

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РОБАСТНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПУТЕМ ДЕГРАДАЦИИ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

В задачах стабилизации предлагается строить регулятор, изменив исходную модель объекта управления так, чтобы нежелательные движения проявлялись сильнее, чем в исходной модели, тогда регулятор, найденный для измененной модели, обеспечивает лучшее качество переходных процессов и приобретает свойство робастности

В задачах стабилизации динамических объектов, в частности авиационных, ставится требование обеспечения некоторого, иногда называемого «заданным», качества переходных процессов. Как правило, требуется обеспечить быстроедействие и колебательность не хуже заданных, и при этом выполнить условия ограничения перегрузок, а также отклонений рулей и их скоростей. Задачи такого рода объединяются собирательной концепцией качества переходных процессов. В работе А.М.Летова [1] показатели качества называются вторичными показателями устойчивости, т.е. их введение связывается со свойством устойчивости как подлежащим усилению требованиями качества, отмечена актуальность соединения концепции качества переходных процессов с предложенным методом аналитического конструирования регуляторов. Для каждого класса объектов исходными значениями показателей качества являются известные из практики проектирования и эксплуатации. Например, «Нормы летной годности самолетов» регламентируют некоторые показатели качества движения (количество колебаний, перерегулирование), отклонение от которых в сторону ухудшения не допускается.

Предлагаемый подход к построению регуляторов является интуитивно очевидным. Его существо состоит в том, что если путем предварительного изменения уравнений движения объекта осуществить ухудшение (в смысле показателей) качества его собственных движений, и для измененной модели построить регулятор, улучшающий показатели качества, то будучи примененным для исходной модели объекта, он в еще большей степени улучшит эти показатели. Данное утверждение в общем случае не является абсолютным, например взяв за исходный некоторый аттрактороподобный объект; затем изменив его так, что хаотичность (колебательность) движения усилилась, и для этого объекта найдя регулятор с некоторым приемлемым качеством, - нет далее никаких оснований гарантировать не то чтобы улучшения с этим регулятором качества движения исходного объекта, но и даже его устойчивости. Таким образом, в общем случае возможен контрпример. В задачах обеспечения робастности [2] обычно исследуется

нечувствительность к изменению параметров объекта. Нас интересуют изменения модели, ведущие к ухудшению качества переходных процессов. Поэтому можно говорить о робастности по отношению к качеству переходных процессов.

В теории управления сама задача обеспечения заданного качества имеет ту особенность, что задание показателей качества до нахождения регулятора невозможно, поскольку достигаемые показатели зависят от регулятора, который до его нахождения не известен. Тем более не известно, какие предельные значения показателей достижимы, какое сочетание например колебательности и быстродействия окажется наиболее приемлемым. Ситуация имеет характер неопределенности, когда точно цель задачи не может быть сформулирована. Она не зависит от метода синтеза и является принципиальной.

Подобные задачи в природе на высоких уровнях организации материи решаются путем эволюции, поэтому при решении задач построения регуляторов мы будем использовать подобные процедуры.

Будем действовать в два этапа. На первом синтезируем параметрический регулятор для исходной системы, параметры которого монотонно влияют на быстродействие и колебательность. На втором используем предлагаемый подход изменения модели объекта, и путем многократного изменения модели и решения задачи синтеза будем отбирать наиболее устраивающие нас результаты, проверяя их моделированием. Изложение сути начнем с задачи изменения заданной системы. Пусть объект описывается линейной дифференциальной системой в векторно-матричном виде.

$$\dot{X} = AX + Bu. \quad (1)$$

Собственные движения системы (1) зависят от корней характеристического уравнения матрицы A , которое имеет вид

$$\det(\lambda E - A) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим, как изменятся корни (2) при умножении матрицы A на некоторое (возможно и комплексное) число α . Запишем новое характеристическое уравнение

$$\det(\Lambda E - \alpha A) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет эквивалентную запись

$$\alpha^n \cdot \det\left(\frac{\Lambda}{\alpha} E - A\right) = 0. \quad (4)$$

Сравнивая (2) и (4), получаем

$$\Lambda = \alpha \lambda. \quad (5)$$

Из (5) видно, что если некоторая квадратная матрица A размера $n \times n$ имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то матрица αA имеет собственные числа $\alpha \lambda_1, \alpha \lambda_2, \dots, \alpha \lambda_n$. Т.е. умножение матрицы на число приводит к радиальному растяжению (сжатию) плоскости корней

характеристического уравнения. Используя это, мы можем одновременно воздействовать на действительные и мнимые части собственных чисел. Например, выбирая для устойчивой матрицы A число α больше единицы, мы одновременно увеличим быстродействие и колебательность. Но желательно изменять матрицу так, чтобы изменялись по отдельности или только колебательность, или только быстродействие. Точное решение такой задачи получается слишком сложным для инженерной расчетной практики. Поэтому вместе с умножением, ведущим к увеличению колебательности, применим смещение плоскости собственных чисел влево, т.е. их действительные значения станут правее, что соответствует уменьшению быстродействия. Для этого случая характеристическое уравнение имеет вид

$$\det((\lambda + c)E - A) = 0, \quad (6)$$

которое можно переписать иначе

$$\det(\lambda E - (A - cE)) = 0. \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7) получаем, что смещение диагональных элементов матрицы эквивалентно смещению собственных чисел вдоль действительной оси (смещению плоскости корней). В отношении конечного результата – расположения собственных чисел, умножение и смещение матрицы не коммутативны, как не коммутативны растяжение и смещение плоскости. Отметим, что в (7) смещение c может быть и комплексным.

Таким образом, мы можем целенаправленно ухудшить поведение системы в смысле увеличения колебательности и одновременного уменьшения быстродействия.

Метод аналитического конструирования основан на ограничении поведения функции Беллмана в смысле скорости ее затухания [3]. Объект описывается линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (8)$$

где X - фазовый вектор размера n ; A - $n \times n$ матрица; B - $n \times m$ матрица; u - вектор управления размера m .

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^{\infty} (X^T P X + \dot{X}^T G \dot{X} + u^T R u + cV) dt, \quad (9)$$

где P, G, R - квадратные положительно определенные симметричные матрицы; $V = X^T Q X$ - функция Беллмана; c - положительное число.

На оптимальных траекториях функция Беллмана уменьшается со скоростью подынтегрального выражения функционала (8), в данном случае – не медленнее, чем $\exp(-ct)$. Показатель c монотонно влияет на быстродействие замкнутой системы.

Колебательность ограничивается выбором матрицы G в функционале (9) и введением комплексного масштабирования независимой переменной –

времени.

$$M = e^{i\varphi}, \quad (10)$$

где φ - угол поворота комплексной плоскости.

Система (8) принимает вид

$$\dot{X} = MAX + MBu. \quad (11)$$

Для функционала (9) и системы (11) запишем уравнение Беллмана

$$\begin{aligned} \min_u [& X^*PX + X^*A^*M^*GMAX + X^*cQX + \\ & + X^*A^*M^*QX + X^*QMAX + u^*B^*M^*GMAX + u^*B^*M^*QX + \\ & + X^*A^*M^*GMBu + X^*QMBu + u^*B^*M^*GMBu + u^*Ru] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) * - символ транспонирования и комплексного сопряжения.

Из (12) найдем управление, дифференцируя по нему выражение в квадратных скобках (12)

$$\begin{aligned} u &= -(B^*M^*GMB + R)^{-1}(B^*M^*GMA + B^*M^*Q)X \\ u^* &= -X^*(A^*M^*GMB + QMB)(B^*M^*GMB + R)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим управление (13) в уравнение (12)

$$\begin{aligned} X^*PX + X^*A^*M^*GMAX + X^*cQX + X^*A^*M^*QX + X^*QMAX - \\ - X^*(A^*M^*GMB + QMB)(B^*M^*GMB + R)^{-1}(B^*M^*GMA + B^*M^*Q)X = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнении (14) вынесем за скобки слева и справа фазовый вектор, и поскольку (14) должно выполняться для всех его значений, получим матричное квадратное уравнение Риккати для нахождения матрицы Q квадратичной формы функции Беллмана.

$$J_{21} + QJ_{11} + J_{11}^*Q + QJ_{12}Q = 0. \quad (15)$$

В (15) матричные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} J_{21} &= P + A^*M^*GMA - A^*M^*GMB(B^*M^*GMB + R)^{-1}B^*M^*GMA; \\ J_{11} &= (\frac{c}{2}E + M)A + MB(B^*M^*GMB + R)^{-1}B^*M^*GMA; \\ J_{11}^* &= A^*(\frac{c}{2}E + M^*) + A^*M^*GMB(B^*M^*GMB + R)^{-1}B^*M^*; \\ J_{12} &= -MB(B^*M^*GMB + R)^{-1}B^*M^*. \end{aligned} \quad (16)$$

При решении уравнения (15) с учетом (16) решение – матрица Q квадратичной формы функции Беллмана получается эрмитовой. Ее диагональные члены являются комплексно сопряженными.

При построении регулятора он оказывается комплексным, и обеспечивает асимптотическую экспоненциальную устойчивость масштабированной системы (11). Требуется же обеспечение качества исходной системы (8). Решение состоит в том, чтобы в исходной системе

масштабировать первое и второе слагаемые с помощью разных масштабов. Далее следует подбирать масштаб второго слагаемого так, чтобы в результате синтеза комплексного регулятора произведение масштаба второго слагаемого на матрицу B и на матрицу коэффициента усиления, а также на обращенный масштаб первого слагаемого, было действительной матрицей.

Регулятор (13) является параметрическим, т.к. матрица коэффициентов обратной связи зависит от параметров c и φ . Их можно рассматривать как управления более высокого уровня, например при больших отклонениях от стабилизируемого положения предпочтение следует отдавать скорости приближения к нему, а при малых отклонениях – ограничению колебательности.

Рассмотрим пример построения регулятора для короткопериодического движения самолета. Модель объекта [4] имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -0,62\alpha + \omega_z \\ \dot{\omega}_z &= -2\alpha - 0,5\omega_z - 7,8\delta_B\end{aligned}\quad (17)$$

где α - отклонение угла атаки (в градусах) от стабилизируемого значения; ω_z - угловая скорость продольного вращения (в градусах в секунду); δ_B - отклонение руля высоты (в градусах) от значения, соответствующего стабилизируемому режиму.

Регулятор будем строить, изменив матрицу при фазовых координатах

$$A \rightarrow \alpha A + \beta E + \gamma E \quad (18)$$

В таблице 1 приведены наборы параметров преобразования (18) для пяти вариантов построения регулятора.

Таблица 1

№	α	β	γ
1	1	0	0
2	1,22	0,52	0
3	1,22	0,52	0,5
4	1,22	0,52	1,5
5	1,222	0,7	1,5

Матрицы функционала (9) соответственно равны $P = \text{diag}(20)$; $G = \text{diag}(30)$; $R = 10$. Параметр колебательности равен $\varphi = 60^\circ$. Параметр быстродействия равен $c = 0,5$.

Первый вариант расчета регулятора согласно табл.1 проведен для исходных согласно (17) параметров объекта. Остальные варианты изменения исходной системы согласно табл.1 по мере роста номера эксперимента соответствуют ухудшению исходной системы по показателям быстродействия и колебательности.

На рис.1 приведены графики переходных процессов для угла атаки, начальное значение отклонения по которому составляет 25 градусов – для всех вариантов расчетов. На рис.2 приведены графики переходных процессов

для угловой скорости. На рис.3 приведены графики переходных процессов для отклонения руля высоты. Из графиков видно, что усиление ухудшения по показателям качества исходной системы приводит к регуляторам, улучшающим быстроедействие системы.

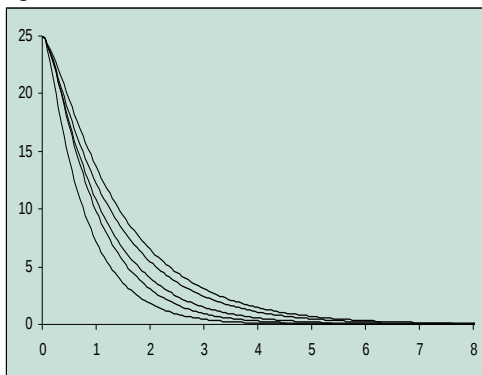


Рис.1. Графики переходных процессов по углу атаки

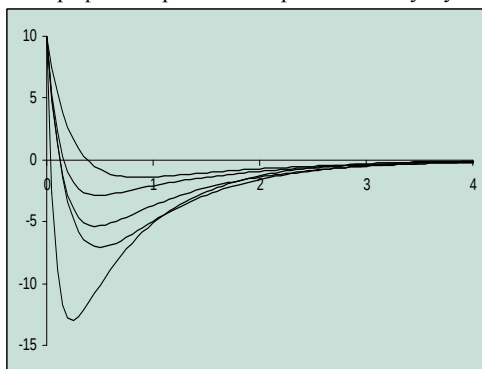


Рис.2. Графики переходных процессов по угловой скорости

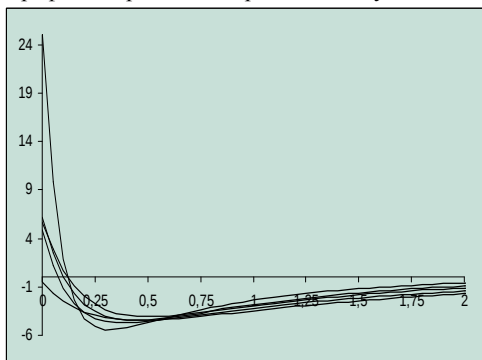


Рис.3. Графики отклонения руля высоты.

Таким образом, можно сделать вывод о рациональности предложения об изменении исходной системы в смысле целенаправленного ухудшения показателей качества ее собственного движения для последующего решения задачи аналитического конструирования регуляторов.

1. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.360 с.
2. *Туник А.А., Мельник К.В.* Проектування багатовимірних систем керування польотом в умовах невизначеності за допомогою технології μ -синтезу / Вісник НАУ. -2008. - №3. –С.73-84.
3. *Антонов В.К.* Застосування масштабування незалежної змінної в задачі аналітичного конструювання регуляторів // Видавництво журналу Автошляховик. Вісник Північного Наукового Центру Транспортної Академії України, 2003. - С.82-85.
4. *Азарсков В.М., Машков О.А., Кондратенко С.П.* Особенности построения функционально устойчивых цифровых автоматических систем / Электроника та системи управління / Київ, Національний авіаційний університет, № 1 (11), 2007 р., с. 96-105.
5. *Машков О.А., Кононов О.А.* Возможности обеспечения функциональной устойчивости эргатических систем управления в рамках существующего методического аппарата / Збірник наукових праць: Інститут проблем моделювання в енергетиці, Вип. 32, Київ, 2006, с.151-157.
6. *Машков О., Самборський І., Кірсанов В.* Проблемы построения функционально – устойчивого комплекса управления дистанционно пилотируемыми летательными аппаратами с применением псевдоспутниковых технологий // Арсенал-XXI, №2, 2007, с. 27-34.
7. *Машков О.А., Кононов О.А.* Применение теории функционально устойчивых систем для решения задач навигации и управления объектами вида «макросистема» // Системи управління , навігації та зв'язку”, вип.. 3, К., 2007 р., с. 15-19.
8. *Азарсков В.М., Дурняк Б.В., Кондратенко С.П., Машков О.А.* Анализ возможных вариантов построения функционально устойчивого комплекса управления дистанционно пилотируемыми летательными аппаратами с применением псевдоспутниковых технологий / Збірник наукових праць: Інститут проблем моделювання в енергетиці, НАН України, вип. 42, 2007, с. 28-40.
9. *Азарсков В.М., Дурняк Б.В., Кондратенко С.П., Машков О.А.* Проблемы построения моделей функционально устойчивого комплекса управления дистанционно пилотируемыми летательными аппаратами с применением псевдоспутниковых технологий / Моделювання та інформаційні технології / Інститут проблем моделювання в енергетиці, НАН України, вип. 43, 2007, с. 118-127.
10. *Машков О.А., Усаченко Л.М.* Новые подходы к построению функционально устойчивых сложных динамических систем / „Системи управління , навігації та зв'язку”, вип.. 4(8), К., 2008 р., с. 68-72.
11. *Машков О.А., Усаченко Л.М.* Теоретические основы построения функционально-устойчивой автоматизированной системы обслуживания воздушного движения (терминология и модели) / Моделювання та інформаційні технології / Інститут проблем моделювання в енергетиці, НАН України, вип. 47, 2008, с. 3-17.
12. *Дурняк Б.В., Машков О.А., Усаченко Л.М., Сабат В.І.* Методологія забезпечення функціональної стійкості ієрархічних організаційних систем управління / Збірник наукових праць: Інститут проблем моделювання в енергетиці, НАН України, вип. 48, 2008, с. 3-21.

Поступила 28.01.2010р.