г., через две недели после аналогичного доклада Даниила Бернулли. Результаты обоих авторов совпали, и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему

старшему товарищу, полностью прекратив свои собственные исследования в этой области на четверть века. Он вернулся к общим проблемам движения жидкости лишь в начале 1750-х годов.

Первые подходы к выводу общих континуальных уравнений движения жидкости были предприняты в самом конце 1740-х годов Даламбером. Свои гидродинамические исследования он представил на конкурс Берлинской академии в конце 1749 г. и позже опубликовал в Париже (1752). Наряду с соображениями о сопротивлении жидкостей, в его сочинении содержалось рассмотрение непрерывного поля скоростей и вывод дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в некоторых случаях. Хотя и насыщенное новыми идеями сочинение Даламбера не было доведено до построения общих уравнений гидродинамики. Более того, написанное в свойственном Даламберу нечетком и непоследовательном стиле сочинение это было трудно для чтения и понимания. Однако не для Эйлера, который ознакомился с ним в 1750 г.

Именно Эйлеру удалось построить с присущей ему ясностью и четкостью всю систему уравнений движения идеальной жидкости. При этом он опирался на свой упомянутый выше “новый принцип механики”. Два основные фундаментальные сочинения Эйлера по гидростатике и гидродинамике, относящиеся к 1753–1755 гг., были опубликованы в “Мемуарах” Берлинской академии (1757).

В первом из этих сочинений, “Общие принципы состояния равновесия жидкостей”, Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась, в основном, и до наших дней. Он использует понятие давления, указывает на его зависимость, по крайней мере, от плотности и температуры и дает вывод общего уравнения равновесия жидкостей и газов. Затем Эйлер вводит понятие потенциала сил и указывает на постоянство давления, плотности и температуры на поверхностях уровня потенциала. Потом он выводит общие зависимости применительно к случаю идеального газа и переходит к подробному рассмотрению различных случаев равновесия жидкостей и газов. Здесь он получает, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы, а также высказывает предложение, что при постоянном объеме температуру целесообразно определять пропорциональной давлению газа.

Второе свое сочинение – “Общие принципы движения жидкостей” Эйлер начинает с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рассмотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнения неразрывности для сжимаемых жидкостей:

$$P - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$Q - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$R - \frac{1}{q} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + \frac{\partial qv}{\partial y} + \frac{\partial qw}{\partial z} = 0.$$

Здесь p – давление, q – плотность, P, Q и R – массовые силы. В оригинальной записи Эйлера эти уравнения отличаются только способом введения физических величин и обозначением частных производных.

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, которая влияет на давление и под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, “заклучают в себе всю теорию движения жидкости”.

Вслед за приведенным выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил и скорости, выражает через них уравнения движения и получает соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также вообще для баротропных процессов – интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа–Коши. Эйлер специально оговаривает и существование непотенциальных течений жидкости, приводя в качестве примера один простой случай вихревого вращения жидкости. Заканчивается сочинение замечанием, что выведенные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа.

Вслед за этими первыми работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распространения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 с.), относящаяся уже к концу 1760-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769–1772 гг. в ежегодниках Петербургской Академии наук. Первая ее часть включает рассмотрение общих свойств жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и исследование частных случаев равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во второй части выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и рассмотрены подробнее случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе потенциального течения. Последняя глава посвящена определению движения жидкости по заданному начальному состоянию; здесь, в частности, выведены общие уравнения гидродинамики в так называемых переменных Лагранжа (эти переменные были указаны Лагранжу Эйлером в 1760 г. в письме, которое Лагранж опубликовал в 1762 г. вместе со своими собственными, связанными с этим, исследованиями). В третьей части работы Эйлер рассматривает течение в трубах, расчет подъема воды при помощи насосов и течения под действием разности температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовых музыкальных инструментов.

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной

жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики, зародившейся на столетие позже и развившейся уже в XX веке.

6. Механика гибких и упругих тел, прикладная механика. Осветив несколько подробнее две блестящие страницы в творчестве Эйлера – создание им теории движения твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, остановимся теперь коротко на некоторых других его работах. Задачами механики упругих тел (стержней) Эйлер заинтересовался еще в ранней молодости. В одной заметке, написанной Эйлером еще в Базеле, но опубликованной лишь посмертно в 1862 г., Трусделл обнаружил первый вывод закона изгиба стержней Якоба Бернулли из закона Гука для растяжения волокон – результат, не замеченный первоначально самим Эйлером. Не останавливаясь на важных работах о поперечных колебаниях стержней, отметим знаменитые исследования Эйлера о равновесных формах упругих стержней и их продольном изгибе. Эти исследования были инициированы установлением Даниилом Бернулли (в 1742 г.) свойства экстремальности упругой энергии изогнутых упругих стержней. Относящиеся сюда классические результаты Эйлера были опубликованы в его трактате по вариационному исчислению (1744). Здесь были проанализированы возможные типы равновесных форм упругого стержня, изогнутого под действием приложенных к его концам силы и момента. Здесь же содержится, по существу, и общая формула для критической силы при продольном изгибе стержня. Последние исследования Эйлера в этой области (конец 1770-х гг.) посвящены продольному изгибу колонн под действием их собственного веса.

В 1770-х годах Эйлер получил общие уравнения равновесия и движения упругих стержней без специальных предположений о природе материала и о малости деформаций. При этом Эйлер рассматривал действующие в сечениях поперечные силы, предвосхитив представление о касательных напряжениях. Наконец, к этим же годам относится введение им физической характеристики материала, вполне эквивалентной модулю Юнга.

Эйлеру принадлежат также важные сочинения по прикладной механике. Он занимался вопросами сухого трения (его имя носит формула для расчета трения каната, обернутого вокруг круглого вала), общей теорией машин и анализом работы различных конкретных машин, механизмов и приборов (например, зубчатых передач и весов). Цикл работ посвящен Эйлером гидравлическим двигателям и, в частности, теории сегнерова колеса – прообраза реактивной гидравлической турбины.

Глубокие исследования были проведены Эйлером по теории корабля. В частности, помимо упомянутого выше, он изучал различные системы движителей, в том числе гидрореактивные движители. В 1773 г. Эйлер опубликовал в Петербурге практическое руководство по кораблестроению и вождению кораблей, переизданное затем в Париже, где оно использовалось в качестве учебного пособия.

7. Заключение. Эйлер определил последующее развитие математических наук, по крайней мере, на полтора века. Общий объем его сочинений

громаден. Свыше 800 опубликованных научных работ Эйлера составляют около 30000 печатных страниц и складываются из 600 статей в периодических изданиях и сборниках Петербургской Академии наук, 130 статей в “Мемуарах” Берлинской академии и изданных в Берлине сборниках, 30 статей в разных журналах Европы, 15 мемуаров, удостоенных премий и поощрений Парижской Академии наук, и 40 книг отдельных сочинений. Выше не были упомянуты любопытные “Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях” (3 т., 1768–1772), которые Эйлер писал в 1760–1762 гг. в порядке обучения дальней кузине Фридриха II и которые содержали изложение элементов логики и представлений того времени о разнообразных явлениях природы (“Письма” эти выдержали впоследствии до 50 изданий на десяти языках).

Сто лет тому назад по инициативе швейцарских математиков и при поддержке трех ведущих европейских академий наук – Петербургской, Берлинской и Парижской – было предпринято издание “Полного собрания трудов” (Opera omnia) Эйлера. Первый его том был опубликован в 1911 г., а два из запланированных 72 томов еще не напечатаны, но выход их в свет ожидается к 2011 г. Решение об издании дополнительной серии “Полного собрания трудов” Эйлера, содержащей его обширную научную переписку, было предпринято по согласованию между Швейцарской Академией естественных наук и Российской Академией наук в 1970-х годах. Из намеченных 10–12 томов этой серии пока выпущены только четыре.

Научный авторитет Эйлера, как при жизни, так и посмертно, был безграничен. Эйлер состоял почетным членом всех крупнейших академий и ученых обществ. Но особо велико было значение деятельности Эйлера для развития Петербургской Академии наук. “Вместе с Петром I и Ломоносовым, – писал С.И. Вавилов, – Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность”.