

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ АНТЕННЫ

### Актуальность

Актуальной проблемой при создании современных систем наблюдения является разработка программных систем, предназначенных для решения задач восстановления сигналов, подвергнувшихся искажениям. Во многих случаях эти задачи формулируются в виде интегральных уравнений первого рода. Для их решения могут быть использованы специальные регуляризирующие методы, в том числе метод Тихонова [1].

**Введение.** В данной работе предлагается рассмотреть методы нахождения параметра регуляризации для метода Тихонова: метод вычислительных экспериментов [2] и обобщенный принцип невязки [1].

Для метода Тихонова применительно к интегральному уравнению Фредгольма I рода.

$$Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad c \leq x \leq d \quad (1)$$

предполагается, что  $K(x, s) \in L_1$ ,  $f(x) \in L_2$ ,  $y(s) \in C$ , а вместо точных

$f(x)$  и  $K(x, s)$  известны их приближенные значения  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{K}(x, s)$  такие, что

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (2)$$

где  $\delta$  - верхняя оценка значения погрешности правой части.

$$\|\tilde{K}(x, s) - K(x, s)\| \leq \xi, \quad (3)$$

где  $\xi$  - верхняя оценка значения погрешности ядра.

Привлекается сглаживающий функционал

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \int_c^d [\tilde{A}y - \tilde{f}(x)]^2 dx + \alpha \Omega[y],$$

где стабилизирующий функционал

$$\Omega[y] = \int_a^b \left\{ y^2(s) + q[y'(s)]^2 \right\} ds, \quad q \geq 0,$$

причем

$$\tilde{A}y = \int_a^b \tilde{K}(x, s)y(s)ds, \quad c \leq x \leq d.$$

Из условия минимума  $\Phi_\alpha$  следует уравнение Тихонова

$$\alpha[y_\alpha(t) - qy_\alpha''(t)] + \int_a^b R(t, s)y_\alpha(s)ds = F(t), \quad a \leq t \leq b,$$

где

$$R(t, s) = R(s, t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t)\tilde{K}(x, s)dx,$$

$$F(t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t)\tilde{f}(x)dx,$$

$$y'_\alpha(a) = y'_\alpha(b) = 0.$$

**Метод вычислительных экспериментов.** Покажем, как можно определить параметр регуляризации  $\alpha$ , используя метод вычислительных экспериментов. Суть метода заключается в том, что значение параметра регуляризации решаемой задачи выбирается, основываясь на решении модельных примеров. Метод состоит в следующем.

1. Пусть задано уравнение (оригинал  $P$ ) вида (1) своей правой частью  $\tilde{f}_p(x)$  и набором

$$x_1, x_2, \dots, x_l, s_1, s_2, \dots, s_n, \tilde{K}_p(x, s). \quad (4)$$

2. Составляется модельный пример  $Q$ , в котором точное решение задается с учетом априорной информации об искомом решении.

3. Определяется  $f_Q(x)$  из  $\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), c \leq x \leq d$ , при

$$K(x, s) = K_Q(x, s) \text{ таким, что } \frac{\|K_Q - \tilde{K}_p\|}{\|K_Q\|} = \tilde{\xi}_{\text{омн}P}.$$

4. Численно решается (при различных  $\delta > 0$ ) уравнение

$$\delta \left[ y_{\delta}(t) - q y_{\delta}''(t) \right] + \int_a^b \left[ \int_c^d \tilde{K}(x,s) dx \right] y_{\delta}(s) ds = \int_c^d \tilde{K}(x,t) \tilde{f}(x) dx, \quad a \leq t \leq b, \quad (5)$$

относительно  $[y_{\alpha}(s)]_Q$  в режиме (4) с ядром  $\tilde{K}(x,s) = \tilde{K}_Q(x,s) = \tilde{K}_P(x,s)$  и

правой частью  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_Q(x)$ , такой, что  $\frac{\|f_Q - \tilde{f}_Q\|}{\|f_Q\|} = \tilde{\delta}_{omnP}$ .

5. Определяется  $\alpha_{omnQ}$  — то  $\alpha$ , при котором  $\frac{\|y_{\alpha_Q} - y_Q\|}{\|y_Q\|} = \min_{\alpha > 0}$ .

6. Используется найденное значение  $\tilde{\delta}_{omnQ}$  для решения исходного уравнения  $P$ .

Описанному методу соответствует следующий численный алгоритм.

### Описание алгоритма

1. Пусть заданы ядро  $\tilde{K}_P(x_i, s_j)$  и правая часть  $\tilde{f}_P(x_i)$  исходного примера  $P$  на сетках  $c = x_1, x_2, \dots, x_l = d$ ,  $a = s_1, s_2, \dots, s_n = b$ .

2. Ядро  $K_Q(x_i, s_j)$  и точное решение  $y_Q(s_j)$  модельного примера  $Q$  определены на сетках  $c = x_1, x_2, \dots, x_l = d$ ,  $a = s_1, s_2, \dots, s_n = b$ .

3. Определяется  $\tilde{K}_Q(x_i, s_j) = g \cdot K_Q(x_i, s_j)$ ,  $g = const$ .

4. Вычисляется правая часть модельного примера

$$f_Q(x_i) = f_Q(x_i) + \sum_{j=1}^n r_j \cdot \tilde{K}_Q(x_i, s_j) y_Q(s_j), \quad f_Q(x_1) = 0, \quad r_1 = \frac{s_2 - s_1}{2},$$

$$r_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2}, \quad r_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{2}.$$

5. Находится  $\tilde{f}_Q(x) = f_Q(x) + \Delta f_Q$ , такое, что

$$\frac{\max |\Delta f_i|}{\max |f_Q(x_i)|} = \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

6. Для  $\alpha_i = \alpha_{i-1} \theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , решается (5) методом конечных сумм и разностей при  $\tilde{K}(x_i, s_j) = \tilde{K}_Q(x_i, s_j)$ ,  $\tilde{f}(x_i) = \tilde{f}_Q(x_i)$ .

7. Определяется  $\alpha_{omn}$  такое, при котором функция

$\frac{\max_j |y_{\alpha_i Q}(s_j) - y_Q(s_j)|}{\max_j |y_Q(s_j)|}$  принимает минимальное значение.

8. Находится  $y_p(s_j)$  – решение оригинала из (5) при  $\alpha = \alpha_{opt}$ ,  
 $\tilde{K}(x_i, s_j) = \tilde{K}_p(x_i, s_j)$ ,  $\tilde{f}(x_i) = \tilde{f}_p(x_i)$ .

**Обобщенный принцип невязки.** Рассмотрим способ нахождения параметра регуляризации обобщенным принципом невязки. Задано:

$$Ay = f, \quad y \in Y, f \in F, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \|\tilde{f} - f\|_F &\leq \delta, \\ \|\tilde{A} - A\| &\leq \xi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\tilde{A}y = \tilde{f}, \quad y \in Y, \tilde{f} \in F, \quad (8)$$

где  $\delta$  - верхняя оценка значения погрешности правой части,  $\xi$  - верхняя оценка значения погрешности оператора.

Для уравнения (6), полагаем, что вместо точных  $f$  и  $A$  известны  $\tilde{f}$  и  $\tilde{A}$  с оценками (7), т. е. в действительности решается уравнение (8). Полагаем также, что решается задача минимизации функционала (9) в виде

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 + \alpha \|y\|_Y^2, \quad (10)$$

причем  $y_\alpha$  – его экстремаль (т. е. решение задачи (9)).

Используются следующие функции:

$$\beta(\alpha) = \|\tilde{A}y_\alpha - \tilde{f}\|_F^2, \quad (11)$$

$$\gamma(\alpha) = \|y_\alpha\|_Y^2, \quad (12)$$

а также величина  $\tilde{\mu}$ , равная

$$\tilde{\mu} = \inf_{y \in Y} \|\tilde{A}y - \tilde{f}\|_F^2 \leq \mu, \quad (13)$$

где  $\mu$  – ее верхняя оценка. Величина  $\tilde{\mu}$  характеризует вырождение оператора  $\tilde{A}$  (если замыкание  $\tilde{A}Y$  совпадает с  $F$ , то  $\mu=0$ ) или меру несовместимости уравнения (8) и связана с псевдорешением.

Обобщенная невязка имеет вид

$$\kappa(\alpha) = \beta(\alpha) - \zeta(\alpha), \quad (14)$$

где

$$\zeta(\alpha) = (\delta + \xi\sqrt{\gamma(\alpha)})^2 + \mu. \quad (15)$$

Известно [3], что при  $\alpha > 0$  функции  $\bar{\kappa}(\alpha)$  и  $\beta(\alpha)$  являются монотонно неубывающими и непрерывными, а  $\gamma(\alpha)$  – монотонно невозрастающей и непрерывной. При этом

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta(\alpha) &= \mu \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \beta(\alpha) &= \|f\|_F^2 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \zeta(\alpha) &> \delta^2 + \mu \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \zeta(\alpha) &= \delta^2 + \mu \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \kappa(\alpha) &< -\delta^2, \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \kappa(\alpha) &= \|\tilde{f}\|_F^2 - (\delta^2 + \mu). \end{aligned}$$

Если

$$\|\tilde{f}\|_F^2 > \delta^2 + \mu \quad (17)$$

то существует и является единственным в интервале  $(0, \infty)$  такое значение  $\alpha = \alpha_d$  (значок  $d$  означает *discrepancy* – невязка), при котором

$$\kappa(\alpha) = 0. \quad (18)$$

При этом в качестве начального приближения  $\alpha$  при решении уравнения (15) можно воспользоваться следующим значением:

$$\alpha_{нач} = \|A\| \left[ \xi + \frac{\sqrt{\xi^2 + \left( \frac{\|\tilde{A}\|^2 \delta}{\|\tilde{f}\|_F^2 - \delta} + \xi^2 \right) (C^2 - 1) + \xi}}{C^2 - 1} \right],$$

где  $\|\tilde{f}\| / \delta > C > 1$ ,  $C = const \forall \delta \in (0, \delta_0]$ . Если же условие (17) не выполнено, то в качестве решения нужно брать  $y = 0$ .

Применительно к интегральному уравнению Фредгольма I рода обобщенный принцип невязки сводится к решению уравнения

$$\kappa(\alpha) \equiv \beta(\alpha) - \zeta(\alpha) = 0, \quad (19)$$

$$\beta(\alpha) = \int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) y_\alpha(s) ds - \tilde{f}(x) \right]^2 dx, \quad (20)$$

$$\zeta(\alpha) = (\delta + \xi \sqrt{\gamma(\alpha)})^2 + \mu, \quad (21)$$

$$\gamma(\alpha) = \int_a^b y_\alpha^2(s) ds. \quad (22)$$

### Численный эксперимент

Сравнительный анализ методов проведем путем решения модельной задачи повышения разрешающей способности антенны в среде Matlab.

Зададим исходную задачу:

$$\bar{y}_p(s) = \begin{cases} 160 \exp \left[ - \left( \frac{s+2,3}{0,8} \right)^2 \right] + 190 \exp \left[ - (s-2,2)^2 \right], & \text{нпу } s \in [-4,4], \\ 0, & \text{нпу } s \notin [-4,4] \end{cases}$$

$$\bar{K}_p(x, s) = q_1 \left\{ \frac{\sin[\gamma(\sin x - \sin s)]}{N \sin \left[ \frac{\gamma}{N} ((\sin x - \sin s)) \right]} - r(x, s) + q_3 \right\}, \text{ где}$$

$$r(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{нпу } \gamma |\sin x - \sin s| < \pi, \\ q_2 & \text{нпу } \gamma |\sin x - \sin s| \geq \pi, \end{cases}$$

$$N = 25, \gamma = 38,2, q_1 = 0,9, q_2 = 0, q_3 = 1/9.$$

Модельный пример имеет вид:

$$\bar{y}_Q(s) = \begin{cases} 72 \exp \left[ - \left( \frac{s+2,38}{0,84} \right)^2 \right] + 93 \exp \left[ - \left( \frac{s-2,14}{0,98} \right)^2 \right], & \text{нпу } s \in [-4,4], \\ 0, & \text{нпу } s \notin [-4,4] \end{cases}$$

$$\bar{K}_Q(x, s) = q_1 \left\{ \frac{\sin[\gamma(\sin x - \sin s)]}{N \sin \left[ \frac{\gamma}{N} ((\sin x - \sin s)) \right]} - r(x, s) + q_3 \right\}, \text{ где}$$

$$r(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{нпу } \gamma |\sin x - \sin s| < \pi, \\ q_2 & \text{нпу } \gamma |\sin x - \sin s| \geq \pi, \end{cases}$$

$$N = 25, \gamma = 37,82, q_1 = 0,895, q_2 = 0,03675, q_3 = 0,105/0,895.$$

Для представления результатов введем обозначения:  $s$  – аргумент;  $y$  – точные значения функции;  $y_m^*$  – значения функции, полученные методом вычислительных экспериментов;  $y_n^*$  – значения функции, полученные обобщенным принципом невязки.

Таблица 1

## Результат работы алгоритмов

$s$	$y$	$y_m^*$	$y_n^*$
-4,00	1,75	-0,19	2,76
-3,67	6,89	9,51	15,03
-3,33	19,86	24,99	29,01
-3,00	41,76	42,94	42,70
-2,67	64,08	56,07	51,17
-2,33	71,78	59,74	53,81
-2,00	58,68	51,78	48,95
-1,67	35,01	35,52	34,94
-1,33	15,24	18,60	19,26
-1,00	4,85	7,92	7,96
-0,67	1,15	4,55	6,65
-0,33	0,35	5,25	7,80
0,00	0,81	6,83	9,74
0,33	3,11	9,24	12,45
0,67	9,70	12,42	15,84
1,00	24,03	23,37	25,35
1,33	47,23	43,85	44,07
1,67	73,65	66,26	62,97
2,00	91,12	80,17	75,80
2,33	89,45	80,82	76,34
2,67	69,67	67,70	65,46
3,00	43,06	47,03	48,47
3,33	21,11	27,09	29,72
3,67	8,21	12,91	15,96
4,00	2,54	3,87	6,89

Максимальные относительные погрешности вида  $\frac{\max_{a \leq s \leq b} |y(s) - \tilde{f}(s)|}{\max_{a \leq s \leq b} |y(s)|}$  для

полученных результатов для метода вычислительных экспериментов и обобщенного принципа невязки равны 0,13 и 0,197 соответственно. Таким образом, в данном случае метод вычислительных экспериментов дает более точный результат.

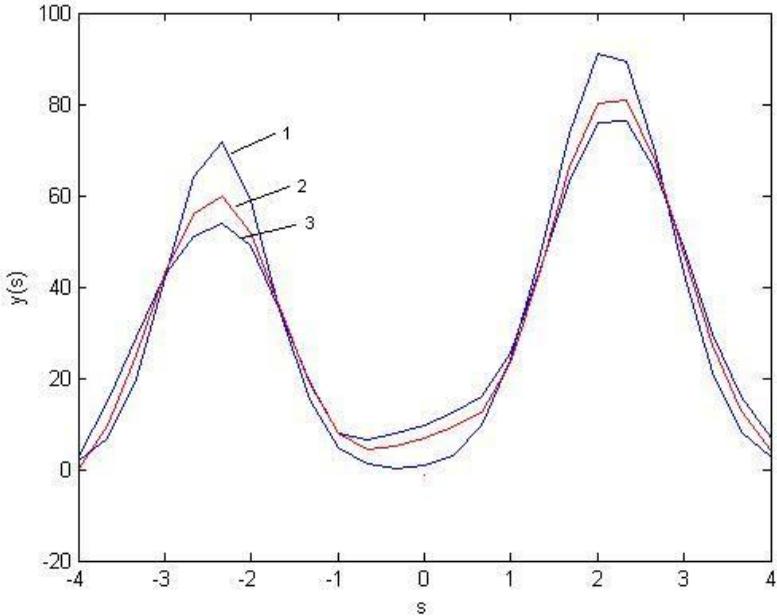


Рис. 1. Графики решений: точного (1), полученного методом вычислительных экспериментов (2) и обобщенным принципом невязки (3)

**Заключение.** Численные результаты, полученные при решении ряда практических примеров, свидетельствуют о том, что рассмотренные регуляризирующие методы являются работоспособными, а предложенные программы достаточно эффективными, гибкими и удобными для использования. Они могут быть применены вместе с другими пакетами прикладных программ, которые входят в программный комплекс Matlab.

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. О способе модельных примеров при реализации методов решения некорректных задач // Электронное моделирование. – 1979. – № 1. – С. 86–89.
3. Гончаровский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки. – Журнал вычислительной математики и мат. физики. – 1973. – 13, № 2. – С. 294–302.